

УДК 538.56 : 519.25

БОЛЬШИЕ ВЫБРОСЫ ОДНОМЕРНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

A. Л. Вировлянский, A. H. Малахов

Проводится детальное описание статистики серий выбросов за фиксированый уровень одномерного стационарного марковского процесса.

Данная статья посвящена исследованию некоторых статистических характеристик выбросов одномерного марковского процесса $x(t)$, заданного стохастическим уравнением

$$\dot{x} + a(x) = \xi(t), \quad (1)$$

где $a(x)$ — непрерывная функция, причем $a(\pm\infty) = \pm\infty$, а $\xi(t)$ — гауссов белый шум с нулевым средним. Подобные уравнения довольно часто возникают в задачах статистической радиофизики*.

Хорошо известно, что $x(t)$ имеет стационарное распределение [1, 2]

$$W_{st}(x) = A \exp\left[-(2/D) \int_0^x a(y) dy\right].$$

Здесь A — нормировочный множитель, а D определяется равенством $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = D \delta(t - t')$, угловые скобки означают статистическое усреднение. Через $2x_0$ обозначим наибольший из характерных масштабов $W_{st}(x)$ (для простоты полагаем $\langle x \rangle = 0$). При $|x| > x_0$ $W_{st}(x)$ монотонно спадает при $x \rightarrow \pm\infty$.

Далее будем рассматривать выбросы процесса $x(t)$, превышающие уровень $x = h \gg x_0$. Ввиду марковости $x(t)$ целесообразно ввести понятие серии выбросов за данный уровень [1]. Дело в том, что траектории марковского процесса недифференцируемы. Вследствие этого пересечение «высокого» уровня происходит следующим образом. Допустим, реализация достигла уровня в момент времени t' . Затем она пересечет его сколь угодно большое число раз — последний раз в момент времени t'' — и «уйдет» вниз. Если h достаточно велико, то реализация вновь достигнет этого уровня лишь через время $\Delta t \gg t'' - t'$. Кусок реализации во временном интервале (t', t'') называется серией выбросов за уровень h .

В книге Стратоновича [1] получена оценка средней частоты появления серии выбросов. В данной работе показано, как можно получить существенно более подробное описание статистики серии выбросов процесса $x(t)$ за уровень $h \gg x_0$.

В дальнейшем рассматриваются только такие $a(x)$, для которых процесс $x(t)$ является эргодическим. Из физических соображений понятно, что это условие не накладывает сильных дополнительных ограничений на вид данной функции.

* Уравнение более общего вида $\dot{x} + b(x) = c(x)\xi(t)$ сводится к (1) простой заменой переменных [1].

С ростом h среднее время между двумя последовательными сериями выбросов растет и при достаточно больших h/x_0 (качественный критерий будет приведен ниже) становится много большим времени корреляции $x(t)$. Тогда появление серий выбросов можно считать статистически независимыми событиями и, как следствие этого, число серий в единицу времени распределенным по закону Пуассона: вероятность появления n серий в единицу времени равна $(\lambda^n/n!) \exp(-\lambda)$, где λ — среднее число серий в единицу времени.

Для нахождения λ воспользуемся эргодичностью $x(t)$. В частности, мы используем тот факт, что за единицу времени реализация этой случайной функции пребывает выше уровня h , в среднем время $T_0 = \int_h^\infty W_{st}(x) dx$. Через T_1 обозначим среднее время пребывания $x(t)$ над уровнем h в течение одной серии. Тогда

$$\lambda = T_0/T_1. \quad (2)$$

Для вычисления T_1 рассмотрим подробнее пересечение процессом $x(t)$ уровня h . Без ограничения общности можно считать, что рассматриваемая серия выбросов начинается при $t = 0$, т. е. $x(0) = h$. Для описания серии выбросов уравнение (1) можно заменить на

$$\dot{x} + a(h) = \xi(t) \quad (3)$$

с начальным условием $x(0) = h$. Ниже будет получено условие применимости такого приближения. Решение (3) равно

$$x(t) = h + w(t) - a(h)t, \quad (4)$$

где $w(t)$ — винеровский процесс ($w(0) = 0$), одномоментная плотность вероятности которого равна

$$W(w, t) = (1/\sqrt{2\pi Dt}) \exp(-w^2/2Dt). \quad (5)$$

По определению

$$T_1 = \left\langle \int_0^\infty \theta[x(t) - h] dt \right\rangle = \int_0^\infty \langle \theta[w(t) - a(h)t] \rangle dt.$$

Здесь $\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$. После несложных вычислений с использованием (5) получим

$$T_1 = D/2a^2(h). \quad (6)$$

Теперь, зная T_0 и T_1 , из (2) находим

$$\lambda = [2a^2(h)/D] \int_h^\infty W_{st}(x) dx. \quad (7)$$

Оценим первый отброшенный при переходе от (1) к (3) член, который равен $a'(h)[x(t) - h]$. Используя (4), (5) и (6), получим, что среднеквадратичное значение этого выражения по порядку величины равно $|[a'(h)/a(h)]D|$. Таким образом, необходимое условие справедливости (3) (а значит, и (6) и (7)) имеет вид

$$|a'(h)|D \ll a^2(h). \quad (8)$$

Хотя предыдущие рассуждения по нашему мнению достаточно убедительны, они, разумеется, не являются математически строгими. Поэтому ради дополнительной проверки представляется целесообразным вычислить λ другим способом. Воспользуемся тем обстоятельством, что для марковских процессов рассматриваемого здесь типа задача о среднем времени первого достижения данного уровня полностью решена

[^{1, 2}]. Если $x(0) = 0$, то среднее время первого достижения уровня $x = h$ равно [²]

$$\bar{t}(h) = (2/D) \int_0^h \exp(-qz) dz \int_{-\infty}^z \exp[q(y)] dy, \quad (9)$$

где $q(z) = (-2/D) \int_0^z a(x) dx$. Если $h \gg x_0$, то время первого достижения

этого уровня фактически совпадает со временем начала первой серии выбросов за уровень h . Эта идея использована в [¹] при оценке средней частоты появления серий. Учитывая, что появление серий выбросов описывается законом Пуассона, нетрудно показать, что асимптотики $\bar{t}(h)$ и $1/\lambda(h)$ при $h \rightarrow \infty$ должны совпадать. И они действительно совпадают! В этом можно убедиться, преобразуя (9) с использованием асимптотических формул

$$\left. \begin{aligned} \int_h^\infty \exp[-f(y)] dy &\rightarrow [1/f'(h)] \exp[-f(h)] \\ \int_h^\infty \exp[f(y)] dy &\rightarrow [1/f'(h)] \exp[f(h)], \end{aligned} \right\} \text{при } h \rightarrow \infty,$$

для применимости которых необходимы условия: $f(y) \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow \infty$ и $f''(h)/2 \ll f'(h)$. Поскольку для нашего случая $f(h) = q(h)$, то последнее условие совпадает с (8). С помощью этих формул общую асимптотику (7) и (9) можно записать в следующем простом виде:

$$\lambda = a(h) W_{st}(h). \quad (10)$$

В соответствии со сделанным вначале замечанием все предыдущие рассуждения справедливы лишь при столь больших h , что $1/\lambda \gg \tau_{\text{кор}}$ — времени корреляции $x(t)$.

Для подробного описания статистики пребывания процесса $x(t)$ выше уровня h рассмотрим вспомогательную случайную функцию $z(t) \equiv [x(t) - h]\theta[x(t) - h]$. При $h \gg x_0$ $z(t)$ — пуассоновский импульсный процесс. Каждый импульс представляет собой часть серии выбросов за уровень h , лежащую над этим уровнем. Он может состоять из сколь угодно большого числа меньших импульсов, так как в течение одной серии случайный процесс пересекает уровень, вообще говоря, бесконечное число раз [¹]. Началом каждого импульса является момент первого достижения соответствующим большим выбросом $x(t)$ уровня h . Форма импульса задается выражением (4). Теория пуассоновских процессов хорошо развита, и для вычисления статистических характеристик $z(t)$ можно воспользоваться готовыми формулами. Поскольку форма каждого импульса определяется винеровским процессом, для которого известна любая конечномерная плотность вероятности и даже вероятностный функционал, то кумулянтную функцию $z(t)$ любого порядка нетрудно выразить в квадратурах.

Здесь мы вычислим для примера простейшую статистическую характеристику $z(t)$ — его среднее значение, которое можно интерпретировать как среднее превышение уровня h большими выбросами. Используя формулу (10.5) из [²], получим

$$\langle z(t) \rangle = \lambda \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right\rangle,$$

где $f(t)$ — одиночный импульс. Без ограничения общности можно считать, что $f(t)$ начинается при $t=0$, и заменить нижний предел интегрирования нулем. Из (4) следует, что

$$f(t) = \langle [w(t) - a(h)t]\theta[w(t) - a(h)t] \rangle.$$

Проделав простые вычисления с использованием (5) и (10), получим $\langle z(t) \rangle = [D^2/4a^2(h)]W_{st}(h)$. Как и следовало ожидать, эта величина не зависит от времени и стремится к нулю с ростом h .

Справедливость данной формулы легко проверить, вычислив $\langle z \rangle$ совершенно другим способом. В самом деле, ведь

$$\langle z \rangle = \int_h^\infty (x - h) W_{st}(x) dx = \int_0^\infty y W_{st}(y + h) dy.$$

Используя явный вид выражения $W_{st}(x)$, легко показать, что для больших h под интегралом $W_{st}(y + h)$ можно заменить на $W_{st}(h) \times \exp[-2a(h)y/D]$. Условие применимости такой замены совпадает с (8). Выполнив интегрирование, убеждаемся, что асимптотики, полученные обоими способами, совпадают.

Совпадение этих асимптотик является еще одним подтверждением корректности аппроксимации серии выбросов выражением (4). Непосредственным вычислением нетрудно проверить более сильное утверждение, а именно: асимптотики $\langle z^n \rangle$ при $h \rightarrow \infty$, где n — натуральное число, вычисленные теми же двумя способами, полностью совпадают при любом n .

В заключение мы хотим выразить благодарность А. И. Саичеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- Стратонович Р. Л Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.
- Рытов С. М. Случайные процессы — М.: Наука, 1976.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
7 июля 1980 г.

LARGE EJECTIONS OF ONE-DIMENSIONAL MARKOV PROCESSES

A. L. Virovlyanskij, A. N. Malakhov

A detail description is made for statistics of sets of ejections outside the fixed level of one-dimensional stationar Markov process.