

УДК 538.56 : 519.25

## К СТАТИСТИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ ЦИФРОВЫХ ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

А. И. Саичев, Л. Г. Шепелевич

Проводится не ограниченный малостью фазовых флуктуаций анализ флуктуационных явлений в цифровом электронно-счетном частотомере при единственном условии — условии квазимонохроматичности опорного и исследуемого сигналов

В работе показано, что методика расчета статистики измерения временных интервалов существенно различна при естественных и технических флуктуациях фазы

1. В настоящее время измерение многих физических величин (расстояний, скоростей, температуры, давления) сводятся в конечном итоге к измерению частоты или периода гармонических колебаний, т. е. к частотно-временным измерениям.

Основным прибором для частотно-временных измерений сегодня служит цифровой электронно-счетный частотомер (ЦЭСЧ) [1, 2]. Принцип его действия состоит в подсчете электронным счетчиком числа импульсов, являющегося функцией измеряемой величины, за время счета.

Основными элементами ЦЭСЧ являются: 1 — устройство, формирующее счетные импульсы, 2 — устройство формирования времени счета, 3 — временной селектор и электронный счетчик — 4 (рис. 1). Формирующее устройство — 1 преобразует поступающий на его вход сигнал I в последовательность импульсов, периоды следования которых совпадают с интервалами между нулями входного сигнала. С выхода формирующего устройства импульсы поступают на временной селектор, который открывается на время счета, определяемое периодом (интервалом между нулями) сигнала II. Время счета может изменяться с помощью декадных делителей частоты.

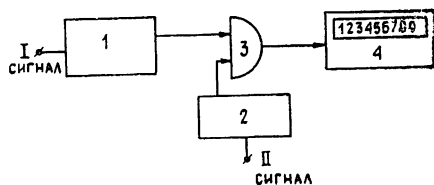


Рис. 1.

Число импульсов, поступающих через открытый селектор на счетчик, однозначно связано с набегом фазы сигнала I за время, определяемое сигналом II. Таким образом, показание частотомера можно выразить через фазу и период сигналов I и II соответственно:

$$N = \text{ent} \{ [\Phi_1(t + T_2) - \Phi_1(t)] / 2\pi \}, \quad (1)$$

где  $\Phi_1(t)$  — полная фаза сигнала I,  $T_2$  — интервал времени, равный целому числу периодов сигнала II,  $\text{ent}[x]$  — означает целую часть  $x$ .

Рассмотрим два основных режима работы ЦЭСЧ.

**Режим измерения частоты.** Исследуемое колебание поступает на вход формирователя — 1, где оно преобразуется в последовательность импульсов. Временной селектор открывается опорным сигналом на время счета, равное целому числу его периодов.

В предположении стабильности периода опорного сигнала выражение (1) переписывается в виде

$$N = \text{ent}[\Delta\Phi_x(\tau)/2\pi] = \text{ent}[F_x \tau], \quad (2)$$

где  $\Delta\Phi_x(\tau) = \Phi_x(t + \tau) - \Phi_x(t)$  — набег фазы измеряемого сигнала за время  $\tau = mT_0$ ,  $T_0$  — средний период опорного сигнала,  $m$  — коэффициент деления схемы формирования времени счета.

Обычно, опуская в (2) знак целой части  $\text{ent}$ , в качестве оценки измеряемой частоты принимают величину

$$\hat{F} = N/\tau = NF_0/m, \quad (3)$$

где  $F_0$  — номинальная частота опорного сигнала.

*Режим измерения периода.* Исследуемый сигнал через декадные делители частоты с общим коэффициентом  $m = 10^k$ ,  $k \leq 4$ , поступает на схему формирования времени счета, которая вырабатывает импульс длительностью в один ( $k = 0$ ) или  $m$  периодов этого сигнала, открывающий селектор. Импульсы, сформированные из сигнала опорной частоты, через селектор поступают на счетчик.

В пренебрежении флуктуациями частоты опорного сигнала показания ЦЭСЧ (1) запишутся следующим образом:

$$N = \text{ent}[\omega_0 \tau_x/2\pi] = \text{ent}[mT_x/T_0], \quad (4)$$

где  $\tau_x = mT_x$ ,  $T_x$  — измеряемый период,  $\omega_0$  — средняя частота опорного сигнала,  $m$  — коэффициент деления.

Тогда, опуская в (4) знак целой части  $\text{ent}$ , в качестве оценки измеряемого периода можно принять величину

$$\hat{T} = NT_0/m, \quad (5)$$

где  $T_0$  — средний период опорного сигнала.

2. Как известно, любое монохроматическое колебание является квазигармоническим, т. е. содержит составляющие амплитудной и фазовой (частотной) модуляции случайного характера, и может быть представлено в виде

$$v(t) = [V_0 + \varepsilon(t)] \cos \Phi(t), \quad (6)$$

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \theta(t),$$

где  $V_0$ ,  $\omega_0$  — средние значения амплитуды и частоты,  $\varepsilon(t)$  и  $\theta(t)$  — случайная амплитудная и фазовая модуляции. Обычно амплитудная модуляция сигналов реальных источников мала, так что в большинстве случаев ею можно пренебречь.

Из-за принципиально неустранимой случайной фазовой модуляции как опорного, так и исследуемого сигналов любые частотно-временные измерения носят статистический характер. Поскольку показания ЦЭСЧ есть случайная величина, важно знать ее вероятностное распределение, среднее значение, дисперсию и их зависимость от статистических характеристик измеряемых сигналов и режимов измерения.

Показания частотомера, как отмечалось выше, определяются двумя (опорным и исследуемым) сигналами вида (6), фазы которых обозначим  $\Phi_1(t)$ ,  $\Phi_2(t)$  и представим в виде

$$\Phi_1(t) = \omega_1 t + \theta_1(t), \quad \Phi_2(t) = \omega_2 t + \theta_2(t),$$

где  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  — средние частоты,  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  — флуктуации фаз рассматриваемых сигналов. Естественно считать фазовые флуктуации этих сигналов статистически взаимонезависимыми. Наша задача состоит в том, чтобы выразить статистику фазовых флуктуаций обоих сигналов.

Роль первого и второго сигналов в формировании показаний ЦЭСЧ различна: первый сигнал образует последовательность импульсов, поступающих на счетчик, а второй определяет длительность работы счетчика. Сразу же подчеркнем, что поэтому для определения статистики показаний прибора необходимо знать их принципиально различные статистические характеристики.

Решим поставленную задачу определения статистики показаний ЦЭСЧ (1) поэтапно. Первоначально найдем статистику  $N$  при условии, что время работы счетчика  $\tau$  известно, а затем, пользуясь статистической независимостью, усредним полученные условные статистические характеристики, определяемые первым сигналом, по статистике  $\tau$ , определяемой вторым сигналом.

Очевидно, что если интервал времени  $\tau$  фиксирован, то статистика  $N$  определяется вероятностным распределением приращения фазы первого сигнала за это время  $W(\varphi; \tau) = \langle \delta(\varphi - \omega_1 \tau - \Delta\theta_1(\tau)) \rangle$ . Тогда вероятность того, что показание ЦЭСЧ (1) при фиксированном  $\tau$  равно  $N$ , есть

$$P(N; \tau) = \int_{2\pi N}^{2\pi(N+1)} W(\varphi; \tau) d\varphi. \quad (7)$$

Пусть  $\theta_1(t)$  — гауссов случайный процесс с известной структурной функцией  $D(\tau) = \langle [\theta_1(t + \tau) - \theta_1(t)]^2 \rangle$ . Тогда

$$W(\varphi; \tau) = [1 / \sqrt{2\pi D(\tau)}] \exp [-(\varphi - \omega_1 \tau)^2 / 2D(\tau)]. \quad (8)$$

Выясним теперь, чем определяется статистика  $\tau$ . Для этого вспомним, что  $\tau$  равно длительности временного интервала, за который фаза второго сигнала получит приращение  $\psi$ :  $\Phi_2(t + \tau) - \Phi_2(t) = \psi = 2\pi m$ ,  $m$  — заданное целое число. Отсюда видно, что определение вероятностного распределения  $\tau$ , обозначим его  $Q(\tau; \psi)$ , по известной статистике  $\theta_2(t)$  в общем случае несравненно более сложно, нежели задача нахождения приведенного выше распределения  $W(\varphi; \tau)$ . В результате  $Q(\tau; \psi)$  удается найти только в ряде частных случаев, которые мы рассмотрим ниже. Пока же отметим, что если это распределение известно, то безусловная вероятность показаний ЦЭСЧ равна

$$P(N) = \int_0^{\infty} d\tau \int_{2\pi N}^{2\pi(N+1)} d\varphi W(\varphi; \tau) Q(\tau; \psi). \quad (9)$$

Приведем теперь несколько частных случаев этой формулы для разных режимов работы частотомера.

*Режим измерения частоты.* В этом случае второй (опорный) сигнал считается идеально стабильным с заданной частотой  $\omega_0$ , следовательно, из (9) имеем

$$P(N) = \int_{2\pi N}^{2\pi(N+1)} W(\varphi; mT_0) d\varphi, \quad (10)$$

где  $mT_0 = 2\pi m / \omega_0$ .

Если средний набег фазы исследуемого сигнала за время измерения много больше  $2\pi$ , т. е.  $D(mT_0) \gg 4\pi^2$ , то можно приближенно полагать показания счетчика непрерывными с плотностью вероятности

$$\omega(N) = 2\pi W(2\pi N; mT_0). \quad (10a)$$

*Режим измерения периода.* В этом случае идеально стабильным (опорным) считается первый сигнал, тогда из (9) получим

$$P(N) = \int_{NT_0}^{(N+1)T_0} Q(\tau; 2\pi m) d\tau. \quad (11)$$

Если средний период опорного сигнала много меньше стандарта отклонений измеряемого интервала времени, то можно пользоваться непрерывным дифференциальным распределением показаний счетчика, равным

$$\omega(N) = T_0 Q(NT_0; 2\pi m). \quad (11a)$$

Отметим, что принятая здесь гармоническая аппроксимация опорного сигнала является сильной идеализацией. Очевидно, более реально предположить, что для первого сигнала выполняется условие  $D_\tau(\langle \tau \rangle) \sigma_\tau \ll 1$ , означающее малость флуктуаций его фазы на временах порядка стандарта отклонения периода исследуемого сигнала. Тогда из (9) получим более общее, чем (10) и (11), выражение для плотности вероятности показаний счетчика

$$P(N) = \sqrt{2\pi/D(\langle \tau \rangle)} \int_N^{N+1} dn \int_0^\infty d\tau Q(\tau; \psi) \exp[-2\pi^2(n - F_0\tau)^2/D(\langle \tau \rangle)], \quad (12)$$

сверткой двух распределений.

3. Теперь перейдем к анализу статистики временного интервала. Пусть за рассматриваемый промежуток времени  $\tau$  фаза квазимонохроматического сигнала изменилась на  $\psi$ . Этот набег фазы складывается из детерминированного набега  $\omega_2\tau$  и случайного  $\Delta\theta_2(\tau)$ :

$$\Phi_2(t + \tau) - \Phi_2(t) = \omega_2\tau + \Delta\theta_2(\tau) = \psi. \quad (13)$$

Введем нормированные величины  $y = \omega_2\tau$  и  $\varphi(y) = \Delta\theta_2(y/\omega_2)$ . Тогда уравнение (13) переписется в виде

$$\psi = y + \varphi(y). \quad (13a)$$

Его корнями являются искомые длительности временных интервалов, за которые фаза изменилась на  $\psi$ . Вследствие случайности функции  $\varphi(y)$ , решение уравнения (13a) также случайно и, вообще говоря, не единственно. Однако, условие квазимонохроматичности рассматриваемых сигналов позволяет пренебречь существованием более чем одного корня этого уравнения. Это предположение единственности корня при любых  $\psi$ , как будет видно ниже, существенно упрощает анализ статистики интервалов времени.

Уравнение (13a) можно записать также следующим образом:

$$x(y) = \psi, \quad (13b)$$

и, следовательно, рассматривать нашу задачу как задачу о статистике моментов пересечения заданного уровня  $\psi$  случайным процессом  $x(y) = y + \varphi(y)$  [3, 4]. Эта задача может быть решена только в нескольких частных случаях, которые мы и рассмотрим ниже.

Если фазовые флуктуации  $\theta_2(t)$  являются марковским процессом, то для плотности вероятности времени первого достижения заданного уровня  $\psi$  можно записать уравнение Эйнштейна — Фоккера — Планка. Это уравнение практически всегда позволяет вычислить первый и второй моменты  $\tau$ . В случае же, если  $\theta_2(t)$  — винеровский процесс (флуктуации частоты — белый шум), то известно [4] точное выражение для плотности вероятности  $Q(\tau; \psi)$ .

Плотность вероятности времени первого достижения марковским процессом  $\varphi(\tau)$  заданного уровня  $\psi$  определяется следующим образом:

$$Q(\tau; \psi) = (-\partial/\partial\tau) \int_{-\infty}^{\psi} W(\varphi, \tau|0) d\varphi, \quad (14)$$

где  $W(\varphi, \tau|0)$  — условная плотность вероятности процесса  $\psi(\tau)$  с начальным условием  $\varphi(0) = 0$  и граничным условием  $W(\psi, \tau|0) = 0$ . Нетрудно показать, что она равна

$$W(\varphi, \tau|0) = (1/\sqrt{2\pi D\tau}) \exp [-(\varphi - \omega_2\tau)^2/2D\tau] \{1 - \exp [-2\psi(\psi - \varphi)/D\tau]\}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14), получим выражение для плотности вероятности времени первого достижения фазой приращения  $\psi$

$$Q(\tau; \psi) = (\psi/\sqrt{2\pi D}) \tau^{-3/2} \exp [-(\psi - \omega_2\tau)^2/2D\tau], \quad (16)$$

где  $D$  — спектральная интенсивность частотных флуктуаций,  $\omega_2$  — средняя частота.

Используя выражение (16), нетрудно получить среднее значение и дисперсию интервала времени, за который фаза получит приращение  $\psi = 2\pi m$ . Это легко сделать, если вспомнить связь между преобразованием Лапласа и моментами любого вероятностного распределения. Можно показать, что преобразование Лапласа плотности вероятности (16) равно

$$\Theta(s; \psi) = \exp [-\psi\gamma(s)], \quad (17)$$

где  $\gamma(s) = (\sqrt{\omega_2^2 + sD} - \omega_2)/D$ .

Тогда  $n$ -й момент распределения (16) определится следующим образом:

$$\langle \tau^n \rangle = (-1)^n (d^n \Theta/ds^n) |_{s=0}.$$

В частности, среднее значение и дисперсия интервала времени, за который набег фазы составит  $\psi = 2\pi m$ , равны

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle &= \psi/\omega_2 = mT_2, \\ \sigma_\tau^2 &= D\psi/\omega_2^3 = D\langle \tau \rangle/\omega_2^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Для дальнейшего анализа распределение (16) удобно записать в форме распределения Вальда [5]

$$Q(y; \alpha) = \sqrt{\alpha/2\pi} y^{-3/2} \exp [-(\alpha/2)(y + y^{-1} - 2)], \quad (16a)$$

где  $y = \tau/\langle \tau \rangle$  — приведенное время, а параметр  $\alpha = \psi^2/D\langle \tau \rangle$ .

Подставляя это выражение в (11), находим плотность вероятности показаний счетчика в режиме измерения периода

$$P(N) = \langle \tau \rangle \int_{NT_0/(\tau)}^{(N+1)T_0/(\tau)} Q(y; \alpha) dy. \quad (19)$$

При достаточно больших значениях параметра  $\alpha$  случайная величина показаний ЦЭСЧ имеет гауссово распределение со средним  $\langle N \rangle = \langle \tau \rangle/T_0$  и дисперсией  $\sigma_N^2 = \alpha^{-1}$ . Следовательно, если флуктуа-

ции частоты исследуемого сигнала имеют характер белого шума, то оценка интервала времени, согласно формуле (5), оказывается несмещенной и состоятельной при  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Обычно [1, 2], при измерениях временного интервала с помощью ЦЭСЧ погрешностями, по которым оценивается точность измерения, считаются: во-первых, погрешность дискретизации, связанная с неkratностью измеряемого периода и времени счета; во-вторых, погрешность, обусловленная флуктуациями времени счета. Последняя оценивается по величине шумового сигнала на входе устройства формирования 2 (рис. 1).

На основании соотношений (18) может быть получена относительная погрешность измерения (точность), вызванная флуктуациями фазы исследуемого сигнала:

$$\gamma = (\sigma_N / \langle N \rangle) = \delta (T_0 / mT_x), \quad (18a)$$

где  $\delta = \sqrt{D/mT_x}/\omega_x$  — относительная кратковременная нестабильность частоты измеряемого сигнала за время  $\tau = mT_x$  [6],  $T_0$  — период следования временных меток,  $m$  — коэффициент умножения периода,  $T_x$  — измеряемый период. Так, например, при  $\delta = 10^{-5}$ ,  $T_x = 1$  с,  $t_0 = 10^{-3}$  с,  $m = 1$  измерения интервала времени 1 с возможна с точностью  $\gamma \geq 10^{-8}$ .

Выше мы определили статистику временного интервала в предположении, что фазовые флуктуации измеряемого сигнала представляют собой марковский процесс. Эта модель хорошо описывает фазовые флуктуации сигналов реальных источников, обусловленные естественными шумами. Однако для технических флуктуаций фазы эта идеализация недифференцируемым процессом неприменима. Поэтому рассмотрим еще один метод определения статистики  $\tau$ , полагая, что  $\theta_2(t)$  — дифференцируемый процесс.

Если фазовые флуктуации представляют собой дифференцируемый случайный процесс, то можно определить среднее число пересечений  $\Lambda(\tau; \psi)$  данного уровня  $\psi$  к моменту времени  $\tau$ . В предположении квазигармоничности исследуемого сигнала (6), а следовательно, единственности решения уравнения (13),  $\Lambda(\tau; \psi) = Q(\tau; \psi)$ , т. е. совпадает с вероятностным распределением временного интервала  $\tau$ .

Выражение для среднего числа пересечений, в указанном выше предположении, нетрудно получить:

$$\Lambda(\tau; \psi) = \left\langle \int_0^\tau \Delta \theta_2 \delta[\psi - \Delta \theta_2(t)] dt \right\rangle = \quad (20)$$

$$= Q(\tau; \psi) = - \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^\psi W(\varphi; t) d\varphi \right) \Big|_{t=\tau},$$

где  $W(\varphi, t)$  — вероятностное распределение фазового набега  $\Delta \theta_2(t)$ .

Если принять, что фаза  $\theta_2(t)$  — гауссов случайный процесс со структурной функцией  $D(\tau)$ , тогда  $W(\varphi, t)$  определяется выражением (8). Подставляя его в (20), находим вероятностное распределение интервала времени, за которое фаза получит приращение  $\psi$

$$Q(\tau; \psi) = - (\partial/\partial \tau) P(\tau; \psi), \quad (21)$$

$$P(\tau; \psi) = (1/2) \{ 1 + \operatorname{erf} [(\psi - \omega_2 \tau) / \sqrt{2D(\tau)}] \},$$

окончательно имеем

$$Q(\tau; \psi) = \{ \omega_2 [2D(\tau) - \tau D'(\tau)] + \psi D'(\tau) \} \times \quad (21a)$$

$$\times [ \sqrt{8\pi D^3(\tau)} ]^{-1} \exp [ - (\psi - \omega_2 \tau)^2 / 2D(\tau) ].$$

В частности, при  $D(\tau) = D\tau$  формула (21а) дает

$$Q(\tau; \psi) = [(\psi + \omega_2\tau) / \sqrt{8\pi D\tau^3}] \exp[-(\psi - \omega_2\tau)^2 / 2D\tau]. \quad (22)$$

Заметим, что плотность вероятности (22) отличается от распределения (16), хотя формально они и получены для фазовых флуктуаций, с одинаковыми структурными функциями  $D(\tau) = D\tau$ . Этот результат не содержит противоречия, так как формулы (16) и (22) найдены при разных предположениях о временном поведении флуктуаций фазы. А именно, при выводе плотности вероятности (16) флуктуации частоты считались белым шумом, а распределение (22) справедливо для плавных (дифференцируемых) флуктуаций фазы. Отметим, что плавность флуктуаций фазы и принятая в (22) линейная аппроксимация структурной функции не противоречат друг другу, поскольку плавность фазы приводит, при стационарных флуктуациях частоты, к отличию от этого закона лишь на временах, меньших времени корреляции частотных флуктуаций. Подчеркнем, что выражения (16) и (22) обладают всеми свойствами распределений вероятности и, в частности, удовлетворяют условию нормировки.

В отличие от случая «белых» флуктуаций частоты (16) среднее значение временного интервала, вычисленное по формуле (22), равно

$$\langle \tau \rangle = (\psi / \omega_2) + (D / 2\omega_2^2) \quad (23)$$

и отличается от значения  $\langle \tau \rangle = \psi / \omega_2$ , соответствующего гармоническому сигналу, когда флуктуации фазы отсутствуют. Данное различие связано с несимметричным влиянием флуктуаций частоты (фазы) на статистику временных интервалов. Эта асимметрия особенно наглядно видна в случае квазистатических флуктуаций фазы, когда  $\varphi(\tau) = \nu\tau$ , где  $\nu$  — случайная величина с симметричным распределением  $\langle \nu \rangle = 0$ . При этом

$$\langle \tau \rangle = \langle \psi / (\omega_2 + \nu) \rangle = (\psi / \omega_2) [1 + (\sigma_\nu^2 / \omega_2^2)]. \quad (24)$$

Авторы благодарны А. Н. Малахову за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аппаратура для частотных и временных измерений. — М.: Сов. радио, 1971.
2. Ермолаев Р. С. Цифровые частотомеры. — М.: Энергия, 1973.
3. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. — М.: Наука, 1970.
4. Теория связи. — М.: Связь, 1972.
5. Крапивин В. Ф. Таблицы распределения Вальда. — М.: Наука, 1965.
6. Музычук О. В., Шепелевич Л. Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, 17, № 6, с. 855.

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
15 июля 1980 г.,  
после доработки  
5 марта 1981 г.

#### TO THE STATISTICAL DESCRIPTION OF DIGITAL FREQUENCY-TIME MEASUREMENTS

*A. I. Saichev, L. G. Shepelevich*

By unlimited smallness of phase fluctuations an analysis of fluctuation phenomena is made in a digital electronfrequency meter with quasimonochromaticity of the reference and investigated signals. It is shown in the paper that the method of calculation of time interval statistic measurement differs essentially at natural and technical phase fluctuations.