ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 10 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 538.56 : 519.25

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕГАУССОВЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Г. Н. Бочков, А. А. Дубков

Изучаются особенности явления стохастической неустойчивости в линейных системах с негауссовыми параметрическими возмущениями. Показана возможность возникновения в таких системах взрывной моментной стохастической неустойчивости, когда моменты системы неограниченно нарастают за конечное время.

1. Как известно, в линейных системах со случайным параметрическим возбуждением при определенных условиях может возникать стохастическая неустойчивость. Исследованию данного явления посвящена обширная литература (см., например, библиографию в [1–3]); изучались различные аспекты стохастической устойчивости: устойчивость по моментам (в среднем, в среднеквадратичном и т. д.) и по вероятности («почти наверное»).

В то же время в литературе до сих пор рассматривались в основном линейные системы с гауссовыми флуктуациями параметров, и речь шла об асимптотической стохастической неустойчивости или о неограниченности движения стохастической системы при $t \to \infty$. В настоящей работе обращается внимание на особенности возникновения и развития стохастической неустойчивости в линейных системах с негауссовыми флуктуациями параметров.

2. Рассмотрим наиболее простую параметрическую систему, описываемую однородным линейным дифференциальным уравнением

$$(dx/dt) + [a_0 + \xi(t)]x = 0, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — произвольно распределенный стационарный случайный процесс с $\langle \xi \rangle = 0$, и проанализируем поведение ее моментов $\langle x^n(t) \rangle$ $(n = \overline{1, \infty})$ при $t \to \infty$. Запишем решение уравнения (1) в явном виде:

$$x(t) = x_0 \exp[-a_0 t - \int_0^t \xi(u) du]. \tag{2}$$

Тогда для n-го момента будем иметь

$$\langle x^n(t) \rangle = x_0^n \exp(-na_0 t) \langle \exp[-2\pi n C_{t/2}(i0)] \rangle. \tag{3}$$

Здесь проведено усреднение и замена под интегралом $\xi(u)$ на $\xi(u - t/2)$ с учетом стационарности случайного процесса $\xi(t)$; $C_T(i\omega) = (1/2\pi) \int_{-T}^{T} \xi(u) \exp(-i\omega u) du$ — комплексные спектральные компоненты процесса $\xi(t)$, рассматриваемого на конечном интервале времени $[-T, T]$. Как видно из (3), в асимптотике $(t \to \infty)$ эффективное влияние на средние характеристики системы (1) оказывают предельно медленные спектральные составляющие флуктуирующего параметра $\xi(t)$, дающие наибольший вклад в процесс накопления возмущений (см. (2)).

Представляя входящее в (3) среднее через кумулянты $\langle C_{t/2}^{[k]}(i0)\rangle \equiv \equiv \underbrace{\langle C_{t/2}(i0), \ldots, C_{t/2}(i0)\rangle}_{k}$ случайной переменной $C_{t/2}(i0)$, придем к

$$\langle x^n(t)\rangle = x_0^n e^{-na_0 t} \exp\left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-2\pi n)^k}{k!} \langle C_{t/2}^{[k]}(i0)\rangle\right]. \qquad (4)$$

Для определения асимптотического поведения $\langle x^n(t)\rangle$ воспользуемся формулой связи компонент $C_T(i\omega)$ с полиспектрами (многомерными изображениями по Фурье кумулянтных функций) $S_k(\omega_2, \ldots, \omega_k)$ $(k=\overline{2, \infty})$ исходного негауссова случайного процесса $\xi(t)$ (см. формулу (10) в [4]):

$$S_k(\omega_2, \ldots, \omega_k) = \lim_{T\to\infty} (\pi/T) \left\langle C_T(i\omega_2), \ldots, C_T(i\omega_k), \quad C_T^*\left(i\sum_{l=2}^{k}\omega_l\right)\right\rangle,$$

из которой следует, что при* $t\to\infty$

$$\langle C_{t/2}^{[k]}(i0)\rangle = (t/2\pi)\, S_k(0, \ldots, 0) + o(1).$$

Подставляя выражение для $\langle C_{t/2}^{[k]}(i0)\rangle$ в (4), находим, что в асимптотике

$$\langle x^n(t)\rangle \sim \exp[(\lambda_n - na_0)t], \qquad (5)$$

где

$$\lambda_n = (1/2\pi) \sum_{k=2}^{\infty} [(-2\pi n)^k/k!]\; S_k(0, \ldots, 0). \qquad (6)$$

3. В соответствии с (5), (6) условие асимптотической устойчивости системы (1) по n-му моменту имеет вид

$$\sum_{k=2}^{\infty} [(-1)^k (2\pi n)^{k-1}/k!]\; S_k(0, \ldots, 0) \leqslant a_0. \qquad (7)$$

В частном случае гауссова процесса $\xi(t)$, когда все $S_k(\omega_2, \ldots, \omega_k) = 0$, начиная с $k=3$, из (7) вытекает известный результат

$$\pi n S(0) \leqslant a_0 \qquad (8)$$

($S(\omega)$ — спектральная плотность мощности флуктуирующего параметра).

Как известно, причиной моментной стохастической неустойчивости системы (1) при гауссовых флуктуациях $\xi(t)$ являются предельно медленные блуждания параметра $\xi(t)$ в области отрицательности коэффициента затухания: $\xi(t) \leqslant -a_0$, мерой которых и служит величина $S(0)$ (см. (8)). Подобное объяснение наблюдаемому эффекту можно дать и в случае произвольно распределенных флуктуаций $\xi(t)$. При этом, однако, в поведении рассматриваемой системы может проявиться интересная особенность, на которую нам бы и хотелось обратить внимание.

Как видно из (6), статистический инкремент λ_n является суммой бесконечного ряда с положительным первым слагаемым $(S(0) \geqslant 0)$ и слагаемыми произвольного знака, убывающими по абсолютной величине с ростом номера k. В частности, может возникать ситуация, когда

---

* Условие $t\to\infty$ следует понимать здесь в смысле $t \gg \tau^0$, где τ^0 — максимальный масштаб протяженности статистических связей процесса $\xi(t)$. В случае гауссовости $\xi(t)$: $\tau^0 = \tau_{\text{кор}}$.

указанный ряд расходится, и $\lambda_n = +\infty$. Последнее означает, что либо n-й момент решения уравнения (1) растет при $t \to \infty$ быстрее, чем $\exp(\beta t)$ $(\beta > 0)$, либо он вообще обращается в бесконечность за конечное время. Второй тип неустойчивости может быть назван взрывной стохастической неустойчивостью по формальной аналогии со взрывной динамической неустойчивостью (см., например, [5]).

4. Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах. Рассмотрим стохастическую параметрическую систему вида

$$(dx/dt) + [a_0 + \langle \eta^2 \rangle - \eta^2(t)]x = 0, \quad x(0) = x_0, \tag{9}$$

где $\eta(t)$ — гауссов стационарный случайный процесс с $\langle\eta\rangle = 0$ и спектральной плотностью мощности $S_\eta(\omega)$. Согласно (1), (9), в данном случае $\xi(t) = -[\eta^2(t) - \langle \eta^2 \rangle]$ Для подсчета статистического инкремента λ_n целесообразно воспользоваться приведенными в [6] формулами для полиспектров $S_k^{\eta^2}(\omega_2, \ldots, \omega_k)$ квадрата гауссова процесса. Полагая в них $\omega_2 = \ldots = \omega_k = 0$, находим

$$S_k(0, \ldots, 0) = (-1)^k S_k^{\eta^2}(0, \ldots, 0) = (-1)^k (2k-2)!! \int_{-\infty}^{+\infty} S_\eta^k(\omega)\, d\omega.$$

Подставляя выражение для $S_k(0, \ldots, 0)$ в (6) и проводя суммирование, определяем асимптотический инкремент для n-го момента системы (9):

$$\lambda_n = -(1/4\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \ln[1 - 4\pi n S_\eta(\omega)]\, d\omega - n \langle \eta^2 \rangle. \tag{10}$$

В соответствии с (10), $\lambda_n > 0$ для всех n, и, следовательно, флуктуации параметра в системе (9) всегда ведут к стохастической неустойчивости. При этом в случае

$$4\pi n \max_\omega S_\eta(\omega) > 1$$

показатель λ_n обращается в бесконечность. В частности, для низкочастотного процесса $\eta(t)$ с резонансной формой спектра

$$S_\eta(\omega) = \langle\eta^2\rangle \Pi/\pi(\omega^2 + \Pi^2) \tag{11}$$

из (10) находим

$$\lambda_n = \left\{ \begin{array}{lr} (\Pi/4)\left[1 - \sqrt{1 - (4n\langle\eta^2\rangle/\Pi)}\right]^2 & (4n\langle\eta^2\rangle/\Pi \leqslant 1) \\ \infty & (4n\langle\eta^2\rangle/\Pi > 1) \end{array} \right| . \tag{12}$$

В соответствии с (5), (12) при $4n\langle\eta^2\rangle/\Pi \leqslant 1$ система (9) может быть асимптотически устойчивой по n-му моменту, если

$$(\Pi/4n)\left[1 - \sqrt{1 - (4n\langle \eta^2 \rangle/\Pi)}\right]^2 \leqslant a_0,$$

в случае же $4n\langle\eta^2\rangle/\Pi > 1$ она заведомо неустойчива.

5. Выясним поведение моментов решения уравнения (9) при любых t:

$$\langle x^n(t)\rangle = x_0^n \exp[-n(a_0 + \langle\eta^2\rangle)t] \left\langle \exp\left[n \int_0^t \eta^2(u)\, du\right]\right\rangle. \tag{13}$$

Поскольку гауссов процесс $\eta(t)$ со спектром вида (11) является марковским, входящее в (13) среднее легко вычисляется с помощью аппарата уравнений Эйнштейна — Фоккера — Планка (см. [7]). Опираясь на полученные в [7] результаты, находим

$$G_n(\tau) = \sqrt{\operatorname{sh} 2\alpha / \operatorname{sh}(z_n\tau + 2\alpha)}\, \exp\left[-(na_0/\Pi)\tau + \left(1 + z_n^2\right)\tau/4\right], \tag{14}$$

где $G_n(\tau) \equiv \langle x^n(\tau/\Pi)\rangle / x_0^n$, $\tau = \Pi t = t/\tau^{\eta}_{\text{кор}}$, $z_n = \sqrt{1 - (4n\langle\eta^2\rangle/\Pi)}$, $\operatorname{th}\alpha = z_n$.

Из точного решения (14) следует, что при $4n\langle\eta^2\rangle/\Pi \leqslant 1$ моменты системы (9) существуют при любых t и нарастают при $t \to \infty$ по экспоненциальному закону с инкрементом λ_n, совпадающим с ранее найденным (см. (12)). В случае же $4n\langle\eta^2\rangle/\Pi > 1$ моменты существуют лишь на конечном интервале времени $\left[0, \tau_n^0\right]$:

$$G_n(\tau) = \sqrt{\sin 2\beta / \sin(|z_n|\tau + 2\beta)}\, \exp\left[-(na_0/\Pi)\tau + (1 - |z_n|^2)\tau/4\right]$$

$$\left(|z_n| = \sqrt{(4n\langle\eta^2\rangle/\Pi) - 1},\quad \operatorname{tg}\beta = |z_n|\right),$$

обращаясь в бесконечность за конечное время $\left(\text{расходимость типа } 1\Big/\sqrt{\tau_n^0 - \tau}\right)$

$$\tau_n^0 \equiv \Pi t_n^0 = 2 \operatorname{arcctg} |z_n| / |z_n|. \tag{15}$$

Таким образом, в рассматриваемой системе (9) имеет место взрывная стохастическая неустойчивость.

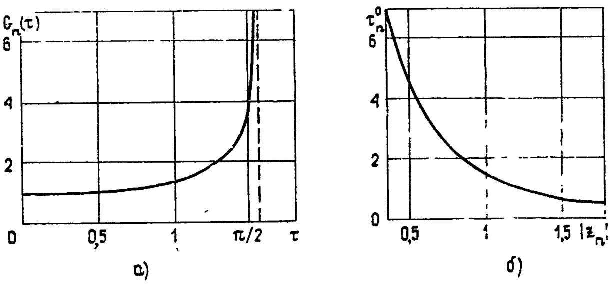

Рис. 1.

На рис. 1а показано поведение нормированного статистического момента $G_n(\tau)$ системы (9) при $4n\langle\eta^2\rangle/\Pi = 2$ ($|z_n| = 1$) и $a_0 = 0$, а на рис. 1б представлена зависимость (15) интервала устойчивости τ_n^0 n-го момента от $|z_n|$. Как видно из рис. 1б, с увеличением порядка момента (увеличением $|z_n|$) интервал его устойчивости уменьшается.

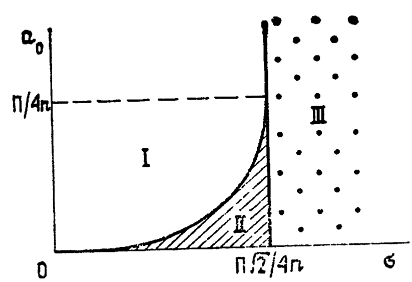

Рис. 2.

На рис. 2 проведено разбиение плоскости — постоянная времени невозмущенной системы a_0, стандарт флуктуаций параметра $\sigma = \sqrt{2}\langle\eta^2\rangle$ — на области стохастической устойчивости (I), асимптотической неустойчивости (II) и взрывной стохастической неустойчивости (III) по n-му моменту. Согласно рис. 2, путем увеличения мощности параметрического возбуждения систему (9) с достаточно большим временем релаксации $\tau_{\text{рел}} \equiv 1/a_0 > 4n\,\tau^{\eta}_{\text{кор}}$ можно перевести из области устойчивости в область взрывной неустойчивости только через область асимптотической неустойчивости, в то время как при $\tau_{рел} < 4n\,\tau_{кор}^{\eta}$ возможен переход из области устойчивости непосредственно в область взрывной стохастической неустойчивости.

6. Обратимся ко второму примеру — шаговой модели случайного параметра, в которой процесс скачком меняет свои значения на статистически независимые через фиксированный промежуток времени (такт) T_0 (см. [4]). В соответствии с [4] указанный негауссов процесс всегда имеет предельно медленные спектральные компоненты

$$S_k(0, \ldots, 0) = \varkappa_k (T_0/2\pi)^{k-1}, \tag{16}$$

где $\varkappa_k (k = \overline{2, \infty})$ — кумулянты одномоментного распределения $W(\xi)$. Подставляя (16) в (6), вычисляем статистический инкремент λ_n для n-го момента системы (1):

$$\lambda_n = (1/T_0) \ln \langle \exp(-nT_0\xi) \rangle. \tag{17}$$

Из формулы (17) видно, что λ_n обращается в бесконечность в том случае, когда вероятностное распределение $W(\xi)$ флуктуирующего параметра $\xi(t)$, в спектре которого присутствуют предельно медленные составляющие $(S_k(0, \ldots, 0) \neq 0)$, имеет неограниченную протяженность в области «отрицательного затухания» и спадает при $\xi \to -\infty$ как $\exp(\gamma\xi)$ $(\gamma > 0)$* или медленнее. Это и есть условие возникновения в данном случае взрывной (моментной) стохастической неустойчивости.

Рассмотренный взрывной механизм эволюции стохастической модели (1), связанный с определенными спектрально-вероятностными свойствами случайного параметра, может адекватно отражать некоторый начальный этап развития возмущений в физических системах, находящихся вблизи порога неустойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров — М: Наука, 1969
2. Бочков Г. Н. Диссертация. Горький, 1973
3. Кузовлев Ю. Е., Бочков Г. Н — Изв вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 10, с. 1505.
4. Дубков А. А, Малахов А. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 1, с. 81.
5. Кадомцев Б Б. Коллективные явления в плазме — М.: Наука, 1976.
6. Ширяев А. Н — Теория вероятностей и ее применения, 1960, 5, № 3, с 293
7. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления. — М.: Мир, 1974.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
8 августа 1980 г

STOCHASTIC INSTABILITY OF NONGAUSSIAN PARAMETRIC SYSTEMS

G. N. Bochkov, A. A Dubkov

Peculiarities of stochastic instability is studied in linear systems with nongaussian parametric disturbances. A possibility is shown of occurrence of a burst moment stochastic instability in such systems when moments of the systems increase infinitely for finite time.

* Такой же характер изменения при $\xi \to -\infty$ имеет плотность вероятности параметрического возмущения в системе (9).