ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIV, № 10 РАДИОФИЗИКА 1981

УДК 533 351.8

ВОЗБУЖДЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ ВОЛН ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДА ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА НА ИОННО-ЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАЗМЕННОГО ВОЛНОВОДА

В. А. Балакирев, А. П. Толстолужский

Исследуется возбуждение электромагнитного излучения, в основе которого лежит процесс индуцированного рассеяния волн плотности заряда электронного пучка на ионно-звуковой волне плазменного волновода. Показано, что возбуждение излучения приводит к взрывному росту амплитуд взаимодействующих колебаний.

1. Известно, что в системе плазма — электронный пучок могут развиваться взрывные неустойчивости. Для целей генерации электромагнитного излучения особый интерес представляют нелинейные неустойчивости с участием поперечных электромагнитных волн, которые могут излучаться из плазмы. Ряд таких неустойчивостей исследован ранее в работах [1–5]. При этом обычно использовалась модель безграничной системы плазма — пучок.

В данной работе рассматривается неустойчивость в открытом плазменно-пучковом волноводе*, возникающая в результате нелинейного взаимодействия волн плотности заряда пучка и ионно-звуковой волны плазмы. Возбудив в плазме регулярную ионно-звуковую волну, мы, тем самым, создадим в плазменном волноводе периодическую неоднородность плотности (дифракционную решетку). Сгустки электронов, которые формируются волнами плотности заряда, пересекая такую решетку, будут возбуждать электромагнитное излучение в виде расходящихся волн [6]. Потери энергии на излучение приведут к нарастанию медленной пучковой волны, энергия которой, как известно, отрицательна. В то же время высокочастотные (ВЧ) волны, оказывая посредством силы ВЧ давления обратное влияние на плазму, будут усиливать глубину модуляции плотности плазмы. Ниже мы покажем, что такой процесс приводит к неустойчивости взрывного характера.

2. Рассмотрим однородный плазменный цилиндр радиуса a с холодными ионами и горячими электронами ($T_e \gg T_i$). Пусть вдоль цилиндра движется моноэнергетический трубчатый пучок электронов. Для простоты будем считать его бесконечно тонким, пренебрегая, таким образом, толщиной пучка. Кроме этого примем, что радиус пучка совпадает с радиусом плазмы. Система помещена во внешнее магнитное поле, силовые линии которого параллельны оси волновода. Электроны пучка и плазмы будем считать замагниченными (движение одномерно), а влиянием магнитного поля на движение ионов будем пренебрегать.

Пусть в волноводе возбуждена ионно-звуковая волна с частотой ω_s и продольным волновым числом k_s, которая распространяется в направлении пучка. Пусть также на пучок подается ВЧ сигнал на частоте ω_e,

* Волновод без проводящего кожуха.

превышающей электронную плазменную частоту ω_{pe}. В диапазоне частот $\omega > \omega_{pe}$ в линейном приближении пучок устойчив, поскольку в указанном диапазоне отсутствуют медленные волны плазменного волновода. Укажем, что возбуждение излучения при рассеянии усиливаемой электронным пучком собственной волны плазменного волновода на ионно-звуковой волне исследовано в работе [7].

Ниже мы рассмотрим случай стационарной инжекции пучка, соответствующий пространственному усилению колебаний.

Рассеяние ВЧ поля на НЧ возмущении плотности плазмы δn описывается следующим уравнением [8]:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega\right)^2 (\Delta_\perp + \Box_\parallel) + \omega_{pe}^2 \Box_\parallel\right] \mathscr{E}_p = -\,\omega_{pe}^2 \Box_\parallel \frac{\delta n}{n_0} \mathscr{E}_p. \qquad (1)$$

Здесь $\mathscr{E}_p$ — медленно меняющаяся со временем огибающая продольной компоненты электрического поля в плазме,

$$E_{zp} = (1/2)\,[\mathscr{E}_p(r, z, t)\, e^{-i\omega t} + \text{к.с.}],$$

$$\Box_\parallel = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega\right)^2, \quad \Delta_\perp = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}, \quad \omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m},$$

n_0 — равновесная плотность плазмы.

Действие силы ВЧ давления будет приводить к перераспределению плотности плазмы. Уравнение, описывающее этот процесс, имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta n - c_s^2 \Delta\delta n = \frac{1}{16\pi}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 M}\Delta\,|\mathscr{E}_p|^2, \qquad (2)$$

M — масса ионов, $c_s = \sqrt{T_e/M}$. Вариация плотности плазмы δn связана с НЧ потенциалом в плазме соотношением

$$\frac{\delta n}{n_0} = \frac{e\Phi_p}{T_e} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\frac{|\mathscr{E}_p|^2}{16\pi n_0 T_e}. \qquad (3)$$

В вакууме (индекс «v») огибающая ВЧ поля обязана удовлетворять уравнению

$$(\Box_\parallel + \Delta_\perp)\,\mathscr{E}_v = 0, \qquad (4)$$

а НЧ потенциал Φ_v — уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi_v = 0. \qquad (5)$$

Связь между полями в плазме и вакууме осуществляется граничными условиями на поверхности волновода

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{E}_p - \mathscr{E}_v = 0, \quad \mathscr{E}'_p - \mathscr{E}'_v = \frac{1}{a}\int_{a-0}^{a+0} F_b r\,dr \qquad (6)\\ &\Phi_p - \Phi_v = 0, \quad \omega_{pi}^2 \Phi'_p - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi'_v = 0 \qquad (7)\end{aligned}\right\} r = a;$$

$$F_b = 4\omega\int_0^{2\pi/\omega} e^{i\omega t}\left(\frac{\partial\rho_b}{\partial z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial j_b}{\partial t}\right) dt, \qquad (8)$$

ρ_b, j_b — плотность зарядов и плотность тока пучка. Штрих в (6), (7) означает дифференцирование по поперечной координате r.

Наличие электронного пучка в системе отражено в граничных условиях (6). В рассматриваемой модели бесконечно тонкого поверхностного тока азимутальная компонента магнитного ВЧ поля терпит на поверхности $r = a$ скачок, пропорциональный полному току пучка.

Ограничиваясь взаимодействием колебаний в рамках слабой нелинейности, ищем решение связанных уравнений (1)—(5) в виде

$$\mathscr{E}_{p,v} = A^{(e)}_{p,v}(r, z)\exp(ik_e z) + \\ + A^{(+)}_{p,v}(r, z)\exp(ik_+ z - i\omega_s t) + A^{(-)}_{p,v}(r, z)\exp(ik_- z + i\omega_s t); \tag{9а}$$

$$\Phi_{p,v} = \frac{1}{2} A^{(s)}_{p,v}(r, z)\exp(ik_s z - i\omega_s t), \tag{9б}$$

где $k_e = \omega_e/V_0$, $\omega_\pm = \omega_e \pm \omega_s$, $k_\pm = k_e \pm k_s$. Функция $A^{(e)}_{p,v}$ описывает волны плотности заряда электронного пучка, $A^{(s)}_{p,v}$ — ионно-звуковую, а $A^{(\pm)}_{p,v}$ — комбинационные волны. Все указанные функции медленно меняются с продольной координатой z.

Подставив выражения (9а), (9б) в уравнения (1)—(5), получим следующую систему уравнений для функций $A^{(\nu)}_{p,v}$, $\nu = (+), (-), e, s$:

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\eta\frac{\partial A^{(+)}_p}{\partial\eta} + \lambda^2_+ A^{(+)}_p = \rho_+ A^{(e)}_p A^{(s)}_p; \tag{10а}$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\eta\frac{\partial A^{(-)}_p}{\partial\eta} + \lambda^2_- A^{(-)}_p = \rho_- A^{(e)}_p A^{(s)*}_p; \tag{10б}$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\eta\frac{\partial A^{(e)}_p}{\partial\eta} + \lambda^2_e A^{(e)}_p = \rho_e\left[A^{(+)}_p A^{(s)*}_p + A^{(-)}_p A^{(s)}_p\right]; \tag{10в}$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\eta\frac{\partial A^{(\gamma)}_v}{\partial\eta} + \varkappa^2_\gamma A^{(\gamma)}_v = 0, \quad \gamma = e, (+), (-); \tag{10г}$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\eta\frac{\partial A^{(s)}_p}{\partial\eta} + \lambda^2_s A^{(s)}_p - i\frac{\partial\lambda^2_s}{\partial k_s}\frac{\partial A^{(s)}_p}{\partial z} = \rho_s\left[A^{(+)}_p A^{(e)*}_p + A^{(-)*}_p A^{(e)}_p\right]; \tag{11а}$$

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\eta\frac{\partial A^{(s)}_v}{\partial\eta} - \varkappa^2_s A^{(s)}_v + i\frac{\partial\varkappa^2_s}{\partial k_s}\frac{\partial A^{(s)}_v}{\partial z} = 0. \tag{11б}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\lambda^2_\gamma = \varkappa^2_\gamma\varepsilon_\parallel, \quad \varkappa^2_\gamma = \left(\frac{\omega^2_e}{c^2} - k^2_\gamma\right)a^2, \quad \varepsilon_\parallel = 1 - \frac{\omega^2_{pe}}{\omega^2_e},$$

$$\rho_\gamma = \frac{1}{2}\frac{\omega^2_{pe}}{\omega^2_e}\frac{e\varkappa^2_\gamma}{T_e}, \quad \gamma = e, (+), (-),$$

$$\lambda^2_s = \left(\frac{\omega^2_s}{c^2_s} - k^2_s\right)a^2, \quad \varkappa_s = k_s a, \quad \rho_s = \frac{1}{2}\frac{e}{m}\frac{\omega^2_s}{\omega^2_e}\frac{a^2}{c^2_s}, \quad \eta = \frac{r}{a}.$$

Отметим, что в левой части каждого из уравнений (10) опущены соответствующие производные функций $A^{(\gamma)}_{p,v}$ по продольной координате. Это оправдано, поскольку в рассматриваемом диапазоне частот $\omega > \omega_{pe}$ как электронный пучок, так и комбинационные волны не попадают в резонанс с собственными ВЧ колебаниями замагниченного плазменного цилиндра.

Функции $A_p^{(\nu)}$ и $A_v^{(\nu)}$ связаны условиями на поверхности волновода $\eta = 1$. Эти условия вытекают из соотношений (6), (7) и имеют вид

$$\eta = 1 \left\{ \begin{aligned} & A_p^{(e)} - A_v^{(e)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta}\left[A_p^{(e)} - A_v^{(e)}\right] = \\ & = -4i\omega_e V_0 N_b \frac{\omega_e}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_e} \left[\exp\left(i\omega_e t_л - k_e z\right)/V_л^2 \gamma_л^2\right] dt_0; \qquad (12) \\ & A_p^{(\pm)} - A_v^{(\pm)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta}\left[A_p^{(\pm)} - A_v^{(\pm)}\right] = 0; \qquad (13) \\ & A_p^{(s)} - A_v^{(s)} = 0, \quad \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_s^2} \frac{\partial A_p^{(s)}}{\partial \eta} + \frac{\partial A_v^{(s)}}{\partial \eta} = 0, \qquad (14) \end{aligned} \right.$$

N_b — число частиц на единице длины пучка. Интегрирование в (12) ведется по временам влета электронов пучка в волновод, $V_л = (\partial t_л/\partial z)^{-1}$ — скорость частиц пучка вдоль их траекторий.

Будем решать систему уравнений (10), (11) методом последовательных приближений. В линейном приближении функция $A_p^{(s)}$ зависит только от радиуса $A_p^{(s)} = a_s J_0(\lambda_s \eta)$. Слабая нелинейность приведет к медленному изменению амплитуды вдоль волновода, а также к небольшому искажению распределения поля ионно-звуковой волны по сечению плазмы. В соответствии с этим функцию $A_p^{(s)}(z, \eta)$ представим в виде

$$A_p^{(s)}(z, \eta) = a_s(z) J_0(\lambda_s \eta) + R_s, \qquad (15)$$

где R_s — малая нелинейная добавка. Подставим теперь выражение (15) в уравнения (10). Учитывая малость величины R_s, в правых частях этих уравнений достаточно удержать только главный член разложения (15). Кроме этого сделаем еще одно допущение, которое, не являясь принципиальным, значительно упростит дальнейший анализ. Будем считать, что выполнено условие

$$\varepsilon = 2x^3 \frac{K_\perp(x)}{K_0(x)} \left(\frac{r_D}{a}\right)^2 \ll 1, \quad x = k_s a, \quad r_D = \frac{V_{Te}}{\omega_{pe}},$$

$K_m(x)$ — функция Макдональда. В этом случае ионно-звуковая волна с минимальным поперечным волновым числом практически однородна по сечению волновода, так как для нее

$$|\lambda_s|^2 = \varepsilon \ll 1.$$

С учетом сделанных замечаний уравнения (10а)—(10в) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \Delta_\perp A_p^{(+)} + \lambda_+^2 A_p^{(+)} = \lambda_+^2 h A_p^{(e)}, \\ & \Delta_\perp A_p^{(-)} + \lambda_-^2 A_p^{(-)} = \lambda_-^2 h^* A_p^{(e)}, \qquad (16) \\ & \Delta_\perp A_p^{(e)} + \lambda_e^2 A_p^{(e)} = \lambda_e^2 \left(h A_p^{(-)} + h^* A_p^{(+)}\right). \end{aligned}$$

Здесь мы ввели безразмерную амплитуду ионно-звуковой волны

$$h = \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_e^2 \varepsilon_\parallel} \frac{e a_s}{T_e}. \tag{17}$$

Решение системы уравнений (16) имеет вид

$$\begin{gathered} A_p^{(e)} = \sum_{l=1}^{3} a_l J_0(\mu_l \eta), \quad A_p^{(+)} = h\lambda_+^2 \sum_{l=1}^{3} \frac{a_l}{\lambda_+^2 - \mu_l^2} J_0(\mu_l \eta), \\ A_p^{(-)} = h^* \lambda_-^2 \sum_{l=1}^{3} \frac{a_l}{\lambda_-^2 - \mu_l^2} J_0(\mu_l \eta), \end{gathered} \tag{18}$$

где μ_l^2 — корни алгебраического уравнения

$$\lambda_e^2 - \mu^2 = |h|^2 \lambda_e^2 \left(\frac{\lambda_-^2}{\lambda_-^2 - \mu^2} + \frac{\lambda_+^2}{\lambda_+^2 - \mu^2} \right).$$

Корни этого уравнения легко находятся приближенно, если принять, что $|h|^2 \ll 1$:

$$\mu_1^2 = \lambda_e^2 \left[1 - |h|^2 \left(\frac{\varkappa_+^2}{\varkappa_+^2 - \varkappa_e^2} + \frac{\varkappa_-^2}{\varkappa_-^2 - \varkappa_e^2} \right) \right],$$

$$\mu_{2,3}^2 = \lambda_\pm^2 \left(1 - |h|^2 \frac{\varkappa_e^2}{\varkappa_e^2 - \varkappa_\pm^2} \right).$$

И, наконец, после интегрирования уравнений (10г) находим в явном виде зависимости функций $A_v^{(\gamma)}(z, \eta)$ от поперечной координаты:

$$A_v^{(\gamma)} = b_\gamma H_0^{(1)}(\varkappa_\gamma \eta). \tag{19}$$

Воспользуемся теперь граничными условиями (12), (13). Подставив в эти условия выражения (18), (19), получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered} \sum_{l=1}^{3} a_l J_0(\mu_l) = b_e H_0^{(1)}(\varkappa_e), \quad \sum_{l=1}^{3} a_l \mu_l J_1(\mu_l) - \varkappa_e b_e H_1^{(1)}(\varkappa_e) = f, \\ h\lambda_+^2 \sum_{l=1}^{3} \frac{a_l J_0(\mu_l)}{\lambda_+^2 - \mu_l^2} = b_+ H_0^{(1)}(\varkappa_+), \\ h\lambda_+^2 \sum_{l=1}^{3} \frac{a_l \mu_l J_1(\mu_l)}{\lambda_+^2 - \mu_l^2} = \varkappa_+ b_+ H_1^{(1)}(\varkappa_+), \\ h^* \lambda_-^2 \sum_{l=1}^{3} \frac{a_l J_0(\mu_l)}{\lambda_-^2 - \mu_l^2} = b_- H_0^{(1)}(\varkappa_-), \\ h^* \lambda_-^2 \sum_{l=1}^{3} \frac{a_l \mu_l J_0(\mu_l)}{\lambda_-^2 - \mu_l^2} = \varkappa_- b_- H_1^{(1)}(\varkappa_-), \end{gathered} \tag{20}$$

где

$$f = 4ie\omega_e N_b V_0 \rho, \quad \rho = \int_0^1 \frac{e^{2\pi i \tau_л}}{V_л^2 \gamma_л^2} d\tau_0,$$

$$\tau_л = \frac{\omega_e t_e}{2\pi} - \frac{\omega_e z}{2\pi V_0}.$$

Решая эту систему относительно амплитуд a_i, находим

$$a_1 = \frac{f}{J_0(\lambda_e) G}, \quad a_{2,3} = \frac{\varkappa_e^2 \varkappa_\pm^2}{(\varkappa_e^2 - \varkappa_\pm^2)^2} |h|^2 \frac{D_e^\pm}{D_\pm^\pm} \frac{f}{GJ_0(\lambda_\pm)}. \tag{21}$$

Здесь

$$G = D_e^e - |h|^2 \frac{\lambda_e^2}{2} \left[1 + \frac{J_1^2(\lambda_e)}{J_0^2(\lambda_e)}\right] \left(\frac{\varkappa_+^2}{\varkappa_+^2 - \varkappa_e^2} + \frac{\varkappa_-^2}{\varkappa_-^2 - \varkappa_e^2}\right) +$$

$$+ \frac{D_e^+}{D_+^+} D_+^e |h|^2 \frac{\varkappa_e^2 \varkappa_+^2}{(\varkappa_e^2 - \varkappa_+^2)^2} + \frac{D_e^-}{D_-^-} D_-^e |h|^2 \frac{\varkappa_-^2 \varkappa_e^2}{(\varkappa_e^2 - \varkappa_-^2)^2}, \quad D_\alpha^\beta = Z_\alpha - Q_\beta,$$

$$Z_\alpha = \lambda_\alpha \frac{J_1(\lambda_\alpha)}{J_0(\lambda_\alpha)}, \quad Q_\beta = \varkappa_\beta \frac{H_1^{(1)}(\varkappa_\beta)}{H_0^{(1)}(\varkappa_\beta)}.$$

С помощью формул (21) нетрудно вычислить амплитуду действующей на пучок ($\eta = 1$) продольной компоненты электрического поля $A \equiv A_e$ ($\eta = 1$):

$$(D_e^e + |h|^2 \Lambda) A = -4ie\omega_e N_b V_0 \rho. \tag{22}$$

Здесь

$$\Lambda = -\frac{\lambda_e^2}{2} \left[1 + \frac{J_1^2(\lambda_e)}{J_0^2(\lambda_e)}\right] \left(\frac{\varkappa_+^2}{\varkappa_+^2 - \varkappa_e^2} + \frac{\varkappa_-^2}{\varkappa_-^2 - \varkappa_e^2}\right) +$$
$$+ \frac{\varkappa_e^2 \varkappa_+^2}{(\varkappa_e^2 - \varkappa_+^2)^2} \frac{D_e^+}{D_+^+} (Z_+ - Z_e) + \frac{\varkappa_e^2 \varkappa_-^2}{(\varkappa_-^2 - \varkappa_e^2)^2} \frac{D_e^-}{D_-^-} (Z_- - Z_e). \tag{22a}$$

Уравнение (22) совместно с уравнениями движения электронов пучка

$$V_л \frac{dP_л}{dz} = -e \operatorname{Re} A e^{-2\pi i \tau}, \quad \frac{d\tau}{dz} = \frac{\omega}{2\pi V_0} \left(\frac{V_0}{V_л} - 1\right) \tag{23}$$

описывает процесс рассеяния волн плотности заряда релятивистского пучка на периодической неоднородности плотности плазмы, индуцированной ионно-звуковой волной.

Учтем теперь обратное влияние ВЧ поля на плазму. Приближенное решение уравнения (11а), которое описывает усиление НЧ волны ВЧ полем, можно записать следующим образом:

$$A_p^{(s)} = a_s J_0(\lambda_s \eta) - i \frac{\partial}{\partial k_s} J_0(\lambda_s \eta) \frac{\partial a_s}{\partial z} + \rho_s \left[\Phi_0^+(\lambda_s \eta) + \Phi_0^-(\lambda_s \eta)\right]. \tag{24}$$

Здесь использованы обозначения

$$\Phi_m^+(\lambda_s \eta) = \int_0^\eta L_m(\lambda_s \eta, \lambda_s \xi) A_p^{(+)}(z, \xi) A_p^{(e)*}(z, \xi) \xi \, d\xi,$$

$$\Phi_m^-(\lambda_s\eta) = \int_0^\eta L_m(\lambda_s\eta, \lambda_s\xi) A_p^{(-)}(z, \xi) A_p^{(e)}(z, \xi)\xi\, d\xi,$$

$$L_m(x, y) = \frac{\pi i}{2}\left[J_m(x) H_0^{(1)}(y) - H_m^{(1)}(x) J_0(y)\right].$$

В вакууме распределение потенциала ионно-звуковой волны описывается решением уравнения (11б):

$$A_v^{(s)} = b_s K_0(\varkappa_s\eta) - i\frac{\partial}{\partial k_s} K_0(\varkappa_s\eta)\frac{\partial b_s}{\partial z}. \tag{25}$$

Подставим выражения (24), (25) в граничные условия (14). В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, связывающих амплитуду ионно-звуковой волны вне плазмы b_s с амплитудой в плазме a_s. Эту систему уравнений после исключения из нее b_s можно свести к следующему уравнению:

$$iD_s'\frac{\partial a_s}{\partial z} = -\frac{\omega_{pi}^2}{J_0^2(\lambda_s)\omega_s^2}\rho_s\left\{\int_0^1 J_0(\lambda_s\xi)\left[A_p^{(+)}(z, \xi) A_p^{(e)*}(z, \xi) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + A_p^{(-)*}(z, \xi) A_p^{(e)}(z, \xi)\right]\xi\, d\xi.\right. \tag{26}$$

Здесь

$$D_s' \equiv \frac{\partial D_s}{\partial k_s}, \quad D_s = \lambda_s\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_s^2}\frac{J_1(\lambda_s)}{J_0(\lambda_s)} + \varkappa_s\frac{K_1(\varkappa_s)}{K_0(\varkappa_s)}.$$

Используя формулы (18), (21), можно вычислить интеграл в правой части (26). Учитывая также, что $|h|^2 \ll 1$, $|\lambda_s|^2 \ll 1$, уравнение (26) можно преобразовать к виду

$$i\frac{\partial h}{\partial z} = \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_e^2\varepsilon_\parallel}\right)^2\frac{\Lambda^*\gamma_0^2}{k_e^2 a^2}h\frac{|A|^2}{16\pi n_0 T_e}k_s. \tag{27}$$

Таким образом, мы получили замкнутую систему уравнений, описывающую распределение амплитуд пучковых волн и НЧ потенциала вдоль волновода. Систему уравнений (22), (23), (27) в общем случае можно решить только численными методами. Однако на начальной стадии параметрического процесса, когда амплитуды колебаний малы и они слабо возмущают траектории электронов пучка, эти уравнения допускают упрощение. Пренебрегая нелинейностью пучка, из уравнений движения (23) находим

$$\tau = \tau_0 + \frac{e}{mV_0^2\gamma_0}\frac{k_e}{4\pi}e^{-2\pi i\tau_0}\int_0^z dz'\int_0^{z'} dz'' A(z''). \tag{28}$$

После подстановки (28) в (22) получим следующую систему связанных уравнений:

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \Psi = \mu\Psi|h|^2; \tag{29}$$

$$i\frac{dh}{d\xi} = \sigma h|\Psi|^2. \tag{30}$$

Здесь

$$\Psi = \frac{A}{\sqrt{16\pi n_0 T_e}}\left(1 - \frac{|h|^2\Lambda}{F_e}\right), \quad \xi = k_b z \equiv z\sqrt{\frac{2e^2 N_b\omega_e^2}{F_e m\gamma_0^3 V_0^4}},$$

$$\mu = -\frac{\Lambda}{F_e}, \quad \sigma = \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_e^2 \varepsilon_\parallel}\right)^2 \frac{\Lambda^* \gamma_0^2 k_s}{k_e^2 a^2 k_b}, \qquad F_e = q\,\frac{I_1(q)}{I_0(q)} + \frac{K_1(y)}{K_0(y)},$$

$$q = y\sqrt{\varepsilon}, \quad y = \frac{\omega_e a}{c\,\beta_0 \gamma_0}.$$

Отметим, что если в уравнении (29) пренебречь нелинейным слагаемым в правой части, то решение имеет вид двух бегущих волн, соответствующих быстрой и медленной волнам плотности заряда электронного пучка.

Прежде всего исследуем уравнение (29) в приближении заданной глубины модуляции плотности плазмы $|h| = h_0$. Подставляя в (29) $\Psi = \Psi_0 e^{i\nu}$, находим следующее дисперсионное уравнение для волн плотности заряда:

$$\gamma^2 = 1 - \mu h_0^2. \tag{31}$$

Поскольку в правой части (31) добавка к единице мала, то это уравнение имеет комплексные корни, когда μ имеет мнимую часть. Легко убедиться, что $\operatorname{Im}\mu \neq 0$, если для одной из комбинационных волн выполняется условие излучения в вакуум [9]

$$V_f^2 > c^2,$$

т. е. когда имеет место вынос энергии из объема плазменно-пучкового волновода, причем всегда $\operatorname{Im}\mu > 0$. В рассматриваемом нами случае, когда скорость пучка и направление распространения ионно-звуковой волны совпадают, этому условию может удовлетворить только комбинационная волна с разностной частотой $\omega_- = \omega_e - \omega_s$. Учитывая, что $k_e = \omega_e/V_0$, условие излучения $[(\omega_e - \omega_s)/(k_e - k_s)]^2 > c^2$ для этой волны можно переписать следующим образом:

$$\lambda_t \beta_0 (1 + \beta_0)\,\gamma_0^2 > \lambda_s > \lambda_t \beta_0/(1 + \beta_0).$$

Здесь $\lambda_t = 2\pi c/\omega_-$ — длина волны электромагнитного излучения, $\lambda_s = 2\pi/k_s$ — длина волны ионного звука. Из этого неравенства следует, что в случае релятивистского электронного пучка $\gamma_0^2 \gg 1$ минимальная длина электромагнитной волны, которую может возбуждать пучок, в $2\gamma_0^2$ раз короче длины волны ионного звука [6].

Непосредственно из (31) видно, что потери энергии на излучение приводят к затуханию быстрой и к усилению медленной волн плотности заряда пучка. Выражение для инкремента, записанное в размерных переменных, имеет вид

$$\Gamma = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\pi}\,\frac{\omega_e}{V_0}\sqrt{\frac{I_0}{I_A}}\left(\frac{ea_s}{T_e}\,\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_e^2}\right)^2 \frac{F}{\varepsilon_\parallel \beta_0^2 \gamma_0^2 \left(\sin^2\theta + \dfrac{1}{\beta_0^2\gamma_0^2}\right)^2}, \tag{32}$$

где

$$F = \frac{\left[\sin\theta\, J_1(p) + \dfrac{1}{\beta_0\gamma_0}\,\dfrac{I_1(q)}{I_0(q)}\,J_0(p)\right]^2}{(xR)^{3/2} d^2},$$

$$d^2 = [\sqrt{\varepsilon_\parallel}\, J_1(p) J_0(x\sin\theta) - J_1(x\sin\theta) J_0(p)]^2 +$$
$$+ [\sqrt{\varepsilon_\parallel}\, J_1(p) N_0(x\sin\theta) - J_0(p) N_1(x\sin\theta)]^2,$$

$$p = \varkappa \sqrt{\varepsilon_{\parallel}} \sin\theta, \quad x = \omega_- a/c, \quad \cos\theta = k_- c/\omega_-,$$

$I_A = mc^3/e$, I_0 — полный ток пучка.

Таким образом, инкремент пропорционален квадратному корню из тока пучка и квадрату глубины модуляции плазмы.

Исследуем выражение для инкремента в наиболее интересном случае высоких частот

$$x \gg 1, \quad y \gg 1. \tag{33}$$

Рассмотрим область частот вблизи плазменной частоты, предполагая, что наряду с (33) выполнены также условия

$$\varkappa \sqrt{\varepsilon_{\parallel}} \ll 1, \quad y \sqrt{\varepsilon_{\parallel}} \ll 1.$$

В этом предельном случае с ростом частоты инкремент убывает, как

$$\Gamma = \frac{1}{16\sqrt{2}} \frac{\omega}{V_0} \sqrt{\frac{I_0}{I_A}} \left(\frac{ea_s}{T_e}\right)^2 \frac{x^{3/2} \sin\theta}{Q(x\sin\theta)\, \beta_0^2 \gamma_0^2}, \tag{34}$$

где

$$Q(x) = \frac{\pi}{2} x \left[J_1^2(x) + N_1^2(x)\right] = \begin{cases} 1 & , x \gg 1 \\ 2/\pi\, x, & x \ll 1 \end{cases}.$$

В рассмотренном предельном случае с ростом плотности плазмы и, соответственно, с ростом частоты электромагнитного излучения инкремент растет, как $\omega_{pe}^{2/5}$.

Рассмотрим теперь область частот $\omega_e^2 \gg \omega_{pe}^2$. После элементарных преобразований формула (32) сводится к следующей:

$$\Gamma = \frac{\pi}{32} \frac{\omega_e}{V_0} \sqrt{\frac{I_0}{I_A}} \left(\frac{ea_s}{T_e}\right)^2 \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_e}\right)^4 \sqrt{x} \times$$
$$\times \sin^2\theta \frac{[\beta_0 \gamma_0 \sin\theta\, J_1(x\sin\theta) + J_0(x\sin\theta)]^2}{(1 + \beta_0^2 \gamma_0^2 \sin^2\theta)^2}. \tag{35}$$

В этом предельном случае с ростом частоты инкремент убывает, как $\omega_e^{-7/2}$.

Исследуем зависимость инкремента от угла излучения θ. Непосредственно из общей формулы (32) видно, что в случае высоких частот $x\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} \gg 1$, $y \gg 1$ для конечного числа углов

$$\sin\theta_n = \lambda_n / x \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \quad \lambda_{n+1} > x\sqrt{\varepsilon_{\parallel}} > \lambda_n,$$

где λ_n — корни трансцендентного уравнения $J_0(\lambda_n) + \lambda_n J_1(\lambda_n)\, \beta_0 \gamma_0 / \varkappa \sqrt{\varepsilon_{\parallel}} = 0$, инкремент неустойчивости обращается в нуль. Этот эффект обусловлен интерференцией волн, излучаемых частицами пучка. Отметим также, что при $\theta \to 0$ и $\theta \to \pi$, как это следует из формул (34), (35), инкремент стремится к нулю, как $\sin^2\theta$. Физически это можно объяснить тем, что в этом уменьшается мощность, выносимая из объема плазмы в радиальном направлении электромагнитной волной. А поскольку неустойчивость носит диссипативный характер, то уменьшение потерь энергии приводит к уменьшению инкремента.

3. Выше мы показали, что в приближении заданной глубины модуляции плотности плазмы возбуждение электромагнитного излучения вызывает экспоненциальное нарастание медленной волны плотности

заряда. Учтем теперь изменение амплитуды ионно-звуковой волны под действием ВЧ поля. Ищем решение уравнения (29) в виде

$$\Psi = \Psi^+ e^{i\xi} + \Psi^- e^{-i\xi}, \tag{36}$$

где $\Psi^\pm(\xi)$ — медленно меняющиеся на периоде 2π амплитуды медленной (+) и быстрой (—) волн плотности заряда. После подстановки (36) в уравнение (29) и усреднения по периоду 2π легко получить следующую систему связанных уравнений:

$$\frac{d|\Psi^+|^2}{d\xi} = \operatorname{Im}\mu |\Psi^+|^2 |h|^2, \quad \frac{d|\Psi^-|^2}{d\xi} = -\operatorname{Im}\mu |\Psi^-|^2 |h|^2,$$
$$\frac{d|h|^2}{d\xi} = -\operatorname{Im}\sigma |h|^2 (|\Psi^+|^2 + |\Psi^-|^2). \tag{37}$$

Введем функции

$$H = \operatorname{Im}\mu |h|^2, \quad B^\pm = -\operatorname{Im}\sigma |\Psi^\pm|^2, \quad \operatorname{Im}\sigma < 0.$$

Тогда уравнения (37) принимают вид

$$\frac{dB^+}{d\xi} = B^+H, \quad \frac{dB^-}{d\xi} = -B^-H, \quad \frac{dH}{d\xi} = H(B^+ + B^-). \tag{38}$$

Система (37) имеет интегралы

$$B^+B^- = C_1 \equiv B_0^+B_0^-, \quad H + B^- - B^+ = C^2 \equiv H_0 + B_0^- - B_0^+, \tag{39}$$

где H_0, $B_0^\pm = H, B^\pm(\xi = 0)$. В дальнейшем мы будем для простоты считать, что начальные значения амплитуд быстрой и медленной волн плотности заряда совпадают, $B_0^+ = B_0^- = B_0$. Тогда, используя соотношения (39), нетрудно найти решение системы уравнений (38):

$$B^+ = \sqrt{B_0^2 + \frac{H_0^2}{4}}\, \frac{\left(B_0 + \frac{H_0}{2} + \sqrt{B_0^2 + \frac{H_0^2}{4}}\right)^2 + H_0B_0 e^{\xi/\xi_*}}{\left(B_0 + \frac{H_0}{2} + \sqrt{B_0^2 + \frac{H_0^2}{4}}\right)^2 - H_0B_0 e^{\xi/\xi_*}} - \frac{H_0}{2}. \tag{40}$$

Здесь

$$\xi_* = 1/2\sqrt{B_0^2 + H_0^2/4}. \tag{41}$$

Зависимости $B^-(\xi)$ и $H(\xi)$ можно получить из соотношений (39). Из выражений (39), (40) видно, что функции $B^+(\xi)$, $H(\xi)$ имеют особенность. В точке

$$\xi_0 = \xi_* \ln \frac{(B_0 + H_0/2 + \sqrt{B_0^2 + H_0^2/2})^2}{H_0B_0} \tag{42}$$

они обращаются в бесконечность. В то же время амплитуда быстрой пучковой волны в этой точке обращается в нуль. При достаточно большой начальной амплитуде ионно-звуковой волны

$$H_0^2 \gg B_0^2, \tag{43}$$

длина ξ_0 слабо (логарифмически) зависит от начальной амплитуды волн плотности заряда. В явном виде неравенство (43) можно записать следующим образом:

$$|A_0|^2 \frac{V_{Te}^2}{4\omega_{pe}^2} \gamma_0^2 k_s a \left(\frac{R\beta_0}{k_e a}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{I_A}{I_0}} \equiv \alpha |A_0|^2. \tag{44}$$

В размерных переменных характерную длину развития взрывной неустойчивости в этом случае можно оценить по формуле

$$z_0 = \Gamma^{-1} \ln |a_{s0}|^2 / \alpha |A_0|^2, \tag{45}$$

где Г определено в (32). Если начальная амплитуда ионно-звуковой волны мала, так что выполняется условие, обратное (43), то характерная длина развития неустойчивости определяется, в основном, амплитудой волн плотности заряда. Это связано с тем, что в этом случае индуцированная ВЧ колебаниями глубина модуляции плотности плазмы превышает начальное значение h. Характерную длину z_0 в такой ситуации необходимо вычислять по формуле

$$z_0 = \left(\frac{\omega}{\omega_{pe}}\right)^2 \frac{8\varepsilon_\parallel}{k_s} \left(\sin^2\theta + \frac{1}{\beta_0^2\gamma_0^2}\right)^2 \left[\sin\theta J_1(p) + \frac{1}{\beta_0\gamma_0} \frac{I_1(q)}{I_0(q)} J_0(p)\right]^{-2} \times$$
$$\times x^2 \frac{d^2 32\pi^2 h_0 T_e}{|A_0|^2} \ln \frac{\alpha |A_0|^2}{2|as_0|^2}. \tag{46}$$

Таким образом, мы показали, что в приближении заданной глубины модуляции возбуждение излучения сопровождается экспоненциальным ростом медленной волны плотности заряда. Инкремент неустойчивости пропорционален квадратному корню из тока пучка и квадрату глубины модуляции плотности плазмы. Учет обратного воздействия ВЧ поля на плазму приводит к взрывному росту амплитуд медленной волны плотности заряда и ионно-звуковой волны.

В заключение авторы выражают благодарность Курилко В. И. и Буцу В. А. за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карацтин А. Н., Реутов В. П. — Изв. вузов — Радиофизика, 1975, **18**, № 7, с. 930.
2. Плоткин Е. Е., Файнштейн С. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, **17**, № 3, с. 333.
3. Файнштейн С. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1975, **18**, № 7, с. 1059.
4. Буц В. А., Измайлов А. Н. — ЖТФ, 1976, **46**, № 11, с. 2451.
5. Буц В. А., Измайлов А. Н. — ЖТФ, 1978, **48**, № 7, с. 1366.
6. Буц В. А. — ЖТФ, 1973, **43**, с. 456.
7. Балакирев В. А., Толстолужский А. П. — ЖТФ, 1979, **49**, № 8, с. 1638.
8. Балакирев В. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 7, с. 891.
9 Аланакян Ю. Р. — ЖТФ, 1966, **36**, с 806.

Поступила в редакцию
30 сентября 1980 г.

EXCITATION OF RADIATION AT SCATTERING OF WAVES OF THE ELECTRON BEAM CHARGE DENSITY BY ION-SOUND OSCILLATIONS OF A PLASMA WAVEGUIDE

V. A. Balakirev, A. P. Tolstoluzhskij

Excitation of the electromagnetic radiation is studied which is based on the process of induced scattering of waves of the electron beam charge density by an ion-sound wave of a plasma waveguide. It is shown that the radiation excitation leads to a burst increase of amplitudes of interacting oscillations.