УДК 538.56:519.25

О ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛНАХ СРЕДНЕГО ПОЛЯ В ХОЛОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

В. Г. Гавриленко, Г. В. Джандиери

Найден тензор эффективной диэлектрической проницаемости холодной турбулентной плазмы. С его помощью показано, что в ней могут распространяться слабозатухающие продольные волны среднего электрического поля, групповая скорость которых в системе отсчета, движущейся со средней скоростью потока, близка к среднеквадратичной скорости турбулентного движения плазмы.

Известно, что тензор эффективной диэлектрической проницаемости, связывающий гармонические в пространстве и времени составляющие средней индукции и средней напряженности электрического поля в хаотически неоднородной среде, всегда является функцией как частоты, так и волнового вектора [1]. Однако наличие пространственной дисперсии эффективной диэлектрической проницаемости для различного рода стационарных неподвижных сред с флуктуирующей в пространстве концентрацией не приводит к появлению распространяющихся продольных волн среднего поля [1]. В статье [2] указано на возможность существования таких волн в среде, которая может быть представлена состоящей из гармонических осцилляторов со случайно изменяющейся в пространстве частотой и постоянной концентрацией.

В настоящей работе показано, что продольные волны среднего электрического поля могут распространяться в турбулентном несжимаемом потоке холодной электронной плазмы.

Считая, что тепловая скорость электронов мала по сравнению с турбулентными пульсациями макроскопической скорости плазмы, будем использовать гидродинамическое описание. Исходным является волновое уравнение для электрического поля

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}, \tag{1}$$

где в линейном приближении наведенный ток $\boldsymbol{j}$ выражается через возмущения скорости $\boldsymbol{v}_s$ и концентрации N_s электронов под действием электромагнитного поля следующим образом:

$$\boldsymbol{j} = e(N\boldsymbol{v}_s + N_s\boldsymbol{V}). \tag{2}$$

Здесь e — заряд электрона, $N(\boldsymbol{r}, t)$ — концентрация, а $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}, t)$ — макроскопическая скорость плазмы (движением ионов под действием высокочастотного поля пренебрегаем).

Возмущения концентрации и скорости в свою очередь удовлетворяют уравнениям гидродинамики

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}_s + (\boldsymbol{v}_s\cdot\nabla)\boldsymbol{V} = \frac{e}{m}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{VB}]\right); \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla\right) N_s + N \operatorname{div} \boldsymbol{v}_s + N_s \operatorname{div} \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}_s\cdot\nabla N = 0, \qquad (4)$$

где $\boldsymbol{B}$ — индукция магнитного поля, m — масса электрона. При этом мы пренебрегаем соударениями электронов и считаем, что скорость плазмы мала по сравнению со скоростью света c и фазовой скоростью волн $V_ф$.

Полагая далее флуктуации концентрации слабыми, применим для отыскания тензора эффективной диэлектрической проницаемости метод возмущений [3].

Пусть

$$N = \langle N \rangle + N_1(\boldsymbol{r},\ t), \quad |N_1| \ll \langle N \rangle; \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{E} = \langle \boldsymbol{E} \rangle + \boldsymbol{E}_1,\ \boldsymbol{B} = \langle \boldsymbol{B} \rangle + \boldsymbol{B}_1, \qquad (6)$$

где $\langle N \rangle$ — среднее по ансамблю, $N_1(\boldsymbol{r},\ t)$ — случайная функция координат и времени, $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{B}_1$ — малые электрическое и магнитное поля рассеяния.

Для гармонической составляющей среднего поля

$$\langle \boldsymbol{E} \rangle = \boldsymbol{E}_0 \exp(i\omega_0 t - i\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r}) \qquad (7)$$

из соотношений (1)—(4) путем разложения в ряды по малым параметрам $N_1/\langle N \rangle$ и $V/V_ф$ получим уравнение

$$k_0^2 \langle \boldsymbol{E} \rangle - \boldsymbol{k}_0 (\boldsymbol{k}_0 \cdot \langle \boldsymbol{E} \rangle) - \frac{\omega_0^2}{c^2} \langle \boldsymbol{E} \rangle = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \langle \boldsymbol{j} \rangle}{\partial t}, \qquad (8)$$

где

$$\frac{\partial \langle \boldsymbol{j} \rangle}{\partial t} = \frac{e^2 \langle N \rangle}{m} \langle \boldsymbol{E} \rangle - e \langle N \rangle \langle (\boldsymbol{V}\cdot\nabla) \boldsymbol{v}_1^s \rangle -$$

$$- e \langle N \rangle \langle (\boldsymbol{v}_1^s \cdot \nabla) \boldsymbol{V} \rangle + \frac{e^2 \langle N \rangle}{mc} \langle [\boldsymbol{V}\boldsymbol{B}_1] \rangle + e \frac{\partial}{\partial t} (\langle N_1^s \boldsymbol{V} \rangle + \langle N_1 \boldsymbol{v}_1^s \rangle),$$

$$\boldsymbol{v}_1^s(\boldsymbol{r},\ t) = \frac{e}{m} \int\limits_{-\infty}^{t} \left[\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r},\ t') + \frac{1}{\omega_0} (\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},\ t')) \langle \boldsymbol{E} \rangle(\boldsymbol{r},\ t') + \frac{i}{\omega_0} (\langle \boldsymbol{E} \rangle \cdot \nabla) \boldsymbol{V} \right] dt',$$

$$N_1^s(\boldsymbol{r},\ t) = \langle N \rangle \int\limits_{-\infty}^{t} \left[\frac{e}{m\omega_0^2} (\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{V})(\boldsymbol{k}_0 \cdot \langle \boldsymbol{E} \rangle) - \operatorname{div} \boldsymbol{v}_1^s \right] dt',$$

а рассеянное поле $\boldsymbol{E}_1$ имеет вид

$$E_i^1(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\omega_p^2}{(2\pi)^4 \omega_0} \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta_{ij} - [c^2 k_i k_j / (\omega^2 - \omega_p^2)]}{\omega^2 - \omega_p^2 - k^2 c^2} \times \qquad (9)$$

$$\times \left[k_j^0 V_m(\boldsymbol{r}',\ t') + k_m^0 V_j + \omega_0 \frac{N_1(\boldsymbol{r}',\ t')}{\langle N \rangle} \delta_{jm} + i \frac{\partial V_j}{\partial x'_m} - i \frac{k_m^0}{\omega_0} \frac{\partial V_j}{\partial t'} - \right.$$

$$\left. - \frac{i}{\langle N \rangle} \frac{\partial N_1}{\partial t'} \delta_{jm} \right] E_m^0 \exp[i\omega t - i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} + i(\omega_0 - \omega) t' - i(\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k})\boldsymbol{r}'] d\omega\, d\boldsymbol{k}\, d\boldsymbol{r}',$$

где $\omega_p^2 = 4\pi \langle N \rangle e^2/m$.

Полагая среднюю скорость турбулентного потока постоянной, мы для удобства сначала решаем задачу в движущейся с этой скоростью системе отсчета.

Рассматривая случай статистически стационарных однородных и изотропных флуктуаций параметров плазмы и считая течение несжимаемым ($\operatorname{div} V = 0$), из (8) и (9) можно выделить искомое выражение для продольной эффективной диэлектрической проницаемости турбулентной плазмы:

$$\varepsilon^{l}_{\text{эфф}}(\omega_0, k_0) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^3} k_0^2 \int_0^\infty \exp(-i\omega_0\tau)(2i - \omega_0\tau) \times$$

$$\times B_{zz}(0, \tau)\, d\tau + \frac{\omega_p^4}{(2\pi)^4 \omega_0^2} \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \left[c^2k_z^2/(\omega^2 - \omega_p^2)\right]}{\omega^2 - \omega_p^2 - k^2c^2} \frac{B_N(\rho, \tau)}{\langle N^2 \rangle} \times$$

$$\times \exp\left[i(\omega - \omega_0)\tau - i(\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k})\boldsymbol{\rho}\right] d\omega d\boldsymbol{k} d\boldsymbol{\rho} + \frac{\omega_p^4}{(2\pi)^4 \omega_0^3} \times$$

$$\times \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty} \frac{1}{\omega(\omega^2 - \omega_p^2 - k^2c^2)} \left\{ k_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} k_0 + \frac{\omega_0}{\omega} k_z + k_z - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2 - \omega_p^2} k_0 \right) B_{zz}(\boldsymbol{\rho}, \tau) + \left[\left(\frac{\omega_0}{\omega} - 1 \right) k_z + \left(2 - \frac{\omega_0}{\omega} \right) k_0 + \right. \tag{10}$$

$$+ \frac{c^2}{\omega^2 - \omega_p^2} \left(k^2 k_z + \frac{\omega}{\omega_0} k^2 k_0 - 2 k_z^2 k_0 + k_z k_0^2 - \frac{\omega}{\omega_0} k_z k_0^2 - \right.$$

$$\left.\left. - (\omega_0/\omega) k^2 k_z + (\omega_0/\omega) k^2 k_0 - 2k^2 k_0 \right) \right] k_i B_{iz}(\boldsymbol{\rho}, \tau) +$$

$$+ k_z[k_z - k_0(1 - (\omega/\omega_0))] B_{ii}(\boldsymbol{\rho}, \tau) - \left[c^2 k_z/(\omega^2 - \omega_p^2)\right] [k_z - k_0(1 -$$

$$\left. - (\omega/\omega_0))] k_i k_j B_{ij}(\boldsymbol{\rho}, \tau) \right\} \exp[i(\omega - \omega_0)\tau - i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0)\boldsymbol{\rho}]\, d\omega d\boldsymbol{k} d\boldsymbol{\rho},$$

где

$$k_0 = k_z^0, \quad B_N(\rho, \tau) = \langle N_1(\boldsymbol{r}, t) N_1(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) \rangle = \langle N_1^2 \rangle\, \Gamma(\rho, \tau),$$

$$B_{ij}(\boldsymbol{\rho}, \tau) = \langle V_i(\boldsymbol{r}, t) V_j(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) \rangle =$$

$$= \langle V^2 \rangle \left[(1 - \rho^2/l^2)\delta_{ij} + (\rho_i \rho_j / l^2)\right] \Gamma(\rho, \tau),$$

l — характерный масштаб корреляции случайного поля скоростей и концентрации плазмы. Для дальнейших расчетов используем простейший вид коэффициента корреляции

$$\Gamma(\rho, \tau) = \exp\left[-(\rho^2/l^2) - \left(\sqrt{\langle V^2 \rangle}\, |\tau| / l\right)\right]. \tag{11}$$

Для получения дисперсионного уравнения продольных волн среднего поля достаточно приравнять к нулю выражение (10).

Простые соотношения получаются только при некоторых предельных значениях параметров.

1) $k_0 l \gg 1, \quad |\omega_0 - \omega_p| l \gg \sqrt{\langle V^2 \rangle}$.

В этом случае крупномасштабных медленных флуктуаций макроскопической скорости и концентрации плазмы с учетом сделанных выше предположений дисперсионное уравнение имеет вид

$$(\omega_p - \omega_0)^2 = \left(k_0^2 \langle V^2 \rangle + \frac{1}{4} \omega_p^2 \frac{\langle N_1^2 \rangle}{\langle N \rangle^2} \right) \left[1 - i \frac{\sqrt{\langle V^2 \rangle}}{(\omega_p - \omega_0) l} \right]. \tag{12}$$

Из (12) нетрудно методом возмущений с учетом малости мнимого слагаемого в квадратных скобках получить выражение для волнового числа k_0 (ω_0 считаем действительным):

$$k_0=\frac{1}{\sqrt{\langle V^2\rangle}}\left[\sqrt{(\omega_0-\omega_p)^2-\frac{1}{4}\,\omega_p^2\,\frac{\langle N_1^2\rangle}{\langle N\rangle^2}}-i\,\frac{\omega_0-\omega_p}{2k_0 l}\right]$$

$$(\omega_0>\omega_p), \tag{13}$$

$$k_0=-\frac{1}{\sqrt{\langle V^2\rangle}}\left[\sqrt{(\omega_0-\omega_p)^2-\frac{1}{4}\,\omega_p^2\,\frac{\langle N_1^2\rangle}{\langle N\rangle^2}}+i\,\frac{\omega_p-\omega_0}{2|k_0|l}\right]$$

$$(\omega_0<\omega_p),$$

а также групповой скорости продольной волны среднего поля

$$v_{\text{гр}\,z}=\langle V^2\rangle\,[k_0/(\omega_0-\omega_p)]>0. \tag{14}$$

Из (13) и (14) видно, что в турбулентной плазме могут распространяться слабозатухающие потенциальные волны среднего поля с частотой, близкой к плазменной. Причем при $\omega_0<\omega_p$ вектор $\boldsymbol{k}_0$ антипараллелен групповой скорости, тем не менее волны всегда затухают вдоль направления групповой скорости. Величина последней, как легко видеть, из (13), (14), не превышает $\sqrt{\langle V^2\rangle}$.

2) $k_0 l\ll 1,\quad |\omega_0-\omega_p|\,l\ll\sqrt{\langle V^2\rangle}\ll\omega_p l.$

При этом дисперсионное уравнение для продольных волн существенно отличается от (12). Получение его точного вида математически затруднено. Однако качественный анализ показывает, что в данном случае, когда частота среднего поля ω_0 отличается от средней плазменной частоты на величину, малую по сравнению с характерной шириной спектра рассеянного поля $\left(\sqrt{\langle V^2\rangle}/l\right)$, происходит быстрое в масштабе длины волны затухание среднего поля в пространстве. Это, видимо, вызвано эффективной перекачкой энергии среднего поля в плазменные колебания на частоте ω_p. Во времени потенциальные колебания среднего поля затухают медленно (за время, значительно превышающее $2\pi/\omega_p$), что связано с малостью рассеянного поля.

3) $k_0 l\ll 1,\quad \omega_p l\ll\sqrt{\langle V^2\rangle}$.

В этом случае мелкомасштабных быстрых флуктуаций дисперсионное уравнение аналогично описанному в предыдущем пункте и имеет вид

$$\omega_0=\omega_p+ik_0^2 l\sqrt{\langle V^2\rangle}. \tag{15}$$

При этом, однако, сильное затухание среднего поля в пространстве скорее всего объясняется параметрическим взаимодействием нестационарной среды и волны, поскольку мнимое слагаемое в (15) не связано с рассеянным полем и определяется первым интегральным членом в (10).

В лабораторной системе отсчета для однородного турбулентного потока плазмы в случае малой по сравнению с $V_ф$ средней скоростью $\langle\boldsymbol{V}\rangle$ достаточно во всех дисперсионных уравнениях заменить ω_0 на $\omega_0-\boldsymbol{k}_0\cdot\langle\boldsymbol{V}\rangle$ и $\langle V^2\rangle$ на $\langle(\boldsymbol{V}-\langle\boldsymbol{V}\rangle)^2\rangle$. При этом в случае 1) вместо (14) получим

$$\boldsymbol{v}_{\text{гр}}=\langle\boldsymbol{V}\rangle+\langle(\boldsymbol{V}-\langle\boldsymbol{V}\rangle)^2\rangle\,[\boldsymbol{k}_0/(\omega_0-\omega_p-\boldsymbol{k}_0\cdot\langle\boldsymbol{V}\rangle)]. \tag{16}$$

Поскольку в реальных гидродинамических потоках $\langle V\rangle\gg\gg\sqrt{\langle(V-\langle V\rangle)^2\rangle}$, рассматриваемые возмущения среднего поля не могут (как видно из (16)) распространяться против потока. Однако перенос их энергии в поперечном по отношению к средней скорости направлении может оказаться существенным. Отметим, что в лабораторной системе отсчета анализируемые волны среднего поля не являются строго продольными и потенциальными.

В случаях 2) и 3) перенос плазменных колебаний среднего поля происходит только вдоль $\langle V \rangle$. Другими словами, в среднем по ансамблю существуют так называемые сносовые плазменные волны, которые в турбулентном потоке плазмы, в отличие от ламинарного [4], затухают вдоль групповой скорости, совпадающей со средней скоростью потока.

В заключение сопоставим полученные выше результаты с известными (см., например, [5]) соотношениями для продольных плазменных волн в однородной плазме с тепловым движением. Нетрудно заметить, что уравнение (12) во многом аналогично дисперсионному уравнению слабозатухающих плазменных волн. Пульсации макроскопической скорости в нашем случае играют ту же роль, что и тепловые скорости электронов в однородной плазме. Наиболее существенное отличие заключается, на наш взгляд, в том, что групповая скорость продольных волн среднего поля может быть сравнима со среднеквадратичной скоростью турбулентных пульсаций, в то время как для слабозатухающих плазменных волн скорость переноса энергии значительно меньше средней тепловой скорости электронов. Поэтому рассмотренный в настоящей работе процесс распространения потенциальных возмущений среднего поля может оказаться существенным и в том случае, когда тепловая скорость электронов и флуктуации макроскопической скорости плазмы — величины одного порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов Ю А., Тамойкин В. В. — Изв вузов — Радиофизика, 1970, **12**, № 3, с. 356
2. Басс Ф. Т., Бегиашвили Г. А., Монин Ю. С. — ФТТ, 1968, **10**, № 12, с. 3551.
3 Канер Э А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1959, **2**, № 5, с. 827.
4. Гавриленко В. Г, Лупанов Г. А., Степанов Н. С. — ЖТФ, 1971, **41**, № 3, с. 534.
5. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме — М.: Наука, 1967.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 22 сентября 1980 г.

LONGITUDINAL WAVES OF THE MEAN FIELD IN A COLD TURBULENT PLASMA

V. G. Gavrilenko, G. V. Dzhandieri

A tensor of the effective dielectric permittivity of a cold turbulent plasma has been found. It helps to show that weakly damping longitudinal waves of the mean electric field may propagate in the plasma. The group velocity of these waves in the reference system moving with the mean velocity of the flux is close to the rms velocity of the turbulent plasma motion.