ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 9 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 621.372

ДИФРАКЦИЯ H_{10}-ВОЛНЫ НА РЕЗОНАНСНОЙ ДИАФРАГМЕ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

А. А. Кураев, Г. Я. Слепян, А. Я. Слепян

Описан численный метод расчета дифракции H_{10}-волны на бесконечно тонкой симметричной резонансной диафрагме с апертурой прямоугольной формы в прямоугольном волноводе без потерь. Приведены результаты расчетов в широком диапазоне параметров.

Задачи дифракции волн на ленточных препятствиях в прямоугольных волноводах представляют большой теоретический и практический интерес. Им посвящено значительное количество работ. Наиболее полно изучены свойства препятствий, обладающих специальными свойствами симметрии, позволяющими свести решаемую задачу к двумерной и применить эффективные строгие методы теории дифракции [1–3] (индуктивные и емкостные диафрагмы и полоски в прямоугольном волноводе и т. д.). Другой класс подробно исследованных задач — дифракция на препятствиях с малым по сравнению с длиной волны отверстием или узкой щелью [4, 5]. Исследование резонансной диафрагмы в общем случае, без каких-либо ограничений на параметры задачи, представляет значительные трудности и возможно с использованием лишь прямых численных методов.

Первая попытка решения данной задачи описана в [6], где на основе вариационного метода Швингера и некоторых дополнительных малообоснованных предположений получена приближенная формула для проводимости резонансной диафрагмы с прямоугольной апертурой*. Общие методы для диафрагмы в волноводе произвольного сечения предложены в [7, 8]. Родственные задачи рассматривались в [9–12]. Однако в литературе отсутствуют численные результаты для резонансной диафрагмы даже с прямоугольной апертурой.

Настоящая статья посвящена описанию нового прямого численного метода исследования дифракции H_{10}-волны на симметричной бесконечно тонкой идеально проводящей диафрагме с прямоугольной апертурой в волноводе прямоугольного сечения без потерь (рис. 1а). Характерной особенностью данного метода является учет особенностей поля на ребрах, а также компактность алгоритма и его экономичность при практической реализации. В статье приводятся численные результаты, полученные на основе данного подхода. Отметим, что он может быть использован и для ряда других родственных задач теории дифракции

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для удобства формулировки интегральных уравнений будем решать двойственную по Фельду задачу (рис. 1б) (стенки волновода на рис. 1б — магнитные). Пусть $\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{h}_1 \end{matrix}\right\}$ — H_{10}-волна единичной амплитуды прямоугольного волновода, $\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{E}_1 \\ \boldsymbol{H}_1 \end{matrix}\right\}$ — полное электромагнитное поле

* Окончательные соотношения [6], как отмечено в [5], неверны ввиду допущенных при их выводе алгебраических ошибок.

в «основной» задаче (рис. 1а), $\boldsymbol{e}_2 = \rho \boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2 = -\rho^{-1} \boldsymbol{e}_1$ ($\rho = 120\pi$ [*Ом*] — волновое сопротивление свободного пространства), $\left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{E}_2 \\ \boldsymbol{H}_2 \end{matrix} \right\}$ — полное поле в двойственной задаче (рис. 1б). Тогда, согласно принципу двойственности [13], решения основной и двойственной задач связаны соотношениями ($z > 0$)

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \rho \boldsymbol{H}_2, \qquad \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{h}_1 - \frac{1}{\rho} \boldsymbol{E}_2. \tag{1}$$

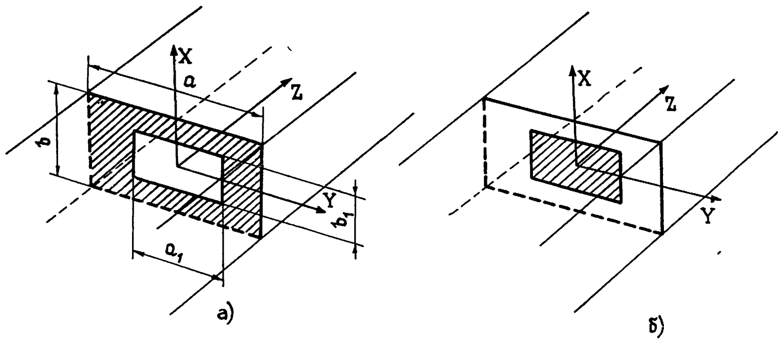

Рис. 1.

Будем рассматривать наиболее интересный для практики одномодовый режим волновода*. При этом поле в дальней зоне ($z \to +\infty$) полностью характеризуется коэффициентом прохождения T_1, который связан с коэффициентом отражения в двойственной задаче R_2 соотношением

$$T_1 = -R_2. \tag{2}$$

Введем потенциалы Боргниса U, V [14] соотношениями

$$E_y = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) U, \qquad E_x = \frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{3}$$

k — волновое число в свободном пространстве. Так как $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{x}_0) = 0$, то для вычисления R_2 достаточно определить только функцию U.

Задавая U в виде потенциала простого слоя с неизвестной плотностью $\sigma(\boldsymbol{R})$, распределенной по апертуре A, можно получить следующее интегродифференциальное уравнение для $\sigma(\boldsymbol{R})$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) \int\limits_A \sigma(\boldsymbol{R}') \, G_U(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}') \, dA' = -\cos \frac{\pi}{a} y, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}' \in A,$$

где $G_U(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R})$ — функция Грина прямоугольного волновода, удовлетворяющая граничным условиям

---

* Ввиду симметрии задачи относительно осей $0X$ и $0Y$ возможно возбуждение только волн типов $H_{2m+1, 2n}$, $E_{2m+1, 2n}$, в силу чего границы одномодового режима определяются равенством

$$ka < \pi \min \left\{ 3, \sqrt{1 + \left(\frac{2a}{b} \right)^2} \right\}.$$

$$G_U\Big|_{y=\pm a/2}=0, \qquad \frac{\partial G_U}{\partial x}\Big|_{x=\pm b/2}=0.$$

Обращая дифференциальный оператор в (4), получаем

$$\int_A \sigma(\boldsymbol{R}')\, G_U(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{R}')\, dA' = C_1(x)\cos ky + C_2(x)\sin ky - \frac{\cos\frac{\pi}{a}y}{k^2-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}, \quad (5)$$

где $C_{1,2}(x)$ — некоторые неизвестные функции. Из свойств симметрии следует, что $C_2(x)=0$, $C_1(x)$ должно быть определено из равенств

$$\sigma\left(x,\ \pm\frac{a_1}{2}\right)=0, \quad (6)$$

вытекающих из условия Мейснера на ребре при $y=\pm\frac{a_1}{2}$. Система (5), (6) значительно удобнее для численного решения, чем исходное интегродифференциальное уравнение (4). При использовании в (5) и (6) интерполяционного метода отпадает необходимость конечно-разностной аппроксимации оператора $\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2\right)$. Что касается проекционного метода, то сходимость рядов для матричных элементов системы (5), (6) значительно выше, чем для уравнения (4).

2. ПРОЕКЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ

В соответствии с общей идеей проекционного метода представим

$$\sigma(\boldsymbol{R})=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} d_{mn}\frac{T_{2n}\left(\frac{2x}{b_1}\right)}{\sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2-x^2}}\varphi_m(y); \quad (7)$$

$$C_1(x)=\sum_{q=0}^{Q} c_q\Psi_q(x), \quad (8)$$

где d_{mn}, c_q — искомые коэффициенты, $T_\nu(x)$ — полиномы Чебышева 1-го рода ν-го порядка, $\varphi_m(y)$, $\Psi_q(x)$ — некоторые полные системы функций соответственно в $L_2\left(-\frac{a_1}{2},\ \frac{a_1}{2}\right)$ и $L_2\left(-\frac{b_1}{2},\ \frac{b_1}{2}\right)$. Отметим, что разложение (7) почленно удовлетворяет правильному условию на ребре при $x=\pm\frac{b_1}{2}$.

Подставляя (7), (8) в (5), (6) и выполняя обычные (см., например, [13]) проекционные операции, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для d_{mn}, c_q:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1M} & -\Lambda_1 \\ \hline A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2M} & -\Lambda_2 \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline A_{M1} & A_{M2} & \ldots & A_{MM} & -\Lambda_M \\ \hline \Gamma_1 & \Gamma_2 & \ldots & \Gamma_M & 0 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} d_{(1)} \\ \hline d_{(2)} \\ \hline \ldots \\ \hline d_{(M)} \\ \hline c \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} B_{(1)} \\ \hline B_{(2)} \\ \hline \ldots \\ \hline B_{(M)} \\ \hline 0 \end{array}\right]. \quad (9)$$

Здесь $A_{mm'}$ — $N \times N$ — матрица с элементами

$$A_{mm'nn'} = \frac{2(-1)^{n+n'}\pi^2}{jab} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{J_{2n}\left(\frac{p\pi b_1}{b}\right) J_{2n'}\left(\frac{p\pi b_1}{b}\right)}{\sqrt{k^2 - \frac{(2s-1)^2\pi^2}{a^2} - \frac{4p^2\pi^2}{b^2}}} \times$$
$$\times \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \varphi_m(y) \cos\frac{(2s-1)\pi}{a} y dy \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \varphi_{m'}(y) \cos\frac{(2s-1)\pi}{a} y dy (2-\delta_{p0}), \tag{10}$$

δ_{p0} — символ Кронекера, $J_\nu(x)$ — функция Бесселя 1-го рода ν-го порядка, Λ_m — $N \times Q$ — матрица с элементами

$$\Lambda_{mnq} = \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \varphi_m(y) \cos ky dy \int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} \frac{T_{2n}\left(\frac{2x}{b_1}\right) \Psi_q(x)}{\sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 - x^2}} dx, \tag{11}$$

Γ_m — $Q \times N$ — матрица с элементами

$$\Gamma_{mqn} = \varphi_m\left(\frac{a_1}{2}\right) \int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} \frac{T_{2n}\left(\frac{2x}{b_1}\right) \Psi_q(x)}{\sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 - x^2}} dx,$$
$$d_{(j)} = \begin{bmatrix} d_{j0} \\ --- \\ d_{j1} \\ --- \\ \cdots \\ --- \\ d_{jN} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_0 \\ --- \\ c_1 \\ --- \\ \cdots \\ --- \\ c_Q \end{bmatrix}, \tag{12}$$
$$j = 0, 1, 2, \ldots, M.$$

Строение вектора $B_{(j)}$ полностью аналогично $d_{(j)}$, элементы выражаются соотношением

$$B_{jn} = -\pi\delta_{n0} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \frac{\cos\frac{\pi}{a} y}{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \varphi_m(y) dy. \tag{13}$$

Конкретизируя $\{\varphi_m\}$, $\{\Psi_q\}$, можно получить различные варианты данного алгоритма.

Коэффициент отражения R_2 в M-приближении выражается следующим образом:

$$R_2^M = \frac{\pi\sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}{jab} \sum_{m=0}^{M} d_{m0} \int_{-a_1/2}^{a_1/2} \varphi_m(y) \cos\frac{\pi}{a} y dy. \tag{14}$$

В одномодовом режиме справедливо следующее тождество, выражающее баланс активных мощностей в системе:

$$\operatorname{Re} R = -|R|^2. \tag{15}$$

Это равенство может быть использовано для контроля точности вычислений.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При численной реализации описанного алгоритма функции $\{\varphi_m(y)\}$ были выбраны в виде $\cos\frac{m\pi}{a_1}y$, функции $\{\Psi_q(x)\}$ задавались в двух вариантах:

$$\Psi_q^{\mathrm{I}}(x) = T_{2q}\left(\frac{2x}{b_1}\right), \qquad \Psi_q^{\mathrm{II}}(x) = \cos\frac{q\pi}{b_1}x.$$

Легко видеть, что при таком выборе $\{\varphi_m(y)\}$, $\{\Psi_q(x)\}$ все квадратуры в (10)—(14) вычисляются в замкнутом виде.

Наиболее трудоемкой операцией в данном алгоритме является расчет рядов в формуле (10). Заметим, что суммирование в (10) необходимо проводить с высокой степенью точности, чтобы не возникала неустойчивость алгоритма. Ряды для $A_{mm'nn'}$ были преобразованы к удобному для расчетов виду путем выделения главной части, получаемой из (10) предельным переходом $p\to\infty$, $s\to\infty$. Разностный ряд сходится быстрее исходного, а медленно сходящийся ряд в главной части не зависит от m, m', n, n' и, следовательно, вычисляется однократно для всей матрицы A.

Численные эксперименты показывают, что в разностном ряду достаточно учитывать по 30—40 членов по каждой переменной суммирования, а в главной части — 50—60 членов по s и 100—120 — по p.

Таблица

M	N	$ka = 1{,}1\,\pi$		$ka = 2{,}5\,\pi$	
		$\lvert T_1\rvert$	φ, *град*	$\lvert T_1\rvert$	φ, *град*
3	1	0,63212	50,75	0,95978	— 16,30
	2	0,63791	50,32	0,95972	— 16,31
5	1	0,65505	48,87	0,95804	— 16,65
	2	0,66494	48,24	0,95783	— 16,68
	3	0,66519	48,24	0,95780	— 16,67
7	2	0,67032	47,01	0,95667	— 16,88
	3	0,67525	46,96	0,95672	— 16,87
8	2	0,68625	46,53	0,95614	— 17,02
	3	0,68892	46,44	0,95624	— 17,00

Система (9) решалась методом Гаусса с выбором главного элемента. В таблице приведены результаты расчетов по данному алгоритму при различных ka, M, N $(Q = N)$ для $\frac{a}{b} = 2$, $\frac{a}{a_1} = 1{,}5$, $\frac{b}{b_1} = 2$ $(\Psi_q(x) = \Psi_q^{\mathrm{I}}(x))$. Расчеты показывают, что скорость сходимости в основном достаточно высока. Однако при $ka \approx \pi$ сходимость алгоритма по n, q замедляется и для стабилизации результатов требуются значительно большие, чем в других случаях, N и Q. Если N, Q недостаточно велики, то коэффициенты c_q не убывают с ростом q; по поведению c_q

можно судить о правильности выбора N^*. Скорость сходимости алгоритма практически не изменилась от замены $\{\Psi_q^{\mathrm{I}}(x)\} \to \{\Psi_q^{\mathrm{II}}(x)\}$. Численные эксперименты показывают, что необходимо выполнение условия $N \geqslant Q$; в противном случае матрица системы (9) становится плохо обусловленной.

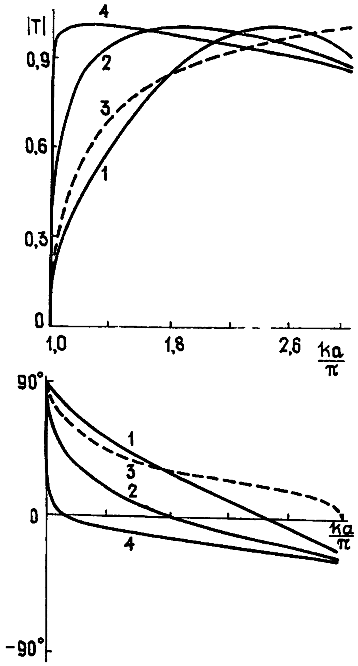

Рис. 2.

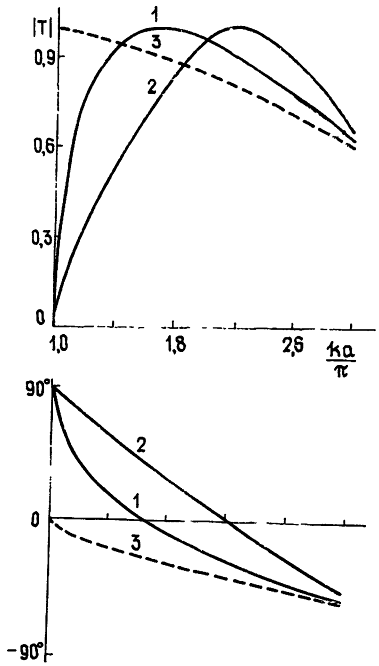

Рис. 3.

Рис. 2. Зависимости модуля и фазы коэффициента прохождения от ka/π: $a/b = 2$; *1* — $a/a_1 = 2$, $b/b_1 = 2$; *2* — $a/a_1 = 1{,}5$, $b/b_1 = 2$; *3* — $a/a_1 = 2$, $b/b_1 = 1{,}11$; *4* — $a/a_1 = 1{,}11$, $b/b_1 = 2$.

Рис. 3. Зависимости модуля и фазы коэффициента прохождения от ka/π: $a/b = 2$, $b/b_1 = 3$; *1* — $a/a_1 = 1{,}5$; *2* — $a/a_1 = 2$; *3* — $a/a_1 = 1{,}05$.

На рис. 2, 3 показаны частотные характеристики модуля и фазы коэффициента прохождения T_1 для различных значений a/a_1, b/b_1, $a/b = 2$. Из приведенных графиков видно, что при $a/a_1 \neq 1$, $b/b_1 \neq 1$ существуют значения k_0, при которых $|T_1| = 1$, а $\varphi_{T_1} = 0$ (резонанс). При уменьшении a/a_1 либо увеличении b/b_1 k_0 уменьшается и стремится к $k_{\text{кр}}$ для волны H_{10}; при увеличении a/a_1 либо уменьшении b/b_1 k_0 стремится к $k_{\text{кр}}$ для волны H_{30}. На рис. 4 показана зависимость $k_0 a/\pi$ от a/a_1 для $b/b_1 = 2$.

Рис. 4. Зависимость $k_0 a/\pi$ от a/a_1; $b/b_1 = 2$, $a/b = 2$.

Все расчеты, приведенные в настоящей статье, выполнены на ЭВМ ЕС-1022; время счета одной частотной характеристики (9 точек) примерно 5—7 минут.

---

* Заметим, что даже в тех случаях, когда N и Q заведомо недостаточны, условия (15) выполняются с высокой степенью точности.

Авторы благодарны А. С. Ильинскому за полезные обсуждения и советы при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. — М.: Сов. радио, 1966.
2. Шестопалов В. П., Щербак В. В — Радиотехника и электроника, 1966, **11**, № 4, с. 675, № 6, с. 1066; 1965, **10**, № 6, с. 1043; № 7, с. 1202.
3. Заболотиков Ю. П.— Радиотехника и электроника, 1964, **9**, № 4, с. 671; 1965, **10**, № 4, с. 642, 1967, **12**, № 2, с. 344.
4. Фихманас Р. Ф., Фридберг П. Ш.—Радиотехника и электроника, 1975, **18**, № 5, с. 909; № 6, с. 1022.
5. Фридберг П. Ш. Диссертация. Вильнюс, 1965.
6. Левин Л. Современная теория волноводов.— М.: Мир, 1954.
7. Никольский В. В.— Радиотехника и электроника, 1975, **20**, № 10, с. 2046.
8. Фельд Я. Н.— Радиотехника и электроника, 1977, **22**, № 1, с. 3.
9. Ильинский А. С., Свешников А. Г. Лекции на VI Всесоюзной школе-семинаре по дифракции и распространению волн. — Рязань: Б. И., 1975.
10. Свешников А. Г., Репин В. М.— В сб.: Вычислительные методы и программирование — М.: МГУ, 1973, вып. 20, с. 12.
11. Репин В. М.— ЖВММФ, 1971, **11**, № 1, с. 152.
12. Ильинский А. С., Гринев А. Ю., Котов Ю. В.— Радиотехника и электроника, 1978, **23**, № 5, с. 922.
13. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн.— М.: Наука, 1975.
14. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров.— М.: Наука, 1965.

Минский радиотехнический институт

Поступила в редакцию
18 июля 1979 г.

DIFFRACTION OF H_{10}-WAVE BY A RESONANCE DIAPHRAGM IN A RECTANGULAR WAVEGUIDE

A. A. Kuraev, G. Ya. Slepyan, A. Ya. Slepyan

A numerical method is decribed for the calculation of H_{10}-wave diffraction by an infinite thin symmetric resonance diaphragm with an aperture of a rectangular form in a rectangular waveguide without losses. Calculational results in a wide range of parameters are given.