ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 9 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 538.574 : 538.56 : 519.25

ВОЛНЫ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ БЕЗ ДИСПЕРСИИ

С. И. Аверков, В. П. Болдин

Рассматриваются некоторые вопросы линейной теории распространения электромагнитных волн в недиспергирующих средах с бегущими параметрами; частными случаями таких сред являются неоднородные и нестационарные однородные среды. Показана возможность однозначного представления полей в средах с бегущими параметрами в виде спектра независимо распространяющихся негармонических волн, имеющих переменные амплитуды и фазовые скорости. Обсуждено утверждение Щелкунова [11] о неразличимости стоячих и бегущих волн в неоднородных средах.

Открытие лазера вызвало большой поток публикаций по исследованию взаимодействия вещества с сильными световыми полями [1]. В последние годы вследствие создания новых радиоматериалов много внимания уделялось также развитию теории ударных электромагнитных волн в нелинейных средах [2]. Вместе с тем, в литературе недостаточно обсуждались принципиальные вопросы линейной теории распространения волн в нестационарных неоднородных средах без дисперсии, представление о которых имеет важное значение в диапазоне радиочастот, имеющих период, много больший времени релаксации вещества ($\sim 10^{-14}$ *с*).

Связь между напряженностями $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ и индукциями $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ полей в них может быть определена с помощью величин $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$, явно зависящих от координат и времени, что в ряде случаев позволяет находить точные решения достаточно общих задач, представляющих теоретический и практический интерес. На основании таких решений в опубликованных ранее работах была показана возможность в указанных средах преобразования монохроматических сигналов в импульсные [3], распространения ТЕ,- ТМ-, ТЕМ-волн [4, 5], а также получены и другие интересные результаты.

Однако остается недостаточно изученным ряд вопросов и, в частности, имеющий методическое значение вопрос о возможности однозначного представления полей в них в виде суперпозиции независимо распространяющихся негармонических волн. В 1947 г. Кофинком [12] была показана справедливость этого представления применительно к стационарным неоднородным средам $\left(\text{в случае изменения их диэлектрической проницаемости по закону } \varepsilon = p^2 + \frac{1}{2k^2}\left[\frac{p''}{p} - \frac{3}{2}\left(\frac{p'}{p}\right)^2\right], \text{ где } p = p(z) \text{ и } k = \text{const} \right)$, в которых могут распространяться волны $c_{1,2}\, p^{-1/2}(z) \exp\left(ik\int p(z)\,dz \mp i\omega t\right)$ ($\omega = \text{const}$). На необходимости изучения этого вопроса в более общем случае в последующие годы не обращалось, по-видимому, внимания вследствие высказанного в 1951 г. Щелкуновым [11] утверждения о принципиальной неразличимости бегущих и стоячих волн в неоднородной среде. Обсуждению этого мнения и доказательству возможности указанного спектрального представления в средах с бегущими параметрами посвящена данная статья.

1. ТОЖДЕСТВО ЩЕЛКУНОВА

В подтверждение справедливости утверждения об отсутствии различия между стоячей и бегущей волнами в неоднородной среде Щелкунов указал на тождество*

$$\cos\beta z + \varepsilon e^{i\beta z} = \sqrt{(1+\varepsilon)^2\cos^2\beta z + \varepsilon^2\sin^2\beta z}\,\exp\left(i\,\mathrm{arctg}\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\,\mathrm{tg}\,\beta z\right),$$

где $\varepsilon = \mathrm{const}$, $\beta = \mathrm{const}$ и z — текущая координата. Левая часть его описывает волну**, являющуюся в основном стоячей (если $\varepsilon \ll 1$), так как доминирует первый член. Выражение же справа имеет вид бегущей волны.

Последнее утверждение основано, в сущности, на соображении о невозможности однозначного представления вещественной части выражений вида $y(z) = V(z)e^{i\Psi(z)}$ (или $V(z)\exp[i\Psi(z) - i\omega t]$), если функции $V(z)$ и $\Psi(z)$ считать произвольными. Но в случае физически реальных колебаний, в частности, описываемых уравнением $y'' + W(z)y = 0$, функции $V(z)$ и $\Psi(z)$ непроизвольны [10], и при обсуждении вопроса о записи таких колебаний в различной форме нужно учитывать их свойства, определяемые исходными уравнениями. Находя поэтому уравнение, которому удовлетворяет $\cos\beta z + \varepsilon e^{i\beta z}$, имеем $y'' + \beta^2 y = 0$, $W(z) = \beta^2$. Отсюда заключаем, что выражение в правой и левой частях тождества описывает волны в однородной стационарной среде. Следовательно, $V(z) = \sqrt{(1+\varepsilon)^2\cos^2\beta z + \varepsilon^2\sin^2\beta z} = \mathrm{const}$, откуда находим $\varepsilon = -1/2$. При этом тождество обращается в тривиальное и не подтверждает высказанного Щелкуновым мнения.

Не останавливаясь на обсуждении аналогичных высказываний в других работах, перейдем к доказательству справедливости указанного выше представления полей в рассматриваемых средах.

2. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Ограничимся рассмотрением описываемых одномерными уравнениями***

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mu H}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \varepsilon E}{\partial t}, \tag{1}$$

E- и H-полей в нестационарной неоднородной среде без дисперсии и потерь. Если предположить, что проницаемости среды μ, ε есть функции бегущего параметра $\eta = t - x/a$ (a — скорость бегущего параметра), то в общем случае переменные в уравнениях (1) не разделяются. Применявшиеся с этой целью преобразования в работах [8, 9] не приводят, однако, к достаточно простому виду преобразуемых уравнений.

Для преодоления (по возможности) связанных с этим трудностей введем в (1) вместо x и t новые переменные. Перейдем сначала, как и в [3], к координатам, движущимся со скоростью волны параметра:

$$x' = x, \qquad \eta = t - \frac{x}{a}, \tag{2}$$

* В записи, приведенной в [6].

** При умножении на временной множитель $e^{-i\omega t}$.

*** Аналогичными уравнениями описываются, как известно, волны в линиях передачи с переменными величинами погонных индуктивностей и емкостей и волны в струнах, имеющих переменные плотность и натяжение. Поэтому приводимые далее выражения справедливы и для таких систем.

а затем заменим E и H линейно сязанными с ними величинами

$$E' = \frac{\varepsilon}{c} E - \frac{1}{a} H, \qquad H' = \frac{\mu}{c} H - \frac{1}{a} E, \tag{3}$$

совпадающими с точностью до постоянного множителя с выражениями для напряженностей полей в движущейся системе координат (2). Из (1)—(3) имеем

$$\begin{gathered} \frac{\partial E'}{\partial \eta} + \frac{1}{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{a^2}} \left\{ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial H'}{\partial x'} + \frac{1}{a} \frac{\partial E'}{\partial x'} \right\} = 0, \\ \frac{\partial H'}{\partial \eta} + \frac{1}{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{a^2}} \left\{ \frac{\mu}{c} \frac{\partial E'}{\partial x'} + \frac{1}{a} \frac{\partial H'}{\partial x'} \right\} = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Исключая из (4) H' и переходя в полученном таким образом уравнении для E' к координатам, связанным с характеристиками

$$\xi = x' - \int \frac{v^2}{a} \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)^{-1} d\eta, \qquad \tau = \int \frac{v}{\rho} \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)^{-1} d\eta, \tag{5}$$

где $v = c/\sqrt{\mu(\eta)\varepsilon(\eta)}$, $\rho = \sqrt{\mu(\eta)/\varepsilon(\eta)}$, находим для E' уравнение

$$\frac{\partial^2 E'}{\partial \xi^2} - \rho^{-2}(\tau) \frac{\partial^2 E'}{\partial \tau^2} = 0. \tag{6}$$

Здесь $\rho(\tau) = \rho[\eta(\tau)]$.

Волновое уравнение вида (6) часто встречается в физике. Однако, насколько известно, в случае сред с бегущими параметрами оно ранее не рассматривалось.

В частном случае, если $\rho(\tau) = \mathrm{const}$, то, решая (6), имеем

$$E'(\xi, \tau) = F_1(\xi - \rho\tau) + F_2(\xi + \rho\tau)$$

и из (2)—(5) находим

$$\begin{gathered} E(x, t) = \frac{\rho}{\frac{1}{v} - \frac{1}{a}} F_1\left(x - \int \frac{d\eta}{\frac{1}{v} - \frac{1}{a}}\right) + \\ + \frac{\rho}{\frac{1}{v} + \frac{1}{a}} F_2\left(x + \int \frac{d\eta}{\frac{1}{v} + \frac{1}{a}}\right). \end{gathered} \tag{7}$$

Полученное выражение совпадает с найденным ранее в работе [3].

3. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

При изменении $\rho(\tau)$ по произвольному закону, решая (6) методом разделения переменных, получаем

$$E'(\xi, \tau) = \Phi(\tau) \left[c_1 e^{ik\xi} + c_2 e^{-ik\xi}\right], \tag{8}$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования, k — постоянная разделения, а функция $\Phi(\tau)$ удовлетворяет уравнению колебаний

$$\frac{d^2\Phi}{d\tau^2} + k^2\rho^2(\tau)\Phi = 0. \tag{9}$$

Решение (9) удобно искать в виде [10]

$$\Phi(\tau) = d_{1,2}V(\tau)\exp\left(\pm ik\rho_0\int V^{-2}(\tau)\,d\tau\right), \tag{10}$$

где $d_{1,2}$ — произвольные постоянные, ρ_0 — значение $\rho(\tau)$ при постоянных параметрах среды и $V(\tau)$ — амплитудный множитель, определяемый из уравнения

$$\frac{d^2V}{d\tau^2} - k^2\rho_0^2V^{-3} + k^2\rho^2(\tau)V = 0. \tag{11}$$

Выражения вида (10), имеющие форму ВКБ-решения, рассматривались в [6, 12] применительно к неоднородным средам при обсуждении обратной задачи определения законов изменения параметров среды по заданному полю*.

В работе [10] было показано, что при устранении лишних решений (11) (имеющего, например, при $\rho(\tau) = \mathrm{const}$ лишенное физического смысла значение $V(\tau) \neq \mathrm{const}$) амплитудный множитель $V(\tau)$ определяется однозначно. Подставив (10) в (8) и учитывая (2)—(5), получим

$$E_k(x, t) = \frac{v\rho}{1-\frac{v^2}{a^2}}\left\{\left[V + \frac{kv\rho_0}{\rho V} - \frac{V'}{ika}\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\right]C_{1k}e^{ik\varphi_-} + \right.$$
$$\left. + \left[V - \frac{kv\rho_0}{\rho V} - \frac{V'}{ika}\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\right]C_{2k}e^{ik\varphi_+}\right\}, \tag{12}$$

где $V' = dV/d\eta$, $\varphi_\pm = x \pm \int\left(\frac{kv\rho_0}{\rho V^2} \mp \frac{v^2}{a}\right)\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)^{-1}d\eta$ и C_{1k} и C_{2k} — произвольные постоянные.

Таким образом, однозначное определение в (10) амплитудного $V(\tau)$ и фазового $\int V^{-2}(\tau)\,d\tau$ множителей дает возможность однозначного разбиения полного поля в среде с бегущими параметрами на независимо распространяющиеся волны, имеющие переменные амплитуды и фазы.

Заметим, что в рассматриваемых средах понятие о стоячей волне представляется, вообще говоря, менее полезным, чем о бегущих. Действительно, выражение негармонической стоячей волны может быть простым, лишь если образующие ее бегущие волны идентичны. Но в общем случае (12) это не имеет места вследствие различных условий распространения бегущих волн по и против направления бегущего параметра. Однако сделанное утверждение не относится к неоднородным стационарным и нестационарным однородным средам**.

В частности, применительно к последним ранее было показано [5], что законы пространственного распределения полей в них не отличаются от законов их распределения в средах с постоянными параметрами, что указывает на возможность использования в этом случае представления о стоячих волнах.

* В частности, эти выражения (10) трактовались в [6, 12] как независимо распространяющиеся волны.

** А также к средам со стоячей волной параметра, не обсуждаемым в данной статье.

4 ИЗМЕНЕНИЕ БЕГУЩЕГО ПАРАМЕТРА ПО ЗАКОНУ $\rho(\tau)=\rho_0(1+\alpha\tau)^{-2}$

Уравнение (6) допускает точное решение лишь в немногих частных случаях. В качестве примера рассмотрим случай, когда $\rho(\tau)$ изменяется по обратному квадратичному закону $\rho(\tau) = \rho_0(1+\alpha\tau)^{-2}$*, где ρ_0 и α — постоянные величины. Тогда

$$E'(\xi, \tau) = \frac{1+\alpha\tau}{\rho_0}\left\{F_1\left(\xi - \int\rho\, d\tau\right) + F_2\left(\xi + \int\rho\, d\tau\right)\right\}.$$

Отсюда, используя (2)—(5), можно найти $E(x, t)$ и $H(x, t)$. В частности, для $E(x, t)$ находим

$$E(x, t) = \frac{1}{1+\alpha\tau(\eta)}\left\{\frac{1}{\frac{1}{v}-\frac{1}{a}}F_1(\varphi_-) + \frac{1}{\frac{1}{v}+\frac{1}{a}}F_2(\varphi_+)\right\} - \\ - \frac{\alpha}{\rho_0 a\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{a^2}\right)}\int\{F_1+F_2\}\,d\xi, \tag{13}$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции, определяемые граничными и начальными условиями, и $\varphi_\pm = x + \int(a^{-1}\pm v^{-1})^{-1}\,d\eta$.

Например, если начальные и граничные условия таковы, что

$$F_1(\varphi_-) = \cos\varphi_-, \quad F_2(\varphi_+) = 0,$$

то имеем

$$E(x, t) = \frac{1}{1+\alpha\tau(\eta)}\frac{\cos\varphi_-}{\frac{1}{v}-\frac{1}{a}} + \frac{\alpha\sin\varphi_-}{\rho_0 a\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{a^2}\right)}. \tag{14}$$

Точные решения (13), справедливые при любой скорости изменения параметров ε и μ, показывают возможность независимого распространения в среде негармонических волн. Определяя $v_\Phi = -\frac{\partial\varphi_\pm}{\partial t}\Big/\frac{\partial\varphi_\pm}{\partial x}$, находим, что фазовые скорости этих волн равны

$$v_\Phi = \pm c/\sqrt{\mu(\eta)\,\varepsilon(\eta)}.$$

Согласно приведенным выражениям (13), (14) имеющая волновой характер модуляция амплитуд волн изменяется в каждой точке пространства синхронно с бегущим параметром. На основании (12) можно также заключить, что этот эффект является характерным и для сред с другими законами изменения $\rho(\tau)$.

5. ДВА ПРЕДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЯ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ

Равенства (12) носят общий характер. Поскольку входящий в них амплитудный множитель $V(\tau)$ непросто определить из нелинейного уравнения (11), то рассмотрим здесь выражение полей E и H, находя $V(\tau)$ в двух предельных случаях изменения параметров среды.

---

* При этом, согласно (5), выражение $\rho(\eta)$ определяется из алгебраического уравнения $\frac{v_0^2}{\alpha a^2}\rho_0^{-3/2}\rho^{3/2} + \rho_0^{1/2}\rho^{-1/2} = \alpha\frac{v_0}{\rho_0}\eta + c'$, где $v_0 = \{v\}_{\alpha=0}$, $c' = \text{const}$, $\mu = \text{const}$.

Так, для среды с медленно меняющимися параметрами в приближении ВКБ имеем

$$\Phi(\tau) = d_{1,2}\rho^{-1/2}(\tau)\exp\left(\pm ik\int\rho(\tau)\,d\tau\right), \tag{15}$$

где $d_{1,2} = \text{const}$. Используя (15), (8) и учитывая (2)—(5), находим

$$E'_k(\xi,\ \tau) = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left\{C_{1k}\exp\left[ik\left(\xi - \int\rho\,d\tau\right)\right] + C_{2k}\exp\left[ik\left(\xi + \int\rho\,d\tau\right)\right]\right\} \tag{16}$$

и на основании (3), (4), (16) получаем

$$E_k(x,\ t) = \sqrt{\rho}\left\{\frac{C_{1k}}{\frac{1}{v} - \frac{1}{a}}\left[1 + \frac{\rho'}{ika\sqrt{\rho}}\left(1 - \frac{v}{a}\right)\right]e^{ik\varphi_-} + \right.$$
$$\left. + \frac{C_{1k}}{\frac{1}{v} + \frac{1}{a}}\left[1 + \frac{\rho'}{ika\sqrt{\rho}}\left(1 + \frac{v}{a}\right)\right]e^{ik\varphi_+}\right\}, \tag{17}$$

где $\rho' = d\rho/d\eta$, $\varphi_\pm = x + \int(a^{-1} \pm v^{-1})^{-1}d\eta$. В этом случае разбиение полного поля на независимо распространяющиеся негармонические волны выполняется, очевидно, однозначно.

Рассмотрим теперь интересный случай, когда μ или ε меняется по периодическому закону. Пусть $\mu = \mu_0$ и

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \alpha\sin\Omega\eta)^{-1}, \tag{18}$$

где ε_0, α, Ω — постоянные величины, $\alpha \ll 1$. Пользуясь (5) и (17) и ограничиваясь условием $b^2 > \alpha^2$ $\left(b = \dfrac{a^2}{v^2} - 1\right)^*$, определим

$$\rho(\tau) = \rho_0\left[1 + 2\alpha\frac{\frac{\alpha}{b} + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{b^2}}\ \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\beta\tau}{1 + \left(\frac{\alpha}{b} + \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{b^2}}\ \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\beta\tau\right)^2}\right]^{1/2},$$

где $\rho_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, $v_0 = c/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, $\beta = \rho_0 v_0\Omega\sqrt{b^2 - \alpha^2}/a$. Решение (12) для амплитудного множителя $V(\tau)$ будем искать методом малого параметра. Тогда в первом приближении имеем [10]

$$V(\tau) = 1 + \alpha p\sin\beta_0\tau, \tag{19}$$

где $\beta_0 = \rho_0 v_0\Omega b/a$, $p = \left[\dfrac{\Omega^2}{k^2 v_0^2}\left(1 - \dfrac{v_0^2}{a^2}\right) - 4\right]^{-1}$. Подставляя (19) в (10), (8), получаем

$$E'_k(\xi,\ \tau) = V(\tau)\left\{C_{1k}\exp\left[ik\left(\xi - \int\rho_0 V^{-2}d\tau\right)\right] + \right.$$
$$\left. + C_{2k}\exp\left[ik\left(\xi + \int\rho_0 V^{-2}d\tau\right)\right]\right\} \tag{20}$$

и на основании (2)—(5) находим

$$E_k(x, t) = \frac{C_{1k}\rho_0}{\dfrac{1}{v_0} - \dfrac{1}{a}} [1+\alpha A_1(\eta)]\, e^{i\varphi_-} + \frac{C_{2k}\rho_0}{\dfrac{1}{v_0} + \dfrac{1}{a}} [1+\alpha A_2(\eta)]\, e^{i\varphi_+}, \quad (21)$$

где

$$\varphi_\pm = \frac{k}{1 \pm \dfrac{v_0}{a}} \left[x \pm v_0 t + \alpha \frac{v_0}{\Omega} \frac{\dfrac{v_0}{a} \pm 2p\left(1 \pm \dfrac{v_0}{a}\right)}{1 - \dfrac{v_0^2}{a^2}} \cos\Omega\eta \right],$$

$$A_{1,2}(\eta) = \frac{1 + p\left(1 \mp \dfrac{v_0}{a}\right)^2}{1 - \dfrac{v_0^2}{a^2}} \sin\Omega\eta - \frac{\Omega p}{ika}\left(1 \mp \frac{v_0}{a}\right)\cos\Omega\eta$$

и произвольные постоянные C_{1k} и C_{2k} определяются однозначно из начальных и граничных условий.

Приведенные выражения (21) справедливы и при быстрых изменениях бегущего параметра. Как и в рассмотренных выше случаях, последние описывают независимо распространяющиеся волны, законы изменения амплитуд которых имеют волновой характер.

В заключение отметим, что при рассмотрении полей в средах с бегущей волной параметров целесообразно использовать описанное выше преобразование переменных в уравнениях (1), что приводит к имеющему простой вид волновому уравнению (6), удобному для исследования амплитудно-фазовым методом [10] сложных процессов распространения волн в таких средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутылкин В. С., Каплан А. Е., Хронопуло Ю. Г., Якубович Е. И. Резонансное взаимодействие света с веществом.— М.: Наука, 1977.
2. Гапонов А В., Островский Л. А, Фрейдман Г. И.— Изв. вузов — Радиофизика, 1967, 10, № 9—10, с 1376.
3. Аверков С. И, Степанов Н С.— Изв. вузов. — Радиофизика, 1959, 2, № 2, с. 203.
4. Островский Л. А — Изв. вузов — Радиофизика, 1961, 4, № 2, с. 293.
5. Аверков С. И., Хронопуло Ю. Г.— Изв. вузов — Радиофизика, 1960, 3, № 5, с. 818.
6. Бреховских Л. И., Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973.
7. Степанов Н С — Изв. вузов — Радиофизика, 1960, 3, № 4, с. 672.
8. Степанов Н. С — Изв. вузов — Радиофизика, 1962, 5, № 5, с. 908.
9. Сорокин Ю. М., Степанов Н. С.— ЖПМТФ, 1972, № 1, с. 31.
10. Аверков С. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 6, с. 835.
11. Shelkunoff S. A — Commun. Pure Appl. Math, 1951, 4, № 1, p. 117.
12 Kofink W. — Ann. Phys, 1947, 1, № 1, p. 119.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 18 июля 1979 г.

WAVES IN NONSTATIONARY INHOMOGENEOUS MEDIA WITHOUT DISPERSION

S. I. Averkov, V. P. Boldin

The authors consider some problems of the linear theory of electromagnetic wave propagation in nondispersive media with traveling parameters; particular cases of these media are inhomogeneous and nonstationary homogeneous media. A possibility is shown of unambiguous presentation of field in media with traveling parameters in the form of a spectrum of independently propagating unharmonic waves having variable amplitudes and phase velocities. The Schelkunoff statement about the indistinguishbility of the standing and travelling waves in the inhomogeneous media is discussed.