

УДК 538.56 : 519.25

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В ХАОТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С ДИССИПАЦИЕЙ

В. Г. Лапин

Рассматривается стационарное параметрическое взаимодействие трех плоских волн в поглощающей среде с хаотическими неоднородностями. Получены точные выражения для средних интенсивностей взаимодействующих волн, а также зависимость порога распадной неустойчивости от уровня флуктуаций. Подробно исследован случай сильнонеоднородной среды, когда существенно многократное рассеяние

1. Процессы нелинейного и параметрического взаимодействия волн в средах с крупномасштабными (по сравнению с длинами волн) флуктуациями параметров привлекают все большее внимание исследователей [1-3]. Такие задачи не только важны для практики, но также имеют большое значение для теории нелинейных волн. Случайные неоднородности в диспергирующих средах приводят к возникновению флуктуирующего фазового рассогласования и поэтому могут заметно влиять на характер резонансного взаимодействия. Это влияние сводится к снижению эффективности взаимодействия и уменьшению энергообмена между волнами. Так, в [2] показано, что на длинной трассе наличие флуктуирующей расстройки в два раза снижает коэффициент преобразования энергии интенсивной волны во вторую гармонику. Влияние флуктуаций диэлектрической проницаемости среды на параметрические процессы распада и слияния наиболее полно рассмотрено в работе [3]. Там на основе укороченных уравнений для комплексных амплитуд плоских волн и в приближении диффузионного случайного процесса [4] получены точные решения для средних интенсивностей взаимодействующих волн. Однако в [3] не учитывалось поглощение, которое может быть существенным в конкретных приложениях (например, при вынужденном комбинационном рассеянии, вынужденном рассеянии Мандельштама — Бриллюэна и т. п.). Ниже мы обобщаем результаты работы [3] для поглощающей среды. При этом получаем точные решения для средних интенсивностей волн с учетом зависимости коэффициента поглощения от частоты. Для параметрического процесса распада получено точное выражение для пороговой интенсивности накачки с учетом флуктуаций. Кроме того, показано, что в сильнонеоднородной среде скорость изменения средних интенсивностей волн может заметно меняться при наличии даже малого поглощения.

2. Пусть нелинейная плоскостойкая среда занимает полупространство $z > 0$. Рассмотрим стационарное параметрическое взаимодействие трех попутных (вдоль z) волн с частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_n$ и волновыми числами k_1, k_2, k_n (индекс «н» соответствует волне-накачке). Вычисления проведем для процесса параметрического преобразования частоты вверх, когда условия синхронизма имеют вид

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_n, \quad \Delta k(z) = k_2(z) - k_1(z) - k_n(z),$$

а расстройка $\Delta k(z)$ обусловлена флуктуациями действительной части диэлектрической проницаемости и в среднем равна нулю: $\langle \Delta k(z) \rangle = 0$

(здесь $\langle \dots \rangle$ означает статистическое усреднение). Тогда известные уравнения (см. [3]), описывающие медленные (на длине волны) изменения комплексных амплитуд $A_1(z)$, $A_2(z)$ в неоднородной среде при дополнительном предположении постоянства поля накачки ($A_H(z) = \text{const}$), можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} + \alpha_1 A_1 &= \gamma_1 A_H^*(0) A_2 e^{i\psi(z)}, \\ \frac{dA_2}{dz} + \alpha_2 A_2 &= -\gamma_2 A_H(0) A_1 e^{-i\psi(z)}, \\ A_1(0) &= A_{10}, \quad A_2(0) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const}$ — коэффициенты затухания, $\psi(z) = \int_0^z \Delta k(z') dz'$.

Если масштаб l флуктуаций $\Delta k(z)$ мал по сравнению со всеми прочими масштабами задачи:

$$l \ll \min(\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, L_{\text{нл}}, L_{\text{рас}})$$

(здесь $L_{\text{нл}}$ и $L_{\text{рас}}$ — нелинейный масштаб и масштаб многократного рассеяния: $L_{\text{нл}}^{-1} = \gamma = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2 |A_H(0)|^2}$, $L_{\text{рас}}^{-1} = \langle (\Delta k)^2 \rangle l$), то нормальный процесс $\Delta k(z)$ можно считать δ -коррелированным:

$$\langle \Delta k(z) \Delta k(z') \rangle = 2D \delta(z - z'), \quad D = \langle (\Delta k)^2 \rangle l.$$

Теперь, вводя безразмерные величины $\tau = Dz$, $\delta = 2\gamma/D$, $\sigma = (\alpha_1 - \alpha_2)/D$, $\beta = (\alpha_1 + \alpha_2)/D$ и используя при усреднении формулу Фурутцу — Нобикова [4], нетрудно получить систему уравнений для статистических моментов $P(\tau)$, $R(\tau)$, определяющих нормированные средние интенсивности волн:

$$\begin{aligned} \langle I_1(\tau) \rangle &\equiv \frac{\langle |A_1(\tau)|^2 \rangle}{|A_{10}|^2} \equiv P(\tau) e^{-\beta\tau}, \\ \langle I_2(\tau) \rangle &\equiv \frac{\langle |A_2(\tau)|^2 \rangle}{|A_{10}|^2} \equiv R(\tau) e^{-\beta\tau}, \end{aligned}$$

и момента $J(\tau) \equiv e^{\beta\tau} \langle A_1 A_2^* e^{-i\psi} \rangle + \text{к. с.}$, необходимого для замыкания. Эта система имеет вид

$$P' + \sigma P = \frac{\delta}{2} J,$$

$$R' - \sigma R = -\frac{\delta}{2} J,$$

$$J' + J = \delta(R - P),$$

$$P(0) = 1, \quad R(0) = J(0) = 0$$

(штрихом обозначено дифференцирование по аргументу). Заметим, что в случае равного поглощения на частотах ω_1 и ω_2 ($\sigma = 0$) моменты $P(\tau)$ и $R(\tau)$ такие же, как в среде без поглощения, и затухание интенсивностей за счет поглощения описывается множителями $e^{-\beta\tau}$. При конечном σ происходит эффективное перераспределение энергии между

моментами P и R на масштабе $L_{\text{дис}} = |\alpha_1 - \alpha_2|^{-1}$. Таким образом, $|\sigma| = L_{\text{рас}}/L_{\text{дис}}$, $\delta = L_{\text{рас}}/L_{\text{нл}}$, а знак σ определяет направление перекачки энергии.

3. Поведение решения системы (2) определяется корнями соответствующего характеристического уравнения (мы решаем (2) методом Лапласа). В нашем случае это уравнение с действительными коэффициентами, следовательно, всегда имеет один действительный корень. Комплексные корни существуют при $Q(\delta^2, \sigma^2) > 0$, где

$$Q = \frac{1}{4 \cdot 3^3} \{ (\delta^2 - \sigma^2)^3 [4(\delta^2 - \sigma^2) - 1] + \sigma^2 [9(2\delta^2 + \sigma^2) - 4] \}, \quad (3)$$

а при $Q \leq 0$ все три корня действительны. В области $Q > 0$ (см. рис. 1) для $\langle I_1 \rangle$ и $\langle I_2 \rangle$ будем иметь:

$$\begin{aligned} \langle I_1(\tau) \rangle &= \frac{e^{-[\beta+(1/3)]\tau}}{4\nu^2 + 9c^2} \left[\left[2\delta^2 + 4 \left(c - \frac{1+3\sigma}{3} \right) \left(c + \frac{2}{3} \right) \right] \times \right. \\ &\times e^{c\tau} + e^{-c\tau/2} \left[4\nu^2 + 9c^2 - 2\delta^2 - 4 \left(c - \frac{1+3\sigma}{3} \right) \left(c + \frac{2}{3} \right) \right] \times \\ &\times \cos \nu\tau + e^{-c\tau/2} \left\{ 4\nu^2 \left(\frac{c}{2} - \frac{3\sigma-1}{3} \right) - 3c \left[\delta^2 + \left(\frac{c}{2} + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \frac{3\sigma+1}{3} \right) \left(c - \frac{4}{3} \right) \right] \right\} \frac{\sin \nu\tau}{\nu} \Bigg]; \quad (4) \end{aligned}$$

$$\langle I_2(\tau) \rangle = \frac{2\delta^2 e^{-[\beta+(1/3)]\tau}}{4\nu^2 + 9c^2} \left[e^{c\tau} - e^{-c\tau/2} \left(\cos \nu\tau + \frac{3c}{2} \frac{\sin \nu\tau}{\nu} \right) \right]; \quad (5)$$

$$c = \left(\frac{\delta^2 + 2\sigma^2}{6} - \frac{1}{27} + Q^{1/2} \right)^{1/3} + \left(\frac{\delta^2 + 2\sigma^2}{6} - \frac{1}{27} - Q^{1/2} \right)^{1/3}; \quad (6)$$

$$\nu = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\left(\frac{\delta^2 + 2\sigma^2}{6} - \frac{1}{27} + Q^{1/2} \right)^{1/3} - \left(\frac{\delta^2 + 2\sigma^2}{6} - \frac{1}{27} - Q^{1/2} \right)^{1/3} \right]. \quad (7)$$

В области $Q < 0$ точные выражения для $\langle I_1 \rangle$ и $\langle I_2 \rangle$ примут вид

$$\begin{aligned} \langle I_1(\tau) \rangle &= \frac{e^{-[\beta+(1/3)]\tau}}{6F^2} \left\{ \frac{9\delta^2 + 4 \left(1 + F \cos \frac{\varphi}{3} \right) \left(2F \cos \frac{\varphi}{3} - 1 - 3\sigma \right)}{1 + 2 \cos \frac{2\varphi}{3}} \times \right. \\ &\times e^{(2F/3) \cos(\varphi/3)\tau} + \left\{ 9\delta^2 + 4 \left[1 + F \cos \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \left[2F \cos \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) - \right. \right. \\ &\left. \left. - 1 - 3\sigma \right] \right\} \left[1 - 2 \cos \left(\frac{2\varphi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) \right]^{-1} e^{(2F/3) \cos[(\varphi/3)+(2\pi/3)]\tau} + \\ &+ \left\{ 9\delta^2 + 4 \left[1 + F \cos \left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \left[2F \cos \left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) - 1 - 3\sigma \right] \right\} \times \quad (8) \end{aligned}$$

$$\times \left[1 - 2\cos\left(\frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) \right]^{-1} e^{(2F/3) \cos[(\varphi/3) - (2\pi/3)] \tau} \Bigg\};$$

$$\langle I_2(\tau) \rangle = \frac{3}{2} |\delta^2| \frac{e^{-[\beta + (1/3)] \tau}}{F^2} \left\{ \frac{e^{(2F/3) \cos(\varphi/3) \tau}}{1 + 2\cos\frac{2\varphi}{3}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{(2F/3) \cos[(\varphi/3) + (2\pi/3)] \tau}}{1 - 2\cos\left(\frac{2\varphi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{e^{(2F/3) \cos[(\varphi/3) - (2\pi/3)] \tau}}{1 - 2\cos\left(\frac{2\varphi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)} \right\}, \quad (9)$$

здесь

$$F = \sqrt{1 - 3\delta^2 + 3\sigma^2}, \quad \varphi = \arccos \frac{9(2\sigma^2 + \delta^2) - 2}{2F^3}. \quad (10)$$

Следует отметить, что поскольку $\varphi \in (0, \pi)$, а c положительно в области $Q > 0$, то первые слагаемые в (4), (5), (8), (9) являются наиболее «долгоживущими» и определяют решение на больших трассах. В среде без поглощения, когда $\sigma = \beta = 0$, на больших расстояниях достигается стационарное состояние, причем $\langle I_1 \rangle = \langle I_2 \rangle = 1/2$ (см. [3]). Заметим, что в случае $\beta = 0$, $\sigma \neq 0$ (отрицательное поглощение на одной из частот) на больших трассах $\langle I_1 \rangle$ и $\langle I_2 \rangle$ растут с инкрементом $\sim \left(c - \frac{1}{3}\right)$, если $Q > 0$ или $\sim \frac{1}{3} \left(2F \cos \frac{\varphi}{3} - 1\right)$ в области $Q < 0$. В том, что $c \geq 1/3$ при $Q > 0$ и $F \cos(\varphi/3) \geq 1/2$ при $Q < 0$, можно убедиться, исходя из (3), (6) и (10), причем равенство достигается лишь при $\sigma = 0$.

4. Анализ показывает, что характеристическое уравнение для параметрического процесса распада с условиями синхронизма $\omega_n = \omega_1 + \omega_2$, $\Delta k(z) = k_n(z) - k_1(z) - k_2(z)$ может быть получено из соответствующего уравнения для процесса преобразования частоты вверх заменой δ^2 на $-\delta^2$. Величина Q для распада тоже может быть получена из (3) при помощи такого преобразования, которое означает, что процессу распада соответствует нижняя полуплоскость на рис. 1. Следовательно, все корни характеристического уравнения в этом случае будут действительными.

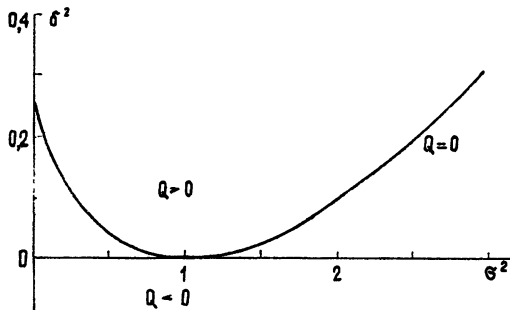


Рис. 1.

Кроме того, нетрудно убедиться, что точные решения для интенсивностей $\langle I_1 \rangle$ и $\langle I_2 \rangle$ могут быть получены из (8)–(10) заменой знака перед δ^2 . Причем такие решения для распада будут справедливы

при всех σ и δ . Условие обращения в нуль максимального показателя экспоненты в точном решении, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$\delta^2 = (\beta^2 - \sigma^2)(1 + \beta^{-1}).$$

Это выражение определяет порог интенсивности накачки $I_{\text{неод}}^{\text{п}}$ в хаотически неоднородной среде:

$$I_{\text{неод}}^{\text{п}} = I_{\text{одн}}^{\text{п}} \left(1 + \frac{D}{\alpha_1 + \alpha_2} \right). \quad (11)$$

Здесь $I_{\text{одн}}^{\text{п}}$ — пороговая интенсивность накачки в однородной среде.

5. Для того, чтобы нагляднее представить влияние диссипации на процесс параметрического взаимодействия в стохастической среде, рассмотрим случай сильнонеоднородной среды $\delta \ll 1$ ($L_{\text{н}} \gg L_{\text{рас}}$). При этом влияние флуктуаций наиболее существенно. Из точных решений (8), (9), предполагая $\sigma \sim \delta^2 \ll 1$, можно получить (для преобразования «вверх»)

$$\begin{aligned} \langle I_1(\tau) \rangle = \exp \left[- \left(\beta + \frac{\delta^2}{2} \right) \tau \right] & \left[\text{ch} \left(\sqrt{\sigma^2 + \frac{\delta^4}{4}} \tau \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{\delta^4}{4}}} \text{sh} \left(\sqrt{\sigma^2 + \frac{\delta^4}{4}} \tau \right) \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\langle I_2(\tau) \rangle = \exp \left[- \left(\beta + \frac{\delta^2}{2} \right) \tau \right] \frac{|\delta^2|}{2 \sqrt{\sigma^2 + \frac{\delta^4}{4}}} \text{sh} \left(\sqrt{\sigma^2 + \frac{\delta^4}{4}} \tau \right). \quad (13)$$

При $|\sigma| \ll \delta^2$ из (12), (13) будем иметь

$$\begin{aligned} \langle I_1(\tau) \rangle & \approx \exp \left[- (\beta - \sigma^2 \delta^{-2}) \tau \right] \left\{ \frac{1}{2} + \frac{e^{-\delta^2 \tau}}{2} \right\}, \\ \langle I_2(\tau) \rangle & \approx \exp \left[- (\beta - \sigma^2 \delta^{-2}) \tau \right] \left\{ \frac{1}{2} - \frac{e^{-\delta^2 \tau}}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь в фигурных скобках стоят выражения, которые имеют место в среде без поглощения [3]. В случае $\beta < \sigma^2 \delta^{-2}$ экспоненциальный множитель дает уже упоминавшийся рост интенсивностей на большой трассе. При этом энергия черпается из среды, так как в этом случае на одной из частот среда является активной.

В другом предельном случае $\delta^2 \ll |\sigma| \ll 1$ из (12), (13) получим ($\alpha_1 > \alpha_2$, $\sigma > 0$)

$$\langle I_1 \rangle \approx \begin{cases} \exp \left[- \left(\frac{2\alpha_1}{D} + \frac{\delta^2}{2} \right) \tau \right] & (\tau < \tau_c = \frac{1}{|\sigma|} \ln \frac{\sigma}{\delta^2}) \\ \exp \left[- \left(\frac{2\alpha_2}{D} + \frac{\delta^2}{2} \right) \tau \right] & (\tau > \tau_c) \end{cases}. \quad (15)$$

Этот случай соответствует сильному затуханию. Если $\alpha_2 = 0$, то при $\tau > \tau_c$ наблюдается слабое затухание, но к этому моменту интенсивность волны сильно уменьшается за счет диссипации. Если $\alpha_1 < \alpha_2$, то

$$\langle I_1 \rangle \approx \exp \left[- \left(\frac{2\alpha_1}{D} + \frac{\delta^2}{2} \right) \tau \right] \quad (\tau \gg 1), \quad (16)$$

т. е. в случае $\alpha_1 = 0$ волна затухает до нуля, но с декрементом, в два раза меньшим, чем без диссипации (ср. с [3]). Соотношения, аналогичные (12)—(16), легко могут быть получены и для параметрического процесса распада. Так, в случае $\delta^2 \ll |\sigma| \ll 1$, $\alpha_1 < \alpha_2$ аналогично (16) будем иметь

$$\langle I_1(\tau) \rangle \approx \exp \left[\left(\frac{\delta^2}{2} - \frac{2\alpha_1}{D} \right) \tau \right] \quad (\tau \gg 1). \quad (17)$$

Отсюда видно, что инкремент распадной неустойчивости уменьшается не менее чем вдвое по сравнению [3] со средой без диссипации.

Наконец, в случае $|\sigma| \gg 1$ флуктуации расстройки фазового синхронизма становятся несущественными и решение ведет себя так же, как в однородной среде.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность В. В. Тамойкину за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тагиев З. А., Чиркин А. С. — Квантовая электроника, 1977, 4, № 7, с. 1503.
2. Абрамович Б. С., Тамойкин В. В. — ЖЭТФ, 1980, 78, вып. 2, с. 458
3. Абрамович Б. С., Тамойкин В. В. — Физика плазмы, 1980, 6, № 3, с. 531.
4. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
13 февраля 1980 г.

PARAMETRIC WAVE INTERACTION IN CHAOTICALLY INHOMOGENEOUS MEDIUM WITH DISSIPATION

V. G. Lapin

Stationary parametric interaction of plane waves in a dissipative medium with chaotic inhomogeneities is considered. Exact expressions have been derived for average intensities of interacting waves as well as the dependence of the decay instability threshold on the level of fluctuations. A case of a strongly inhomogeneous medium when a multiple scattering is essential is investigated in detail.