

УДК 621.372.09

ЯВЛЕНИЕ ПЕРЕКРЫТИЯ ПРИКАУСТИЧЕСКИХ ЗОН В ПРИПОВЕРХНОСТНОМ ВОЛНОВОДЕ И СВЯЗАННОЕ С НИМ ОБОБЩЕНИЕ ЛУЧЕВОГО МЕТОДА

В. Э. Грикуров

Исследуется коротковолновая асимптотика волнового поля в случае формирования каустики с точкой возврата и близко расположенной к ней простой каустики, имеющих общий образующий луч. Показано, что для адекватного описания поля в этом случае необходимо использовать специальную функцию (1.1). Приводятся результаты сопоставления численных расчетов, выполненных в задаче распространения волн в приповерхностном волноводе с параболическим профилем при помощи специальной функции (1.1) и методом нормальных волн.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что для вычисления коротковолновой асимптотики волнового поля в условиях нарушения регулярности поля лучей используется аппарат специальных функций [1-3]. Результаты этих (и некоторых других) работ позволяют рассчитывать поля в прикаустических зонах простых каустик или каустик, имеющих особые точки. Однако в тех случаях, когда в среде формируется несколько каустик, имеющих общие образующие лучи, их прикаустические зоны на данной частоте могут перекрываться (будем в этом случае условно говорить о «взаимодействии каустик»). Для описания асимптотики поля в области пересечения прикаустических зон необходимо вводить новые, отличные от рассмотренных в работах [1-3] специальные функции.

Явление перекрытия прикаустических полей может сыграть роль при расчетах лучевым методом полей в так называемых приповерхностных волноводах, т. е. в слоях с положительной нормальной производной скорости, примыкающих к отражающим границам. В частности, это может быть тропосферный волновод радиоволн сантиметрового диапазона. Наше исследование ориентировано, главным образом, именно на этот случай.

Целью данной работы является изучение структуры волнового поля в окрестности системы каустик, изображенной на рис. 1 (рассматривается плоская задача). Эта система каустик состоит из каустики $K^{(1)}$ с точкой возврата O («носиком») и близко расположенной к ней каустики $K^{(2)}$ без особых точек. В каждую точку области $\Omega^{(1)}$, ограниченной двумя ветвями каустики $K^{(1)}$, приходят четыре луча, обозначенные через r_k , $k = 1, 2, 3, 4$ (под лучами мы понимаем экстремали функционала $\int ds/c(M)$, $c(M)$ — скорость распространения волн). Луч r_3 последовательно касается каустик $K^{(2)}$ и $K^{(1)}$. В точки области $\Omega^{(2)}$, заключенной между каустиками $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$, приходят два луча — r_1 и r_2 . В область $\Omega^{(3)}$, отделяемую каустикой $K^{(2)}$, лучи не попадают.

В работе показано, что асимптотика поля в окрестности рассматриваемой системы каустик, справедливая при любом соотношении между длиной волны и малым параметром, связанным с расстоянием между точками касания луча r_3 , выражается через специальную функцию

$$G(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{i}{2} \gamma t^2\right) \cos\left(\frac{t^3}{12} - \alpha t - \frac{\beta^2}{t} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (1.1)$$

Эта специальная функция выделена путем исследования эталонной задачи, допускающей точное решение методом разделения переменных и в то же время сохраняющей основные черты рассматриваемой лучевой картины*. Специальная функция (1.1) возникает также в задаче рассеяния волнового поля объектом, расположенным в окрестности простой каустики [11, 12].

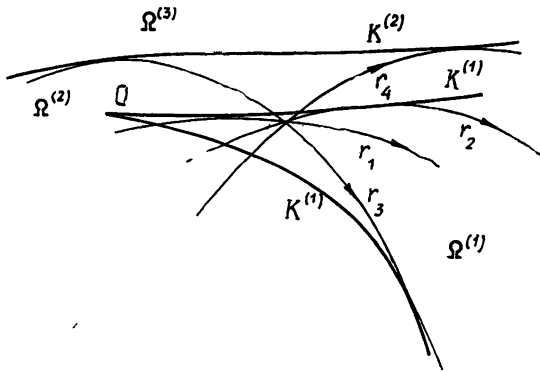


Рис. 1.

В целях сокращения объема работы мы обсуждаем только локальную формулу, содержащую специальную функцию (1.1). Полученная формула применима при достаточно сильном взаимодействии каустик (т. е. при расстоянии между точками касания луча r_3 , существенно меньшем длины волны) и в достаточно малой окрестности «носика» O. Однако с привлечением производных специальной функции (1.1) может быть получена и равномерная формула. Для написания такой формулы необходимо потребовать, чтобы при замене специальной функции (1.1) и ее производных более простыми выражениями, соответствующими не взаимодействующим каустикам, мы получили бы лучевую формулу. Такой прием, впервые предложенный Кравцовым [1, 5], позволяет выразить неизвестные величины в равномерной формуле через лучевые характеристики волн, приходящих в точку наблюдения. Подобные вычисления проделаны в работе [6] и позволяют утверждать, что область применимости специальной функции (1.1) не исчерпывается задачами с разделяющимися переменными.

В заключении работы приводится численный пример сопоставления расчетов приповерхностного волновода по методу нормальных волн, лучевому методу без учета взаимодействия каустик и при помощи обобщения лучевого метода, использующего специальную функцию (1.1). Показано, что при некоторых значениях параметров, соответствующих распространению УКВ радиоволн в тропосфере, взаимодействие каустик существенно и применение специальной функции (1.1) необходимо.

* По-видимому, специальная функция может быть получена и методом канонического оператора [4]. Обобщение этого метода на случай перекрытия прикаустических зон достигается за счет рассмотрения канонического оператора в плоской задаче на трехмерном многообразии, третьей переменной в котором является дополнительный параметр задачи — расстояние между точками касания луча r_3 .

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ЛИНЕЙНЫМ ПРОФИЛЕМ

1. Волноводное распространение волн в слоистой среде в приближении параболического уравнения описывается функцией $\Psi(x, y)$, являющейся удовлетворяющим в полупространстве $y \geq 0$ принципу предельного поглощения решением краевой задачи:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + ip \frac{\partial \Psi}{\partial x} + p^2 N(y) \Psi = -\delta(x, y - y_0); \quad (2.1)$$

$$\Psi(x, 0) = 0 \quad (2.2)$$

(вместо условия (2.2) можно рассматривать краевое условие общего вида). Волновой процесс, описываемый уравнением (2.1), носит волноводный характер, если приведенный показатель преломления $N(y)$ убывает при $y \geq 0$, по крайней мере, на участке $0 \leq y \leq y_i$, $y_i > 0$. Картины лучей, исходящих из источника $x = 0$, $y = y_0 > 0$ и образуемых ими каустики, можно найти в работах [7-9].

В качестве эталонной задачи мы выберем задачу с линейно-убывающим приведенным показателем преломления

$$N(y) = -y. \quad (2.3)$$

Решение задачи (2.1) — (2.3) строится методом разделения переменных и после небольших тождественных преобразований при $x > 0$ принимает вид

$$\Psi = \sum_{j \geq 0} \Psi_j; \quad (2.4)$$

$$\Psi_0 = \frac{p^{1/3}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} v(t_>) v(t_<) d\tau; \quad (2.5)$$

$$\Psi_j = \frac{ip^{1/3}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} v(t_>) v(t_<) \left[\frac{\omega_1(p^{2/3}\tau)}{\omega_2(p^{2/3}\tau)} \right]^j d\tau \quad (2.6)$$

$$(j \geq 1).$$

В формулах (2.5), (2.6) $v(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ — функции Эйри в стандартных обозначениях, $t_> = p^{2/3}(\tau + \max(y, y_0))$, $t_< = p^{2/3}(\tau + \min(y, y_0))$.

Будем обозначать через r_{jk} лучи (и соответствующие им лучевые волны), испытавшие j отражений и при $k = 1, 2$, выходящие из источника под положительным углом с осью x и приходящие в точку наблюдения под положительным и отрицательным углами соответственно, а при $k = 3, 4$ — выходящие из источника под отрицательным углом*. Анализ интегралов Ψ_j , входящих в сумму (2.4), показывает, что выражением $\Psi_0 + \Psi_1$ описывается совместное поле волн r_{01} , r_{11} , r_{12} , r_{13} , а каждым из интегралов Ψ_j при $j \geq 2$ — совместное поле волн r_{j1} , r_{j2} , r_{j3} , r_{j4} . Основной вклад в сумму (2.4) дает конечное число слагаемых, зависящее от соотношения координат x , y , y_0 . Эти слагаемые отвечают вещественным лучам, приходящим в точку наблюдения. Однако при вычислениях по формулам типа (2.4) приходится учитывать, как правило, еще и несколько слагаемых, отвечающих «комплексным» лучам и описывающих поле «просачивания» через каустики, относительно которых точка наблюдения расположена с теневой стороны (см. [9]).

* Нумерация лучей по k соответствует обозначениям на рис. 1. Дополнительный нижний индекс j в дальнейшем всюду означает число отражений.

2. Нашей задачей является исследование интегралов Ψ_j при $j \geq 2$ и приведение их при $p \gg 1$ к виду, наиболее удобному для вычислений. Для простоты мы рассмотрим только случай $y = y_0$ (который в то же время и наиболее интересен с точки зрения взаимодействия каустик) и будем считать, что выполняется условие

$$p^{2/3}y \gg 1. \quad (2.7)$$

Условие (2.7) позволяет рассматривать волны, испытавшие различное число отражений, независимо друг от друга.

При выполнении условия (2.7) асимптотика интегралов (2.6) при $p \rightarrow \infty$ может быть получена методом перевала. Из-за наличия особых кривых лучевого поля — простых каустик и каустик с «носиками» — формула метода перевала для интеграла Ψ_j выражается через специальные функции: функцию Эйри в окрестности каустики $K_j^{(2)}$ и интеграл Персея [2] в окрестности каустики $K_j^{(1)*}$. Однако, как отмечалось в разд. 1, формула, содержащая указанные специальные функции, применима лишь тогда, когда прикаустические зоны каустик $K_j^{(1)}$ и $K_j^{(2)}$ не перекрываются. Неприменимость формулы метода перевала в случае перекрытия прикаустических зон выявляется при анализе погрешности метода перевала. Эта погрешность содержит множитель $(p \delta_j^3)^{-1}$, в котором

$$\delta_j = \frac{1}{j} \left[- |N'(y)|^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{y_\tau} \frac{dy}{\sqrt{N(y) - \tau}} \Big|_{\tau=N(y)} \right]^{-1} = \frac{\sqrt{y}}{j}, \quad (2.8)$$

где y_τ — наименьший корень уравнения $N(y) = \tau$ (точка поворота луча). Можно показать, что величина δ_j с точностью до членов порядка $O(j^{-2})$ совпадает с расстоянием по горизонтали между точкой O_j и каустикой $K_j^{(2)}$. Отметим, что это расстояние уменьшается при увеличении номера j (каустики, образованные лучами, испытавшими большое число отражений, сильно «сжаты»).

Таким образом, при достаточно больших значениях j прикаустические зоны каустик $K_j^{(1)}$ и $K_j^{(2)}$ перекрываются и метод перевала для вычисления интегралов (2.6) неприменим. Приведение этого интеграла к виду, наиболее удобному для вычислений, следует осуществлять с помощью иных преобразований. Наводящим обстоятельством для этих преобразований может послужить наблюдение о расположении седловых точек: при малых значениях параметра δ_j все четыре седловые точки расположены вблизи точки $\tau = -y$. Поэтому следует ожидать, что основным участком интегрирования в (2.6) при малых δ_j будет окрестность точки $\tau = -y$.

3. Руководствуясь этими соображениями, деформируем контур интегрирования в (2.6) так, чтобы он проходил через некоторые точки τ_- и τ_+ , лежащие соответственно на линиях $\arg(\tau + y) = -2\pi/3$ и $\arg(\tau + y) = \pi/3$, а между точками τ_- и τ_+ шел вдоль этих линий (рис. 2). Выберем точки τ_- и τ_+ так, чтобы

$$\begin{aligned} \tau_- &= |\tau_+ + y| \gg T_0 p^{2/3} \delta_j |x - x_j|, \\ \tau_+ &= |\tau_- + y| \gg T_0 p^{2/3} \delta_j^2 (1 + \sqrt{1 + (x - x_j)/\delta_j}), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $T_0 \sim 2 \div 5$, $x_j = 2j\sqrt{y}$ — значение координаты x «носика» O_j каустики $K_j^{(1)}$. При выполнении неравенств (2.9) интегралы по участкам

* В рассматриваемом нами случае $y = y_0$ интеграл Персея сводится к функции параболического цилиндра знача $-1/2$.

контура, приходящим в точку τ_- и выходящим из точки τ_+ , допускают экспоненциально малую оценку и могут быть отброшены. На участке (τ_-, τ_+) заменим в силу (2.7) функции Эйри от аргумента $p^{2/3}\tau$ асимптотическими выражениями и разложим их фазу по степеням $(\tau + y)$, удержав квадратичные члены. Наконец, перейдем в образовавшемся выражении к переменной $t = p^{2/3}(\tau + y)$. В результате для интеграла Ψ_j получаем

$$\Psi_j = \frac{1}{\pi} \left(\frac{|N'(y)|}{p} \right)^{1/3} \exp \left[i \frac{\pi}{2} (j + 1) + ipf_j(x, y) \right] \times \\ \times \int_{t_- e^{-2\pi i/3}}^{t_+ e^{i\pi/3}} v^2(t) \exp \left\{ i \left[(x - x_j) p^{1/3} t + \frac{t^2}{2p^{1/3} \delta_j} \right] \right\} \times \quad (2.10) \\ \times dt \left[1 + O \left(\frac{\max(t_-, t_+)}{p^{2/3}} \right) \right],$$

где $f_j(x, y) = 4jy^{3/2}/3 - xy$ — длина луча, вышедшего из источника горизонтально между источником и точкой O_j .

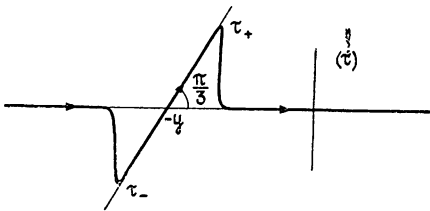


Рис. 2.

При выполнении неравенств (2.9) интегрирование в (2.10) без ухудшения погрешности может быть распространено на всю прямую $(\infty e^{-2\pi i/3}, \infty e^{i\pi/3})^*$. После этого мы можем упростить выражение (2.10), воспользовавшись интегральным представлением для функции $v^2(t)$.

С целью вывода этого представления заметим, что функция $g(t) = Ai^2(t)$, где $Ai(t)$ — любая из функций Эйри, удовлетворяет уравнению

$$g'''(t) = 4tg'(t) + 2g(t). \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) может быть решено методом Лапласа. В частности, для $v^2(t)$ получаем представление

$$v^2(t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{\infty e^{4i\pi/3}}^{\infty e^{2\pi i/3}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \exp \left(-\frac{\zeta^3}{12} + t\zeta \right), \quad (2.12)$$

в котором функция $\sqrt{\zeta}$ определена на плоскости с разрезом $0 < \zeta < \infty$, причем $\arg \sqrt{\zeta} = 0$ при $\arg \zeta = 0$.

После подстановки (2.12) в (2.10) и перестановки порядка интегрирования оказывается, что внутренний интеграл вычисляется явно. В результате мы приходим к следующему выражению:

$$\Psi_j = \exp \left[i \frac{\pi}{2} \left(j + \frac{3}{2} \right) + ipf_j(x, y) - ip \frac{\delta_j}{2} (x - x_j) \right] \times \quad (2.13) \\ \times \frac{1}{\pi} \left(\frac{|N'(y)|}{2p} \right)^{1/3} \sqrt{\frac{p^{1/3} \delta_j}{2}} G^{(0)}(\alpha_j, \gamma_j) \left[1 + O \left(\frac{\max(t_-, t_+)}{p^{2/3}} \right) \right],$$

где $\alpha_j = p^{2/3} \delta_j (x - x_j)$, $\gamma_j = p^{1/3} \delta_j$, а

* При небольшом усложнении соотношений (2.9) все оценки будут убывать при $p \rightarrow \infty$ [6].

$$G^{(0)}(\alpha, \gamma) = \frac{1}{2} \int_{\infty e^{4\pi i/3}}^{\infty e^{2\pi i/3}} \exp\left(-\frac{\zeta^3}{12} + i\gamma \frac{\zeta^2}{2} - \alpha\zeta\right) \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} \exp\left(-i \frac{\gamma}{2} t^2\right) \cos\left(\frac{t^3}{12} - \alpha t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.14)$$

— искомая специальная функция.

Проведя аналогичный анализ интеграла (2.6) при $y \neq y_0$, мы пришли бы к формуле, подобной (2.13), в которой, однако, вместо специальной функции (2.14) следовало бы писать специальную функцию (1.1) с параметрами

$$\alpha_j = p^{2/3} [\delta_j(x - x_j) - (y - y_0)/2], \quad (2.15)$$

$$\beta = p^{2/3}(y - y_0)/2, \quad \gamma_j = p^{1/3}\delta_j.$$

4. Погрешность полученной в предыдущем пункте формулы (2.13) зависит от соотношения величин p , δ_j и $(x - x_j)$. Формулу (2.13) следует считать применимой в том случае, если ее погрешность меньше погрешности метода перевала при данных значениях параметров. Это рассуждение приводит к следующей формулировке условий применимости формулы (2.13):

$$T_0 p \delta_j^5 \left(1 + \frac{x - x_j}{\delta_j}\right)^{3/2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{x - x_j}{\delta_j}}\right)^2 \leq 1 \quad \text{при} \quad x \geq x_j - \delta_j/2, \quad (2.16)$$

$$T_0 p \delta_j^2 (x_j - x)^3 \leq 1 \quad \text{при} \quad x \leq x_j - \delta_j/2.$$

Различный характер условий (2.16) в зависимости от величины x обусловлен тем обстоятельством, что формулы метода перевала «обслуживающие» соответственно каустики $K_j^{(1)}$ и $K_j^{(2)}$, имеют разные выражения погрешности.

Таким образом, формула (2.13) является локальной формулой, область применимости которой ограничивается достаточно сильным перекрытием прикаустических зон и положением точки наблюдения в достаточно малой окрестности точки O_j .

Вопрос о степени перекрытия прикаустических зон, при которой специальная функция (2.14) является существенной, может быть выяснен и в терминах внутренних параметров этой функции. Так, например, численным исследованием установлено, что при $\gamma \geq 1,5$ и при любых значениях параметра α специальная функция $G^{(0)}(\alpha, \gamma)$ может быть заменена асимптотической формулой, соответствующей раздельному учету каустик $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$ (см. [6]).

3. ЧИСЛЕННОЕ СРАВНЕНИЕ МЕТОДА НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН И РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ ЛУЧЕВОГО МЕТОДА

1. Целью настоящего раздела является сопоставление численных расчетов приповерхностных волноводов по лучевому методу, обобщенному лучевому методу с использованием специальной функции (2.14) и по методу нормальных волн. Задача с линейным профилем (2.3) для этой цели не подходит, так как ряд нормальных волн в ней сходится медленно (степенным образом) и непригоден для вычислений. Поэтому численные расчеты проведем для задачи (2.1), (2.2), в которой

$$N(y) = (y - y_i)^2/4. \quad (3.1)$$

Известно (см., например, [9, 10]), что ряд нормальных волн в этом случае сходится экспоненциально, начиная с некоторого номера.

Исследование задачи (2.1) (2.2), (3.1) проводится методами, близкими к изложенным в § 2 [6]. Однако следует учесть, что в данной задаче каустики «накапливаются» к уровню $y = y_i$, в окрестности которого происходят сложные волновые процессы. Этими процессами можно пренебречь, если считать корреспондирующие точки достаточно удаленными от уровня $y = y_i$, а именно:

$$q = (\sqrt{p} |N'(y)|)^{2/3} \gg 1. \quad (3.2)$$

Условие (3.2) является дополнительным условием применимости формулы (2.13) для задач, в которых функция $N(y)$ имеет минимум. В этом случае формулы (2.8)–(2.16) сохраняют свой вид, но в них надо параметр $p^{1/3}$ заменить на q .

2. Выберем для расчетов следующие значения параметров:

$$y_i = 2, y = y_0 = 1, p = 15, 20, 50, x \leq 70. \quad (3.3)$$

Из соотношений, приведенных в работе [9], вытекает, что параметры (3.3) характерны для распространения УКВ радиоволн в тропосфере (за исключением значения $p = 50$, которое выбрано для иллюстрации изменения характера взаимодействия каустик при увеличении частоты). В то же время при параметрах (3.3) можно считать выполненными условия (2.7) и (3.2).

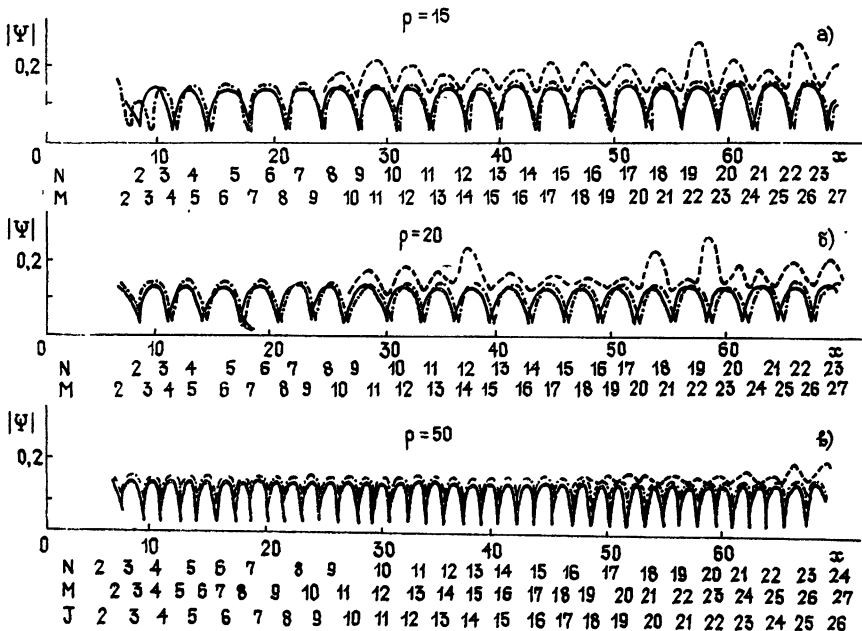


Рис. 3.

Результаты вычислений функции $|\Psi(x, y)|$ в зависимости от расстояния x представлены на рис. 3. Сплошные кривые получены методом нормальных волн, нанесенные прерывистой линией — лучевым методом, пунктирные — обобщенным лучевым методом. При вычисле-

нии последних по формуле (2.13), содержащей специальную функцию $G^{(0)}(\alpha, \gamma)$, вычислялись только те слагаемые в сумме (2.4), для которых выполнены условия применимости (2.16). На рис. 3 указаны в зависимости от x нижняя N и верхняя M границы номеров таких слагаемых. Числом J на рис. 3 указано количество слагаемых в формуле (2.4), отвечающих вещественным лучам. Количество удержанных слагаемых в этой формуле определялось заданной точностью порядка 5%.

На представленных рисунках отчетливо видно явление перекрытия прикаустических зон каустик $K_j^{(1)}$ и $K_j^{(2)}$ достаточно больших номеров J , приводящее к расхождению кривых, полученных лучевым методом и методом нормальных волн. В то же время результаты, полученные обобщенным лучевым методом, совпадают с данными, найденными по методу нормальных волн, на любых расстояниях. Этот факт является дополнительным подтверждением аналитических исследований разд. 2 и свидетельствует об эффективности полученных в этом разделе формул.

Автор глубоко благодарен С. П. Саликову, оказавшему помощь при вычислениях по методу нормальных волн, и В. С. Булдыреву, высказавшему ряд критических замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов Ю. А.—Изв вузов—Радиофизика, 1964, 7, № 1, с. 4.
2. Pearcey T.—Phil. Mag., 1946, 37, № 268, p. 311.
3. Ludwig D.—Comm. Pure Appl. Math., 1966, 19, № 2, p. 215.
4. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.—М.: Наука, 1976.
5. Кравцов Ю. А.—Акуст. ж., 1968, 14, № 1, с. 1.
6. Грикуров В. Э. Диссертация Л., 1979.
7. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах.—М.: Наука, 1973.
8. Неделин А. А.—В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.—Л.: Наука, 1974, вып. 14, с. 140.
9. Грикуров В. Э., Саликов С. П.—Радиотехника и электроника, 1978, 23, № 8, с. 1578.
10. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.—М.: Сов. радио, 1970.
11. Пермитин Г. В.—Изв. вузов—Радиофизика, 1973, 16, № 1, с. 62.

Ссеверо-западный заочный
политехнический институт

Поступила в редакцию
10 июля 1979 г.

OVERLAPPING OF NEAR-CAUSTIC ZONES IN A SURFACE WAVEGUIDE AND GENERALIZATION OF THE RAY METHOD

V. E. Griukurov

Short wave asymptotic of a wave field is investigated for the case of caustic formation with a return point and closely located to it a simple caustic having a common generating ray. It is shown that for an adequate description of the field it is necessary to use a special function (1.1). Comparison results are presented of the numerical calculations made in the problem of wave propagation in the surface waveguide with a parabolic profile by a special function (1.1) and by the normal modes method.