ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 9 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 538.56 : 519.25

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРИБЛИЖЕНИИ БУРРЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Г. И. Бабкин, В. И. Кляцкин

На простом примере, допускающем точное статистическое описание с помощью теории инвариантного погружения, показано, что приближение Бурре может приводить к принципиально неверным результатам.

Во многих физических работах, связанных со статистическими волновыми задачами, без должного обоснования используются приближения Бурре для уравнения Дайсона и лестничное приближение для уравнения Бете — Солпитера (см., например, [1–3]). Характерной чертой таких задач является отсутствие динамической причинности (см., например, [4]), что существенно усложняет анализ. Для интегральных стохастических уравнений, обладающих свойством причинности, приближение Бурре в ряде случаев может быть обосновано [5]. Поэтому определенный интерес представляют задачи, описываемые стохастическим интегральным уравнением, не удовлетворяющим условию причинности, и допускающие строгий анализ. Это позволяет рассмотреть вопрос о применимости указанных приближений. Ниже будет приведен пример такой задачи.

Пусть имеется стохастическое интегральное уравнение для функции Грина

$$G(t,\ t_0) = g(t-t_0) + \alpha \int\limits_0^\infty d\tau\, g(t-\tau)\, z(\tau)\, G(\tau,\ t_0), \tag{1}$$

где $0 \leqslant t,\ t_0 < \infty$, $z(t)$ — гауссов δ-коррелированный процесс с параметрами

$$\langle z(t) \rangle = 0, \quad \langle z(t)\, z(t') \rangle = 2\sigma^2 \tau_0\, \delta(t-t'). \tag{2}$$

Для данной задачи среднее значение функции Грина в приближении Бурре удовлетворяет уравнению

$$\langle G(t,\ t_0) \rangle = g(t-t_0) + 2Dg(0) \int\limits_0^\infty d\tau\, g(t-\tau) \langle G(\tau,\ t_0) \rangle, \tag{3}$$

где введен коэффициент диффузии $D = \alpha^2 \sigma^2 \tau_0$. Уравнение (3) можно решить.

Рассмотрим частный случай уравнения (1) с быстрозатухающей функцией $g(t) = \exp(-\alpha\,|t|)$ и выберем точку расположения источника $t_0 = 0$. При этом уравнения (1), (3) примут следующий вид:

$$U(t) = e^{-\alpha t} + \alpha \int\limits_0^\infty d\tau\, e^{-\alpha|t-\tau|}\, z(\tau)\, U(\tau); \tag{1'}$$

$$\langle U(t) \rangle = e^{-\alpha t} + 2D \int\limits_0^\infty d\tau\, e^{-\alpha|t-\tau|} \langle U(\tau) \rangle, \tag{3'}$$

где $0 \leqslant t < \infty$, $U(t) = G(t,\ 0)$. Решение уравнения (3') выглядит следующим образом:

$$\langle U(t)\rangle = \frac{2\alpha}{\alpha+\lambda}e^{-\lambda t}, \qquad \lambda^2 = \alpha(\alpha - 4D) > 0. \tag{4}$$

Перейдем теперь к точному решению задачи. Для этого естественно воспользоваться теорией инвариантного погружения. Следуя работе [6], рассмотрим вместо (1) уравнение

$$G(t,\ t_0;\ T) = g(t-t_0) + \alpha\int\limits_0^T d\tau\, g(t-\tau)\, z(\tau)\, G(\tau,\ t_0;\ T), \tag{5}$$

где введен «параметр погружения» T. Решение уравнения (1) соответствует предельному переходу $T\to\infty$. Пусть в уравнении (5) $t_0 = T$, тогда в случае экспоненциальной функции $g(t)$ вместо (1′) получаем уравнение

$$U(t,\ T) = e^{-\alpha(T-t)} + \alpha\int\limits_0^T d\tau e^{-\alpha|t-\tau|}\, z(\tau) U(\tau,\ T) \qquad (0\leqslant t\leqslant T). \tag{6}$$

Решение статистической задачи (1′) в силу стационарности процесса $z(t)$ связано с решением уравнения (6) равенством

$$\langle U(t)\rangle = \lim_{\tilde t,\ T\to\infty}\langle U(\tilde t,\ T)\rangle \qquad (T-\tilde t = t). \tag{7}$$

Отметим, что уравнение (6) эквивалентно краевой задаче

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \alpha^2\,[1 - 2z(t)]\,U, \qquad \alpha U(T) + U'(T) = 2\alpha, \qquad \alpha U(0) - U'(0) = 0. \tag{8}$$

Теперь можно, вообще говоря, использовать методику работы [7], пригодную для анализа стохастических краевых задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Однако в данном случае удобнее исходить непосредственно из уравнения (6). Дифференцируя (6) по T, получаем интегральное уравнение для величины $\partial U(t,\ T)/\partial T$, решение которого с использованием (6) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial U(t,\ T)}{\partial T} = -\alpha\,[1 - z(T)R(T)]\,U(t,\ T), \quad U(t,\ t) = R(t). \tag{9}$$

Здесь $R(T) = U(T,\ T)$, для этой величины имеется интегральное уравнение

$$R(T) = 1 + \alpha\int\limits_0^T d\tau\, e^{-\alpha(T-\tau)}\, z(\tau)\, U(\tau,\ T). \tag{10}$$

Дифференцируя его по T, находим с учетом (9)

$$\frac{dR(T)}{dT} = 2\alpha\,[1 - R(T)] + \alpha z(T) R^2(T), \qquad R(0) = 1. \tag{11}$$

Таким образом, решение исходного интегрального уравнения (6) сводится к системе уравнений (9), (11). Уравнение (6) не обладает свойством динамической причинности, так как его решение $U(t,\ T)$ является функционалом процесса $z(\tau)$ для $0\leqslant\tau\leqslant T$. Уравнения

(9), (11) удовлетворяют условию причинности, поскольку для них решается задача Коши.

Далее будем действовать стандартным образом (см., например, [4]). Пусть α — действительная величина. Рассмотрим плотность вероятностей для $U(t, T)$ и $R(T)$:

$$P_T(U, R) = \langle \delta[U(t, T) - U]\,\delta[R(T) - R] \rangle,$$

где усреднение проводится по ансамблю реализаций процесса $z(t)$. Для $P_T(U, R)$ получаем уравнение Эйнштейна—Фоккера

$$\frac{\partial P_T(U, R)}{\partial T} = \alpha\left[\frac{\partial}{\partial U} U - 2\frac{\partial}{\partial R}(1 - R)\right] P_T + D\left[\frac{\partial}{\partial U} UR + \frac{\partial}{\partial R} R^2\right]^2 P_T \tag{12}$$

с начальным условием

$$P_t(U, R) = \delta(U - R) P_t(R), \tag{13}$$

где функция $P_t(R)$ является плотностью вероятностей для величины $R(t)$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P_t(R)}{\partial t} = -2\alpha\frac{\partial}{\partial R}(1 - R) P_t + D\frac{\partial}{\partial R} R^2 \frac{\partial}{\partial R} R^2 P_t(R) \tag{14}$$

с начальным условием $P_0(R) = \delta(R - 1)$.

Следовательно, статистическая задача для уравнения (6) полностью описана. Переход к задаче (1′) осуществляется, как говорилось выше, при $t, T \to \infty$, если $(T - t)$ — фиксированная величина. Однако, как легко видеть, уравнение (14) не дает стационарного распределения вероятностей, и, следовательно, все статистические характеристики величины $U(t, T)$ при этом предельном переходе стремятся к ∞, что полностью противоречит приближению Бурре (и лестничному приближению для уравнения Бете—Солпитера). Со статистической точки зрения уравнение (1′) бессмысленно.

В случае, когда величина $\alpha = \gamma - i\varkappa$ комплексна, уравнение (6) описывает задачу о падении плоской волны на слой одномерной случайно-неоднородной среды [8–10]. При этом существование решения задачи (6) (в статистическом смысле) обусловлено тем, что имеется стационарное распределение для коэффициента отражения волны от слоя. Приближение Бурре и лестничное приближение для этой задачи использовались в работе [11], где было получено согласие с линейной теорией переноса. Однако согласно [10] точное решение соответствует теории переноса лишь в предельном случае большого (по сравнению с D) коэффициента затухания γ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере.— М.: Наука, 1967.
2. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М.: Наука; 1972.
3. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. — М: Наука, 1978.
4. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами.— М.: Наука, 1975.
5. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И. — Теор. и мат. физика, 1979, 41, № 3, с. 368.

6. Касти Дж., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике.— М.: Мир, 1976.
7. Кляцкин В. И.— Изв вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 8, с. 1165.
8. Кляцкин В. И.— Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 2, с. 180.
9. Кляцкин В. И.— Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 5, с. 591.
10. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И.— Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 4, с. 432.
11. Белов В. Д., Рыбак С. А.— Акуст. ж., 1975, 21, с. 173.
12. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я.— ДАН СССР, 1980, № 5, с. 1112.
13. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И. — ЖЭТФ, 1980, 79, № 3, с. 817.

Тихоокеанский океанологический институт
ДВНЦ АН СССР

Поступила в редакцию
6 августа 1979 г.

A REMARK ON BOURRET APPROXIMATION IN STOCHASTIC INTEGRAL EQUATIONS

G. I. Babkin, V. I. Klyatskin

By a simple example admitting the exact statistical description by the theory of invariant submersion, it is shown that Bourret approximation may lead to the principally incorrect results.

Примечание при корректуре. Отметим, что развитый выше метод сведения краевой задачи к задаче Коши позволяет построить полную статистическую теорию переноса излучения в слоистых средах. Это будет сделано в следующей публикации. Кроме того, развитая теория легко обобщается на многомерные линейные [12] и нелинейные [13] волновые задачи.

Аннотации депонированных статей

УДК 538 576.2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИАГРАММНОЙ ТЕХНИКИ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ВИДЕ РЯДА ПО КРАТНОСТИ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

В. Е. Осташев

При помощи диаграммной техники решение скалярного волнового уравнения представляется в виде ряда по кратности обратного рассеяния: $E=\sum_{n=0}^{\infty}E_n$, где E_n — сумма всех многократно рассеянных по направлению распространения волн, испытавших n актов обратного рассеяния. Использование диаграммной техники как при построении этого ряда, так и при выводе уравнений для полей E_n оказывается удобным и наглядным. В частности, удается решить уравнения для полей E_n, а систему уравнений для полей $E_ч=\sum_{n=0}^{\infty}E_{2n}$ и $E_н=\sum_{n=0}^{\infty}E_{2n+1}$ свести к двум независимым уравнениям для этих полей. При этом поля E_n выражаются только через многократно рассеянные вперед волны. Например, для поля E_1 имеет место формула

$$E_1(\mathbf{r})=k^2\int_x^L dx_1\int d^2\rho_1 G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1)E(\mathbf{r}_1),$$

где $E_0(\mathbf{r})$ — сумма всех многократно рассеянных вперед волн, $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)$ отличается от E_0 лишь своим источником, равным $\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|)/4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|$, $\tilde{\varepsilon}$ равно отклонению диэлектрической проницаемости среды от 1, k — волновое число, $\mathbf{r}=(x,\rho)$.

*Статья депонирована в ВИНИТИ,
рег. № 2657-80. Деп. от 30 июня 1980 г.*