

УДК 525.7

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА НЕВЯЗКИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ТЕРМИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ АТМОСФЕРЫ

В. И. Алешин, Я. И. Альбер, Ю. В. Новиков

Предлагается операторный метод регуляризации для нахождения высотного профиля температуры в атмосфере по наземным радиометрическим измерениям. Параметр регуляризации определяется в соответствии с принципом невязки. Показывается, что уравнение невязки эффективно решается методом последовательных приближений. Решение, полученное операторным методом, сравнивается с решением, найденным методом статистической регуляризации [3-5]. Операторный метод в отличие от статистического не требует априорной информации в виде температурной корреляционной матрицы. Численные эксперименты показывают эффективность предлагаемого метода.

В работах [1-5] выполнены восстановления высотных профилей температуры по наземным радиометрическим измерениям атмосферного излучения в области спин-вращательной полосы поглощения кислорода, центрированной к $\lambda = 15$ мм. Восстановление температурного профиля было получено методом статистической регуляризации [6, 7] с использованием в качестве априорной информации корреляционной матрицы B_{TT} . Элементы этой матрицы выражают статистическую зависимость температуры на одной высоте от температуры на другой. Использование такой матрицы дает возможность удовлетворительно восстанавливать профили температуры, свойства которых достаточно полно описываются матрицей B_{TT} .

Иная картина наблюдается в тех случаях, когда приходится иметь дело с редкими, исключительными ситуациями. В матрице B_{TT} нет информации о поведении температуры в таких условиях, поэтому использование этой матрицы может привести к неверному решению. На рис. 1, 2 приводятся результаты восстановления мощной почти дельтообразной температурной инверсии (величина 10 К, мощность 40 мбар) в нижней атмосфере. Отметим, что реальное существование таких инверсий в чистом виде вряд ли возможно. Тем не менее большие температурные градиенты этого примера (± 25 град/км) не выходят за пределы реальных перепадов температуры. Такой пример позволяет смоделировать экстремальные условия в атмосфере. Корреляционная температурная матрица, составленная по метеоданным для средней европейской части СССР, не содержит сведений об инверсиях подобного рода, и ее применение не позволяет восстановить данный температурный профиль.

Между тем, при практическом использовании того или иного метода восстановления высотного профиля температуры по радиометрическим данным необходима уверенность, что метод дает достаточно точное решение и в этих случаях.

Задача термического зондирования атмосферы сводится, в конечном счете, к численному решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Запишем его в операторной форме

$$Ax = f. \quad (1)$$

Целью настоящей работы является исследование возможностей операторного метода регуляризации [8,9] для решения уравнения (1) с монотонным оператором, действующим из гильбертова пространства H в то же самое пространство H , с выбором параметра регуляризации в соответствии с принципом невязки*. Опишем кратко его суть.

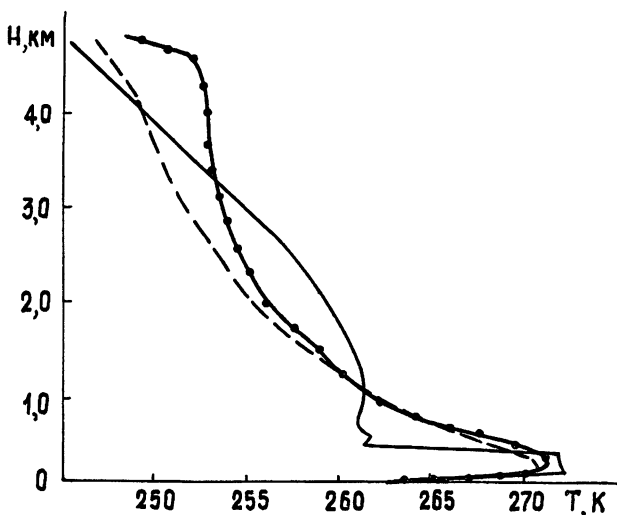


Рис. 1 Восстановление профиля температуры в соответствии с уравнением (9) (точки) и уравнением (12) (штриховая кривая). Точный температурный профиль — сплошная кривая.

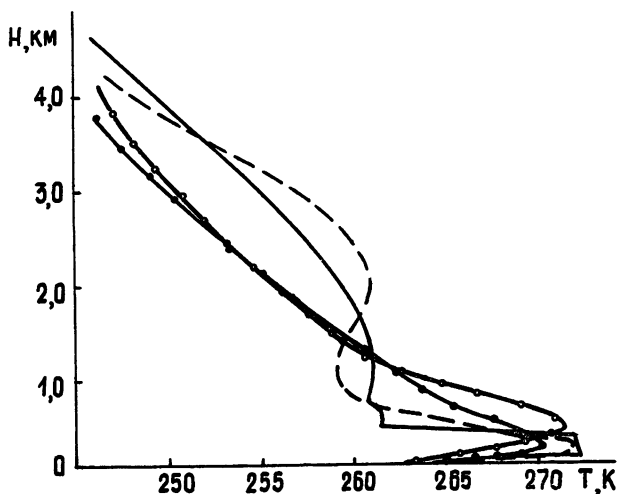


Рис. 2. Восстановление профиля температуры методом статистической регуляризации (светлые точки) и операторным методом с $\delta = 1$ К (темные точки) и с $\delta = 0,01$ К (штриховая кривая). Точный температурный профиль — сплошная кривая.

Предположим, что уравнение (1) имеет непустое множество решений $N = \{x: Ax = f\}$ (выпуклое и замкнутое в силу принятых условий). В такой постановке задача (1) является некорректной в классическом смысле. Пусть вместо точного значения правой части f известно ее дель-

* В качестве H можно рассматривать евклидово пространство R^n .

та-приближение $f^\delta : \|f^\delta - f\| \leq \delta$, так что в действительности задано уравнение $Ax = f^\delta$. Для нахождения решения $x^* \in N$ последнее уравнение заменяется семейством корректных задач, зависящих от положительного параметра α :

$$Ax_\alpha^\delta + \alpha x_\alpha^\delta = f^\delta. \quad (2)$$

Доказывается, что при $\delta/\alpha \rightarrow 0$

$$x_\alpha^\delta \rightarrow \bar{x}, \quad \text{где } \|\bar{x}\| = \min_{x \in N} \|x\|.$$

Одна из основных проблем в теории регуляризирующих алгоритмов — это проблема выбора параметра α при фиксированном значении возмущения δ .

Этой цели служит принцип невязки — способ выбора параметра α , подчиняющийся следующему закону:

$$\|Ax_\alpha^\delta - f^\delta\| = \delta^p \quad (0 < p \leq 1). \quad (3)$$

Доказано, что при $\delta \rightarrow 0$ x_α^δ — решение уравнений (2) и (3) — сильно сходится к \bar{x} , если $0 < p < 1$, и x_α^δ слабо сходится к x^* , если $p = 1$ и x^* — единственное решение (1) (напомним, что в конечномерном пространстве сильная и слабая сходимости эквивалентны).

Сильная сжимимость принципа невязки в задаче вычисления значения непрерывного нелинейного неограниченного оператора впервые была доказана в работе [11]. Позднее этот результат был распространен в работах [9, 10] на произвольные монотонные операторы, в том числе и в задаче нахождения решения операторного уравнения. Установлено, что принцип невязки удовлетворяет общей закономерности сходимости метода регуляризации и, следовательно, является регуляризирующим алгоритмом. Заметим, что в этом методе в общем случае не используется априорная информация о решении уравнения (1).

Для численной реализации принципа невязки весьма важным является вопрос об эффективных методах приближенного решения уравнения (3). Применительно к вариационному методу регуляризации Тихонова для решения уравнения невязки в работе [12] был предложен и исследован метод Ньютона. Там рассмотрен случай линейного оператора A из R^n в R^m (т. е. случай $m \times n$ линейной системы). В настоящей работе для численного решения уравнения (3), где A — произвольный (нелинейный) монотонный оператор, предлагается метод последовательных приближений. Его преимущество по сравнению с методом Ньютона заключается в простоте и универсальности.

Пусть $0 < \delta < 1$ — фиксированное число. В силу (2)

$$\|Ax_\alpha^\delta - f^\delta\| = \alpha \|x_\alpha^\delta\|.$$

Отсюда (3) можно представить в виде

$$\alpha = \frac{\delta^p}{\|x_\alpha^\delta\|} = \varphi(\alpha). \quad (4)$$

В [9, 10] доказано, что $\rho(\alpha) = \alpha \|x_\alpha^\delta\|$ является однозначной, непрерывной, строго монотонно возрастающей функцией, а $\sigma(\alpha) = \|x_\alpha^\delta\|$ — однозначной непрерывной и монотонно невозрастающей функцией параметра α , $\alpha \in (0, \infty)$.

Вследствие этого уравнение (3) и, следовательно, (4) имеет единственное решение $\alpha = \alpha$, а функция $\varphi(\alpha)$ непрерывна и монотонно убывает.

Очевидно, что если $\alpha > \bar{\alpha}$, то $\varphi(\alpha) < \alpha$, и, наоборот, если $\alpha \leq \bar{\alpha}$, то $\varphi(\alpha) \geq \alpha$; $\varphi(\alpha) = \alpha$ только при $\alpha = \bar{\alpha}$. Все это позволяет достаточно элементарно доказать сходимость метода последовательных приближений

$$\alpha_n = \varphi(\alpha_{n-1}), \quad \alpha_0 = \alpha^0. \quad (5)$$

Здесь α^0 — произвольное начальное значение.

Хорошо известно, что достаточным условием сходимости метода последовательных приближений (5) является неравенство $|\varphi'(\alpha)| < 1$. Оно имеет место, например, для уравнения (1) с линейным оператором A (при $\alpha > \bar{\alpha}$ и при условии разрешимости уравнения (2)). Действительно, как показано в [13],

$$0 > \sigma'_\alpha \geq \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}, \quad (6)$$

поэтому

$$0 < \varphi'_\alpha = - \frac{\delta^p \sigma'_\alpha}{\sigma^2(\alpha)} \leq \frac{\delta^p}{\alpha \sigma(\alpha)} = \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} < 1. \quad (7)$$

Оценка (7) позволяет высказать некоторые суждения и о скорости сходимости метода, по крайней мере, вне некоторой окрестности решения, поскольку функция $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)/\alpha$ строго убывает, причем $\psi(\alpha) \geq \geq \delta^p / \|f^\delta\|$: существенное замедление сходимости возможно лишь при приближении к корню уравнения.

Условие $|\varphi'(\alpha)| < 1$ можно заменить условием Липшица для функции $\varphi(\alpha)$. Можно также рассмотреть и случай нелинейного оператора A . Предположим, что функция $\sigma(\alpha)$ дифференцируема (это имеет место, например, если уравнение (2) можно почленно дифференцировать по α).

Тогда

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \sigma(\alpha) + \alpha \frac{d\sigma}{d\alpha} > 0.$$

Отсюда справедлива оценка

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} > - \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} \quad \text{и} \quad 0 < \varphi'(\alpha) < \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}.$$

На практике большой интерес представляет случай линейного замкнутого оператора A с областью определения $D(A) \subseteq H_1$ и областью значений $R(A) \subseteq H_2$, где H_1 и H_2 — гильбертовы пространства. В этом случае изложенный метод регуляризации можно использовать, если от уравнения (1) предварительно перейти к уравнению

$$A^*Ax = A^*f \quad (8)$$

(это же уравнение следует рассматривать, когда априорно неизвестно, что оператор A , действующий из H в H , является положительным). Здесь A^* — оператор, сопряженный к оператору A , A^*A действует из пространства H_1 в пространство H_1 и является положительным оператором.

Регуляризованное уравнение и принцип невязки записываются в следующем виде:

$$A^*Ax_\alpha^\delta + \alpha x_\alpha^\delta = A^*f^\delta; \quad (9)$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{\|A^*f^\delta - A^*f\|^p}{\|x_\alpha^\delta\|} = \alpha. \quad (10)$$

Функция $\varphi(\alpha)$ зависит от точной правой части f . В исследуемых ниже методических примерах $\varphi(\alpha)$ вычислялась по формуле (10) при произвольных α и δ .

Уравнения (9) и (10) позволяют достаточно полно исследовать возможности операторного метода регуляризации. Однако в реальных задачах точное значение правой части f неизвестно, поэтому непосредственное вычисление $\varphi(\alpha)$ невозможно. В этом случае вместо уравнения (10) можно решать уравнение

$$\varphi_1(\alpha) = \frac{\|A^*\| \delta^p}{\|x_\alpha^\delta\|} = \alpha, \quad (11)$$

при этом функция $\varphi_1(\alpha)$ является мажорирующей для $\varphi(\alpha)$.

Возможен и другой путь — построение регуляризованного уравнения в виде [14]

$$AA^*w_\alpha^\delta + \alpha w_\alpha^\delta = f^\delta, \quad x_\alpha^\delta = A^*w_\alpha^\delta, \quad (12)$$

где AA^* действует из H_2 в H_2 , $x_\alpha^\delta \in H_1$. Отметим некоторые преимущества этого метода:

- 1) Априорно известен уровень погрешности правой части f^δ .
- 2) В задачах термического зондирования атмосферы в радиодиапазоне H_2 имеет меньшую размерность по сравнению с пространством H_1 .

Перейдем теперь к конкретному виду оператора A .

Восстановление высотного профиля температуры $T(z)$ по радиометрическим измерениям яркостной температуры B_i сводится к решению нелинейного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$B_i = T_0[1 - \exp(-\tau_m C_i)] + C_i \int_0^\infty \frac{dT}{dz} [\exp(-\tau C_i) - \exp(-\tau_m C_i)] dz, \quad (13)$$

где $C_i = \sec \theta_i$ (θ_i — зенитный угол), а оптическая толщина τ равна

$$\tau = \int_0^z \gamma(\nu, P, T) dh,$$

τ_m — полная оптическая толщина атмосферы, T_0 — температура приземных слоев воздуха. Зависимость суммарного коэффициента поглощения $\gamma(\nu, P, T)$ от частоты ν , давления P и температуры T приводится в [15]. Вместо уравнения относительно функции dT/dz будем рассматривать уравнение относительно

$$x = \frac{dT}{dz} - \frac{dT_{cp}}{dz},$$

где $T_{cp}(z)$ — некоторый известный средний профиль. Уравнение (13) после линеаризации преобразовывается в линейное интегральное уравнение первого рода

$$\int_0^\infty x(z) U(z, C_i) dz = \frac{1}{C_i} \{B_i - T_0[1 - \exp(-\tau_m C_i)]\} - \int_0^\infty \frac{dT_{cp}}{dz} U(z, C_i) dz, \quad (14)$$

в котором ядро

$$U(z, C_i) = \exp(-C_i \tau) - \exp(-C_i \tau_m)$$

и правая часть уравнения являются функциями средней температуры $T_{\text{ср}}(z)$ и не зависят от неизвестной температуры $T(z)$.

Для численного интегрирования уравнение (14) необходимо привести к системе линейных алгебраических уравнений. Переход от интегралов, входящих в уравнение (14), к суммам выполняется следующим образом. Представим интегралы уравнения (14) как сумму интегралов по каждому из отрезков, на которые разбивается весь интервал интегрирования. С достаточной степенью точности можно считать, что на этих отрезках температура является линейной функцией оптической толщины. Все интегралы оказываются табличными, и, как показывают контрольные оценки, такая процедура обеспечивает наиболее высокую точность замены интегралов суммами по сравнению со стандартными квадратурными формулами.

Ошибки процесса алгебраизации, т. е. возмущение самого оператора, оказываются при этом значительно меньше ошибок экспериментальных данных. В результате алгебраизации уравнение (14) сводится к системе линейных уравнений

$$Kx = F, \quad (15)$$

где $x \in R^n$, $F \in R^m$, K — матрица $m \times n$. Поскольку матрица K в общем случае не является положительной, то вместо (15) следует рассматривать либо уравнение

$$K^T Kx = K^T F, \quad x \in R^n, \quad (16)$$

либо уравнение

$$KK^T \omega = F, \quad \omega \in R^m, \quad x = K^T \omega, \quad (17)$$

где K^T — матрица, транспонированная к матрице K . Уравнения (16) и (17) удовлетворяют всем требованиям, предъявляемым к уравнению (1).

Восстановление профилей температуры получено как по результатам реальных измерений, так и на основе математического моделирования эксперимента. В последнем случае на точные значения яркостной температуры набрасывалась ошибка $\pm \delta$, причем параметр δ варьировался в пределах от 0,01 до 1 К. Оказывается, что при заданном уровне невязки решения, полученные при любых значениях f^{δ} в δ -окрестности точного значения правой части f , практически не различаются. Результаты восстановлений приведены на рис. 1—4. На основании численного эксперимента параметр p , входящий в уравнение невязки (3), принят равным единице.

На рис. 1 приведены графики восстановлений модельного профиля операторным методом согласно уравнениям (9) и (12). Решение, полученное с помощью уравнения (12) до высоты 3 км, почти совпадает с решением уравнения (9), т. е. совпадает практически на всем участке, который дает основной вклад в информативность измерений. Это означает, что при восстановлении профиля температуры вместо уравнения (9) можно использовать более удобное уравнение (12).

На рис. 2 и рис. 3 построены графики решений, полученных в соответствии с изложенным здесь операторным методом и методом статистической регуляризации с априорной информацией, заданной в виде корреляционной матрицы B_{TT} . Ошибка измерений яркостной температуры полагалась равной $\delta = 0,01$ К и $\delta = 1$ К для операторного метода и $\delta = 0$ — для метода статистической регуляризации. При низко расположенной почти дельтообразной инверсии температуры (рис. 2) операторный метод регуляризации дает лучшее восстановление температурного профиля. С помощью этого метода даже с ошибкой $\delta = 1$ К лучше восстанавливается сама форма профиля, точнее определяется высота инверсии и ее мощность.

В отличие от рис. 2, где рассматривался искусственный температурный профиль, на рис. 3 построены графики решений для температурного профиля, наблюдавшегося в г. Горьком 25 декабря 1974 г. Ошибка измерений яркостной температуры для операторного метода и для метода статистической регуляризации полагалась равной $\delta = 0,01$ К и $\delta = 1$ К. В этом примере метод статистической регуляризации и операторный метод дают практически одинаковое решение. На рис. 3 приведены графики решений, полученных операторным методом. Значения яркостной температуры находятся в этом случае из расчетов по формуле (13).

На рис. 4 построены графики решений по данным экспериментальных измерений яркостной температуры 31 января 1977 г. в г. Норильске [16]*. Высотный профиль температуры характеризуется в этом случае сильной инверсией в нижних слоях атмосферы с градиентом 70 град/км. Ошибки измерений оцениваются в $0,5$ К при измерениях яркостной температуры на низких зенитных углах и $1,5$ К — на высоких углах. Сравнение метода статистической регуляризации и операторного метода показывает, что в этом примере несколько лучший результат дает метод статистической регуляризации.

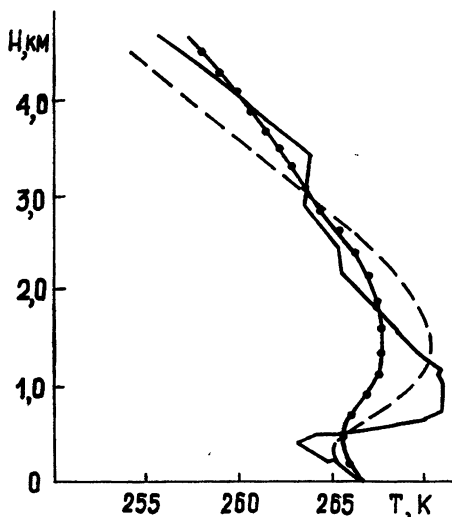


Рис. 3.

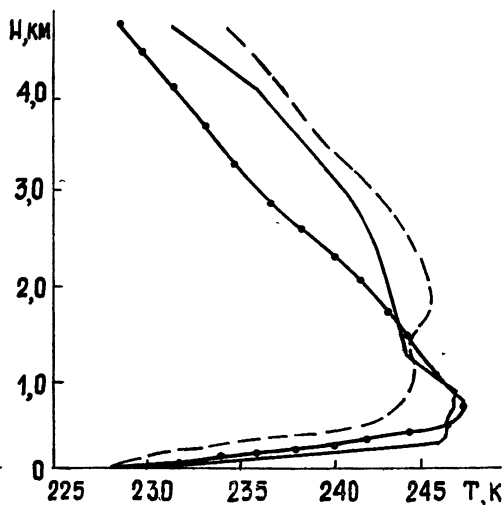


Рис. 4.

Рис. 3. Восстановление профиля температуры для 25.12.1974, г. Горький: сплошная кривая — зондовые значения $T(H)$, штриховая кривая — профиль, восстановленный с ошибкой $\delta = 0,01$ К, темные точки — профиль, восстановленный с ошибкой $\delta = 1$ К.

Рис. 4. Пример восстановления профиля для 31.01.1977 г., г. Норильск: сплошная кривая — зондовые значения $T(H)$, темные точки — восстановление методом статистической регуляризации, штриховая кривая — восстановление операторным методом

Предлагаемый метод по сравнению с методом статистической регуляризации требует меньший объем памяти ЭВМ, поскольку он не использует корреляционные матрицы. Что же касается времени счета, то оно приблизительно одинаковое для обоих методов (порядка 1 минуты на БЭСМ-6).

Авторы благодарны В. С. Троицкому за постоянное внимание к настоящей работе.

* Экспериментальные данные принадлежат А. В. Троицкому.

ЛИТЕРАТУРА

1. Westwater E. R.—Monthly Weather Review, 1972, 100, № 1, p. 15.
2. Miner G. F., Thornton D. D., Welch W. J.—J. Geophys. Res., 1972, 77, № 6, p. 975.
3. Алешин В. И., Наумов А. П., Плечков В. М., Сумин М. И., Троицкий А. В.—Изв. вузов—Радиофизика, 1977, 20, № 2, с. 198.
4. Ершов А. Т., Наумов А. П.—Изв. вузов—Радиофизика, 1974, 17, № 11, с. 1610.
5. Сумин М. И., Троицкий А. В.—Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1977, 13, № 10, с. 1090.
6. Турчин В. Ф.—ЖВММФ, 1967, 7, № 6, с. 1270.
7. Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С.—УФН, 1970, 102, вып. 3, с. 345.
8. Альбер Я. И., Рязанцева И. П.—ЖВММФ, 1975, 15, № 2, с. 283.
9. Альбер Я. И., Рязанцева И. П.—ДАН СССР, 1978, 239, № 5, с. 1017.
10. Альбер Я. И., Рязанцева И. П.—Дифференц. уравнения, 1979, 15, № 2, с. 231.
11. Альбер Я. И.—Сиб. матем. журн., 1978, 19, № 2, с. 254; Препринт НИРФИ, № 94.—Горький, 1976.
12. Морозов В. А., Гордонова В. И.—ЖВММФ, 1973, 13, № 3, с. 539.
13. Альбер Я. И.—Дифференц. уравнения, 1975, 11, № 12, с. 2242.
14. Иванов В. В., Кудринский В. Ю.—ЖВММФ, 1966, 6, № 5, с. 831.
15. Жевакин С. А., Наумов А. П.—Изв. вузов—Радиофизика, 1966, 9, № 3, с. 433.
16. Алешин В. И., Рассадовский В. А., Троицкий А. В.—В сб.: V Всесоюзное совещание по радиометеорологии,—Кишинев: 1978.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
14 сентября 1979 г.

NUMERICAL REALIZATION OF THE RESIDUAL PRINCIPLE AND ITS
APPLICATION FOR THE SOLUTION OF THE ATMOSPHERE
THERMAL SOUNDING PROBLEM

V. I. Aleshin, Ya. I. Al'ber, Yu. V. Novikov

An operator regularization method is proposed for finding the atmosphere height temperature profile according to the ground-based radiometric measurements. The regularization parameter is defined in accordance with the principle of residual. It is shown that the equation of residual is effectively solved by the method of successive approximations. A solution obtained by the operator method is compared with the solution obtained by the method of statistical regularization [3-5]. The operator method in contrast to the statistical one does not demand a priori information in the form of the temperature correlation matrix. Numerical experiments show the efficiency of the method proposed.