УДК 538.56 : 519.25

ВОЗДЕЙСТВИЕ ТЕЛЕГРАФНОГО СИГНАЛА НА ДИНАМИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А. А. Бердников

Рассмотрим динамическую систему следующего вида:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)n(t), \quad t \geqslant t_0, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — детерминированные функции, а $n(t)$ — несимметричный случайный телеграфный сигнал (СТС) с двумя состояниями n_1 и n_2. Вероятности переходов из одного состояния в другое за малое время Δt равны $P\{n_1 \to n_2\} = \nu_1 \Delta t$, $P\{n_2 \to n_1\} = \nu_2 \Delta t$, а моменты переходов являются пуассоновским потоком событий. Вероятности начальных состояний $P\{n(t_0) = n_1\} = p_1$, $P\{n(t_0) = n_2\} = p_2$.

Процесс $x(t)$ при $t \to \infty$ (стационарный режим) принадлежит области, определяемой неравенством $[f(x) + g(x)n_1][f(x) + g(x)n_2] \leqslant 0$, т. е. интервалу перемещения точки устойчивого равновесия системы (1) при переходе СТС из одного состояния в другое. Если система (1) имеет несколько точек устойчивого равновесия и соответствующие интервалы не пересекаются, то процесс $x(t)$ принадлежит лишь одному из интервалов и не может переходить из него в другие. В этом случае начальное состояние x_0 однозначно указывает область определения $x(t)$, обозначаемую в дальнейшем символом X.

Для двумерного процесса $\{x(t), n(t)\}$ с непрерывной компонентой $x(t)$ и дискретной $n(t)$ введем условные вероятностные характеристики [1]

$$p_{ik}(x, t | x_0, t_0) = p(x, t | n(t) = n_k;\ x_0;\ n(t_0) = n_i) P\{n(t) = n_k | n(t_0) = n_i\},$$

которые, можно показать, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных типа уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{ik}(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} = &- \frac{\partial}{\partial x} \{[f(x) + g(x)n_k] p_{ik}(x, t | x_0, t_0)\} + \\ &+ \sum_{s=1}^{2} (-1)^{k+s+1} \nu_s p_{is}(x, t | x_0, t_0), \quad i, k = 1, 2. \end{aligned} \tag{2}$$

При этом переходная плотность вероятности процесса $x(t)$ может быть найдена по формуле

$$p(x, t | x_0, t_0) = \sum_{k,\, i=1}^{2} p_i p_{ik}(x, t | x_0, t_0). \tag{3}$$

Решать систему (2) необходимо при начальных условиях

$$p_{ik}(x, t | x_0, t_0) = \delta_{ik} \delta(x - x_0), \quad t = t_0, \quad i, k = 1, 2$$

и нулевых граничных условиях на границах области X.

Получить решение системы уравнений (2) в общем виде не представляется возможным. Поэтому рассмотрим стационарный режим динамической системы (1), считая, что он существует. В этом случае $p_{11\,\text{ст}}(x) = p_{21\,\text{ст}}(x)$ и $p_{12\,\text{ст}}(x) = p_{22\,\text{ст}}(x)$, и решениями системы (2), при равенстве нулю левых ее частей, являются функции

$$p_{ik\,\text{ст}}(x) = \frac{(-1)^{k+1} C}{f(x) + g(x)n_k} \exp\left[- \int \sum_{s=1}^{2} \frac{\nu_s\, dx}{f(x) + g(x)n_s} \right], \quad i, k = 1, 2,$$

неотрицательность которых в области X обеспечивается соответствующими знаками знаменателей. Постоянная C определяется из условий нормировки по переменной x к вероятностям стационарных состояний процесса $n(t)$:

$$\int_X p_{ik\,\text{ст}}(x) dx = \frac{\nu_s}{\nu_1 + \nu_2}, \quad i, k = 1, 2, \quad s = 3 - k.$$

Стационарное распределение процесса $x(t)$, как следует из (3), равно

$$p_{\text{ст}}(x) = \sum_{k=1}^{2} p_{ik\,\text{ст}}(x) = C \frac{(n_2 - n_1) g(x) \exp\left[- \int \sum_{s=1}^{2} \frac{\nu_s\, dx}{f(x) + g(x)n_s} \right]}{[f(x) + g(x)n_1][f(x) + g(x)n_2]}. \tag{4}$$

Выражение (4) обобщает формулу (21′) из [2] на случай несимметричного СТС, переходя в нее при $n_1 = -n_2 = n$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$:

$$p_{\text{ст}}(x) = \frac{2nCg(x)}{n^2 g^2(x) - f^2(x)} \exp\left[2\nu \int \frac{f(x)\,dx}{n^2 g^2(x) - f^2(x)}\right]. \qquad (5)$$

Отметим также, что из (5) при $\nu \to \infty$ следует распределение

$$p_{\text{ст}}(x) = \frac{\text{const}}{|g(x)|} \exp\left[\frac{2}{n_0^2} \int \frac{f(x)\,dx}{g^2(x)}\right],$$

соответствующее стационарному распределению процесса $x(t)$ — реакции динамической системы (1) на воздействие белого гауссова шума $n(t)$—лишь при $n = \sqrt{\nu}\, n_0$, где n_0^2— интенсивность эквивалентного белого шума.

Полученные в статье результаты позволяют определить одномерное стационарное распределение реакции динамической системы первого порядка на воздействие несимметричного случайного телеграфного сигнала и могут найти применение, например, при генерации случайных процессов методом электронного моделирования стохастических дифференциальных уравнений. При этом точное выражение стационарного распределения позволяет выбрать параметры СТС, например, из условия обеспечения близости по информационной мере Кульбака распределения генерируемого процесса и требуемого стационарного распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И., Кульман Н К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. — М.: Сов. радио, 1975.
2. Кляцкин В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 4, с 562.

Ленинградский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию 17 июля 1979 г., после доработки 10 марта 1980 г.

УДК 535.2

ВЗАИМНЫЕ СПЕКТРЫ ТУРБУЛЕНТНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА НА РАЗНЕСЕННЫХ ДЛИНАХ ВОЛН

А. С. Гурвич, Вл. В. Покасов

Корреляции флуктуаций интенсивности $I_{\lambda 1}$, $I_{\lambda 2}$ света на двух длинах волн λ_1 и λ_2 исследовались экспериментально и теоретически в ряде работ [1–4]. В настоящем сообщении приведены экспериментальные данные о взаимных частотных спектрах флуктуаций интенсивности, наблюдавшихся в одной точке для совмещенных широких световых пучков с длинами волн $\lambda_1 = 0{,}44$ и $\lambda_2 = 0{,}63$ *мкм* в турбулентной атмосфере.

Взаимный спектр $W_{1,2}(\omega)$ формально проще всего определить через фурье-преобразование корреляционной функции $B_{1,2}(\tau)$:

$$B_{1,2}(\tau) = \frac{\langle I_{\lambda 1}(t)\, I_{\lambda 2}(t+\tau)\rangle}{\langle I_{\lambda 1}\rangle \langle I_{\lambda 2}\rangle},$$

$$W_{1,2}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} B_{1,2}(\nu)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau .$$

Из этого определения следует, что $W_{1,2}(\omega)$ есть корреляция флуктуаций интенсивности двух сигналов, прошедших идентичные узкополосные фильтры с центральной частотой ω.

Эксперимент был спланирован таким образом, чтобы исследовать условия случайных фокусировок излучения, теоретическое исследование которых представляется наиболее сложным. В качестве источников света использовались He—Cd- и He—Ne-лазе-