ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 8 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 539.12

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯДА ПРИ ПЕРЕХОДЕ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ В ОДНООСНЫЙ КРИСТАЛЛ

В. А. Давыдов

Рассмотрено излучение заряда, равномерно движущегося в нестационарной среде с меняющейся во времени изотропией. Для случая мгновенного перехода изотропной среды в одноосный кристалл вычислены поля и энергия излучения обыкновенных и необыкновенных волн.

Появление работ [1, 2] вызвало дальнейший интерес к излучению источников в нестационарных средах. В работах [3, 4] вычислены характеристики излучения заряда в средах со ступенчатой и плавной нестационарностями. Во многих случаях изменение электромагнитных свойств среды во времени сопровождается также нарушением ее изотропии. В работе [5] показано, что в средах с меняющейся анизотропией возможно излучение даже неподвижного заряда, и вычислены его характеристики для случая мгновенного перехода изотропной среды в одноосный кристалл. Ниже рассмотрено излучение равномерно движущегося заряда при переходе изотропной среды в одноосный кристалл в случае произвольной взаимной ориентации оптической оси и направления движения заряда.

Перед тем как вычислить поле излучения, необходимо рассмотреть вопрос о совместности системы условий на скачке. Мы воспользуемся следующими условиями на скачке (в момент $t = 0$):

$$\boldsymbol{D}_{-0} = \boldsymbol{D}_{+0}, \quad \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)_{-0} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)_{+0}, \tag{1}$$

т. е. электрическая индукция и ее производная по времени должны быть непрерывны в момент скачка. Эта система двух векторных уравнений содержит в себе шесть скалярных. При мгновенном переходе изотропной среды в одноосный кристалл для каждого значения волнового вектора $\boldsymbol{k}$ излучается четыре волны (две обыкновенные и две необыкновенные). Поскольку поляризация обоих типов волн заранее задана направлением их распространения и геометрией кристалла, то для определения их векторов электрической индукции нужно найти лишь четыре скаляра. Рассмотрим поэтому условия, при которых система (1) имеет единственное решение. Пусть оптическая ось кристалла направлена по оси x. Тогда в системе главных осей тензор диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\perp} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Фурье-компонента индукции равномерно движущегося заряда до скачка равна

$$\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{d}_1 e^{-i(\boldsymbol{kV})t}, \tag{3}$$

фурье-компонента индукции (с учетом поляризации обыкновенных и необыкновенных волн) после скачка —

$$D_2 = d_2 e^{-i(kV)t} + A_1[e_x k] \exp\left(-i\frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}t\right) + A_2[e_x k] \exp\left(i\frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}t\right) + \\ + B_1[k[e_x k]] \exp\left(-i\frac{kc}{n}t\right) + B_2[k[e_x k]] \exp\left(i\frac{kc}{n}t\right), \tag{4}$$

где e_x — единичный орт оси x, $n = \left[\frac{\cos^2\theta'}{\varepsilon_\perp} + \frac{\sin^2\theta'}{\varepsilon_\parallel}\right]^{-\frac{1}{2}}$, θ' — угол между k и оптической осью кристалла A_1, A_2 и B_1, B_2 — скаляры, определяющие индукцию соответственно обыкновенных и необыкновенных волн.

Подставив (3) и (4) в уравнения (1), получим условие, при котором система (1) будет иметь единственное решение:

$$(k_y^2 + k_z^2)(kd) = 0, \tag{5}$$

где $d = d_1 - d_2$. Из (5) видно, что, для того чтобы система (1) имела единственное решение, нужно, чтобы поле d было поперечным. Как было показано в [2], в нестационарной среде могут излучаться лишь поперечные волны, и ответственными за их излучение могут быть лишь поперечные части полей движущегося заряда. Поэтому, ничего не теряя, мы можем взять в качестве d_1 и d_2 лишь поперечные части электрической индукции движущегося заряда. Тогда в системе (1) останется лишь 4 независимых уравнения, и она будет иметь единственное решение. Для нашего случая решение системы (1) имеет вид

$$A_{1,2} = -\frac{1}{2k_z}\left(1 \pm \frac{(kV)}{kc}\sqrt{\varepsilon_\perp}\right)\left(d_y + \frac{k_x k_y}{k_y^2 + k_x^2} d_x\right); \tag{6}$$

$$B_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{(kV)}{kc} n\right)\frac{d_x}{k_y^2 + k_z^2}. \tag{7}$$

Пусть заряд q движется со скоростью V вдоль оси z и находится в начале координат в момент $t=0$, когда происходит мгновенный переход изотропной среды с диэлектрической проницаемостью ε_0 в одноосный кристалл (отметим, что для получения общих выражений для характеристик излучения выбор направления движения заряда не играет роли, мы конкретизируем его лишь для последующего рассмотрения важного частного случая). Оптическую ось кристалла направим по оси x, так что тензор диэлектрической проницаемости кристалла описывается выражением (2). Для поперечной части фурье-компоненты индукции равномерно движущегося заряда в изотропной среде с диэлектрической проницаемостью ε_0 (среда до скачка) имеем выражение

$$D_{0,k}^{t_2} = -i\frac{q}{2\pi^2}\frac{(kV)}{c^2}\varepsilon_0 \frac{\left(V - \frac{k(kV)}{k^2}\right)}{\varepsilon_0\frac{(kV)^2}{c^2} - k^2} e^{-i(kV)t}. \tag{8}$$

Найдем теперь электрическую индукцию равномерно движущегося заряда в одноосном кристалле. Уравнения для потенциалов A и φ

в случае «обобщенной» кулоновской калибровки $\operatorname{div}(\hat{\varepsilon} \boldsymbol{A}) = 0$ имеют вид [6]

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{\hat{\varepsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A} = -\frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} + \frac{\hat{\varepsilon}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \varphi,$$

$$(\nabla \hat{\varepsilon} \nabla)\varphi = -4\pi\rho, \tag{9}$$

где

$$(\nabla \hat{\varepsilon} \nabla) = \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \varepsilon_{\perp}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

$$\rho = q\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t), \qquad \boldsymbol{j} = q\boldsymbol{V}\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t). \tag{10}$$

Для фурье-компонент $\boldsymbol{A}$ и φ имеем

$$\varphi_{\boldsymbol{k}} = \frac{q}{2\pi^2} \frac{e^{-i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{V}t)}}{(\boldsymbol{k}\hat{\varepsilon}\boldsymbol{k})}, \qquad \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}} = -\frac{q}{2\pi^2 c} \Lambda^{-1}\left[\boldsymbol{s} - \boldsymbol{k}\frac{(\boldsymbol{k}\hat{\varepsilon}\Lambda^{-1}\boldsymbol{s})}{(\boldsymbol{k}\hat{\varepsilon}\Lambda^{-1}\boldsymbol{k})}\right] e^{-i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{V})t}, \tag{11}$$

где

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{V} - \hat{\varepsilon}\boldsymbol{k}\frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{V})}{(\boldsymbol{k}\hat{\varepsilon}\boldsymbol{k})}; \tag{12}$$

$$\Lambda = \hat{\varepsilon}\frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{V})^2}{c^2} - \hat{I}k^2; \tag{13}$$

$$(\boldsymbol{k}\hat{\varepsilon}\boldsymbol{k}) = \varepsilon_{\parallel} k_x^2 + \varepsilon_{\perp}(k_y^2 + k_z^2), \tag{14}$$

$\hat{I}$ — единичная матрица.

Найдем теперь электрическую индукцию по формуле

$$\boldsymbol{D} = -\hat{\varepsilon}\left(\operatorname{grad}\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right). \tag{15}$$

Используя (10), (11), (15), получим интересующую нас поперечную часть $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{tr}} = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{k}} - \dfrac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{k}})}{k^2}$ электрической индукции:

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{tr}} = -ie^{-i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{V})t}\frac{q}{2\pi^2}\left(\frac{\hat{\varepsilon}\boldsymbol{k}}{(\boldsymbol{k}\hat{\varepsilon}\boldsymbol{k})} - \frac{\boldsymbol{k}}{k^2} + \frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{V})}{c^2}\hat{\varepsilon}\Lambda^{-1}\left[\boldsymbol{s} - \frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\hat{\varepsilon}\Lambda^{-1}\boldsymbol{s})}{(\boldsymbol{k}\hat{\varepsilon}\Lambda^{-1}\boldsymbol{k})}\right]\right). \tag{16}$$

Обращает на себя внимание член в (16), не зависящий от скорости и обращающийся в нуль при замене тензора $\hat{\varepsilon}$ на скаляр ε. Именно он ответствен за излучение неподвижного заряда при переходе среды из изотропной в одноосный кристалл, предсказанное в [5].

Теперь мы можем записать полное поперечное поле после скачка:

$$\boldsymbol{D}_{1,\boldsymbol{k}}^{\mathrm{tr}} = -i\frac{q}{2\pi^2}\left(\frac{\hat{\varepsilon}\boldsymbol{k}}{(\boldsymbol{k}\hat{\varepsilon}\boldsymbol{k})} - \frac{\boldsymbol{k}}{k^2} + \frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{V})}{c^2}\hat{\varepsilon}\Lambda^{-1}\left[\boldsymbol{s} - \frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\hat{\varepsilon}\Lambda^{-1}\boldsymbol{s})}{(\boldsymbol{k}\hat{\varepsilon}\Lambda^{-1}\boldsymbol{k})}\right]\right)\times$$

$$\times e^{-i(kV)t} + A_1[e_x k] \exp\left(-i\frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}t\right) + A_2[e_x k] \exp\left(i\frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}t\right) + \tag{17}$$
$$+ B_1[k[e_x k]] \exp\left(-i\frac{kc}{n}t\right) + B_2[k[e_x k]] \exp\left(i\frac{kc}{n}t\right).$$

Из (17) и (8) видно, что величина d, введенная выше, равна

$$d = i\frac{q}{2\pi^2}\left\{\frac{\hat{\varepsilon}k}{(k\hat{\varepsilon}k)} - \frac{k}{k^2} + \frac{(kV)}{c^2}\hat{\varepsilon}\Lambda^{-1}\left[s - \frac{k(k\hat{\varepsilon}\Lambda^{-1}s)}{(k\hat{\varepsilon}\Lambda^{-1}k)}\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{(kV)}{c^2}\varepsilon_0 \frac{\left(V - \frac{k(kV)}{k^2}\right)}{\varepsilon_0\frac{(kV)^2}{c^2} - k^2}\right\}. \tag{18}$$

Рассмотрим теперь излучение необыкновенных волн. Воспользовавшись (18), получим из (7) выражения для B_1 и B_2:

$$B_{1,2} = i\frac{q}{2\pi^2}\left(1 \pm \frac{(kV)n}{kc}\right)\frac{k_x}{k_y^2 + k_z^2} \times$$
$$\times \frac{(\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)(k_y^2 + k_z^2) + \frac{(kV)^2}{c^2}\varepsilon_\parallel(\varepsilon_\perp - \varepsilon_0)}{\left(\varepsilon_0\frac{(kV)^2}{c^2} - k^2\right)\left(\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp\frac{(kV)^2}{c^2} - (k\hat{\varepsilon}k)\right)}, \tag{19}$$

где знак «+» соответствует B_1, а знак «—» — B_2. Звездочка означает комплексное сопряжение.

Для вычисления энергии излучения необходимо найти напряженность магнитного поля излученных необыкновенных волн. Воспользовавшись (4), получим

$$H^e_{1,k} = -\frac{|k|}{n}B_1[e_x k], \qquad H^e_{2,k} = -(H^e_{1,-k})^*. \tag{20}$$

Для того, чтобы найти энергию излучения, необходимо учесть, что в направлении k будет распространяться не только волна с напряженностью магнитного поля $H^e_{1,k}$, но и волна с $H^e_{2,-k}$. Теперь можно вычислить энергию излучения на частоте ω по формуле

$$\int_0^\infty W_\omega d\omega = 2\pi^2 \int dk H_k H_{-k}. \tag{21}$$

Из (19)—(21) следует

$$\int_0^\infty W^e_\omega d\omega = \frac{q^2}{4\pi^2}\int \frac{k_x^2 k^2 dk}{(k_y^2 + k_z^2)n^2}\left(1 + \frac{k_z V n}{kc}\right)^2 \times$$
$$\times \frac{\left[(\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)(k_y^2 + k_z^2) + \frac{k_z^2 V^2}{c^2}\varepsilon_\parallel(\varepsilon_\perp - \varepsilon_0)\right]^2 dk}{\left(\varepsilon_0\frac{k_z^2 V^2}{c^2} - k^2\right)^2\left(\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp\frac{k_z^2 V^2}{c^2} - (k\hat{\varepsilon}k)\right)^2}. \tag{22}$$

Рассмотрим теперь важный частный случай движения заряда перпендикулярно оптической оси кристалла. Введя сферическую систему координат с осью, направленной по оси x, полярным углом θ' и азимутальным углом φ', который берет отсчет от оси z, получим из (22)

$$W_\omega^e = \frac{q^2}{4\pi^2 c}\int\left(1+\frac{Vn}{c}\sin\theta'\cos\varphi'\right)^2\frac{\cos^2\theta'\sin^2\theta'}{n}\times$$
$$[(\varepsilon_\parallel-\varepsilon_\perp)+\frac{V^2}{c^2}\varepsilon_\parallel(\varepsilon_\perp-\varepsilon_0)\cos^2\varphi']^2 d\Omega' \tag{23}$$
$$\times\frac{}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\varepsilon_0\sin^2\theta'\cos^2\varphi'\right)^2\left(\varepsilon_\parallel\cos^2\theta'+\varepsilon_\perp\sin^2\theta'-\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta'\cos^2\varphi'\right)^2}.$$

Формула (23) дает выражение для энергии излучения необыкновенных волн на частоте ω, но не описывает угловое распределение. Это получается из-за того, что в необыкновенной волне направление распространения энергии не совпадает с направлением волнового вектора. Однако этот недостаток формулы (23) может быть легко устранен. Действительно, как показано в [7], угол θ между лучевым вектором и оптической осью связан с углом θ' соотношением $\operatorname{tg}\theta=\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}\theta'$. Таким образом, для получения правильного углового распределения нужно в (23) сделать замену переменных под знаком интеграла: $\theta=\operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}\theta'\right)$, $\varphi=\varphi'$.

Рассмотрим некоторые свойства излучения необыкновенных волн. Излучение обращается в нуль в направлениях по и перпендикулярно оптической оси. В определенных случаях энергия излучения может стать равной нулю при некотором значении угла φ, что соответствует обращению в нуль числителя подынтегрального выражения в (23). При стремлении скорости заряда к нулю энергия излучения, в отличие от изотропного случая, к нулю не стремится (см. [5]).

Рассмотрим теперь излучение обыкновенных волн. Из (6) и (18) имеем

$$A_1=\frac{iq(\boldsymbol{k}\boldsymbol{V})^2}{4\pi^2k^2c^2}\frac{k_y(\varepsilon_\perp-\varepsilon_0)}{k_z(k_y^2+k_z^2)\left(1-\varepsilon_0\frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{V})^2}{k^2c^2}\right)\left(1-\sqrt{\varepsilon_\perp}\frac{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{V})}{kc}\right)k^2},$$
$$A_2(\boldsymbol{k})=-A_1^*(-\boldsymbol{k}). \tag{24}$$

С помощью выражения (4) вычислим напряженность магнитного поля излученных обыкновенных волн:

$$\boldsymbol{H}_{1,\boldsymbol{k}}^0=\frac{1}{k\sqrt{\varepsilon_\perp}}[\boldsymbol{k}[\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{k}]]A_1,\qquad \boldsymbol{H}_{2,\boldsymbol{k}}^0=(\boldsymbol{H}_{1,-\boldsymbol{k}}^0). \tag{25}$$

Найдем энергию излучения, используя (21) и учтя, что в направлении распространяется не только волна с амплитудой магнитного поля, равной $\boldsymbol{H}_{1,\boldsymbol{k}}^0$, но и волна с $\boldsymbol{H}_{2,-\boldsymbol{k}}^0$:

$$\int d\omega W_\omega^0=q^2\frac{V^4(\varepsilon_\perp-\varepsilon_0)^2}{4\pi^2\varepsilon_\perp c^4}\int\frac{k_y^2k_z^2}{(k_y^2+k_z^2)k^4}\times \tag{26}$$

$$\times \frac{dk}{\left(1-\frac{k_zV}{kc}\sqrt{\varepsilon_\perp}\right)^2\left(1-\frac{(k_zV)^2}{k^2c^2}\varepsilon_0\right)^2}.$$

В описанной выше сферической системе координат получим для случая движения заряда перпендикулярно оптической оси кристалла

$$W_\omega^0=\frac{q^2V^4}{4\pi^2\sqrt{\varepsilon_\perp}c^5}(\varepsilon_0-\varepsilon_\perp)^2, \tag{27}$$

$$\int d\Omega\,\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\left(1-\frac{V}{c}\sqrt{\varepsilon_\perp}\sin\theta\cos\varphi\right)^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\varepsilon_0\sin^2\theta\cos^2\varphi\right)^2}.$$

В отличие от выражения (23) формула (27) дает и угловое распределение излучения, поскольку в обыкновенной волне направления волнового и лучевого векторов совпадают. Существенно, что энергия излучения обыкновенных волн не зависит от $\varepsilon_\parallel$. Как показывает выражение (27), заряд не излучает в направлении оптической оси, в направлении движения, а также в направлении оси y. Покоящийся заряд обыкновенные волны не излучает. Интересно, что, когда переход изотропной среды в одноосный кристалл осуществляется посредством эффекта Керра, обыкновенные волны также не излучаются. Действительно, в случае эффекта Керра $\varepsilon_\parallel=\varepsilon_0+\alpha E^2$, $\varepsilon_\perp=\varepsilon_0$, где E — напряженность внешнего электрического поля. Поскольку интенсивность излучения обыкновенных волн не зависит от $\varepsilon_\parallel$, то в случае эффекта Керра она обращается в нуль.

В заключение необходимо отметить, что в предельном случае, когда среда после скачка также изотропна, сумма энергий обыкновенных и необыкновенных волн приводит к известному выражению для энергии излучения при мгновенном скачке диэлектрической проницаемости без изменения изотропии, полученному в [2].

Автор благодарит Б. М. Болотовского за полезные замечания и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1 Гинзбург В. Л. — Изв. вузов — Радиофизика, 1973, **16**, № 4, с. 512.
2. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. — ЖЭТФ, 1973, **65**, № 1, с. 132.
3. Давыдов В. А. — Вестник МГУ. Физика, астрономия, 1978, **19**, № 3, с. 58.
4 Давыдов В. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 1, с. 95.
5. Манева Г. М. — Краткие сообщения по физике ФИАН, 1977, № 2, с. 21.
6. Болотовский Б. М. — УФН, 1957, **62**, с. 201.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматгиз, 1959, с. 395.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 28 июня 1979 г., после доработки 1 февраля 1980 г.

RADIATION OF A CHARGE WHEN PASSING FROM AN ISOTROPIC MEDIUM INTO A UNIAXIAL CRYSTAL

V. A. Davydov

The author consideres radiation of a charge uniformly moving in a nonstationary medium with varying in time isotropy For the case of instantaneous transition of an isotropic medium into a uniaxial crystal a field and the radiation energy of ordinary and unordinary waves have been calculated.