ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 8 *РАДИОФИЗИКА* *1980*

УДК 538.56 : 519.25

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЮ НЕ ДЕЛЬТА-КОРРЕЛИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ СИЛ

А. Н. Малахов, О. В. Музычук

Развивается метод анализа динамических систем довольно общего вида, подверженных интенсивным случайным воздействиям с произвольным масштабом корреляции. Строятся цепочки кинетических уравнений для отыскания одноточечных вероятностных характеристик. Обрыванию этих цепочек на некотором шаге соответствует пренебрежение статистическими связями высших порядков между случайным воздействием и некоторым его функционалом. Установлено соответствие предложенной процедуры получения замкнутых кинетических уравнений другому подходу, основанному на замене гауссовой случайной силы суперпозицией статистически независимых телеграфных процессов. На некоторых примерах исследована возможность использования второго приближения для отыскания вероятностных характеристик нелинейных систем и систем с флуктуирующими параметрами.

1. В статистической физике, в задачах теории распространения волн в случайно-неоднородных средах, в статистической радиотехнике для отыскания вероятностных характеристик процессов и полей широко используются кинетические уравнения марковского (или первого диффузионного) приближения [1, 2]. Эти уравнения являются точными лишь в случае дельта-коррелированных случайных воздействий. В то же время ясно, что идеализация реальных физических процессов дельта-коррелированными сама по себе предполагает определенные допущения и в ряде случаев может оказаться неприемлемой. В настоящее время сравнительно хорошо изучены задачи отыскания первых двух моментов выходной координаты стохастических линейных систем с небелыми случайными воздействиями, являющимися марковскими процессами [3–6]. Осуществить более общее статистическое описание (в том числе нелинейных систем) удавалось лишь для случайных сил, представляющих собой марковские процессы с конечным числом состояний, прежде всего для «телеграфных» воздействий с пуассоновской статистикой перескоков [4, 7, 8].

В принципе, указанное вероятностное описание можно осуществлять, привлекая аппарат многомерных марковских процессов, однако на этом пути чрезвычайно трудно добиться практических результатов в силу сложности решения кинетических уравнений в частных производных. В настоящей работе предлагается метод построения кинетических уравнений для вероятностных характеристик динамических систем довольно общего вида с не дельта-коррелированными случайными силами. Рассмотрены две модели таких сил: гауссов марковский процесс и квадрат гауссова процесса. Развиваемая методика является по существу дальнейшим обобщением кумулянтного подхода [9], использованного в [6, 10] для нахождения моментов выходной координаты стохастических линейных систем с небелыми воздействиями.

2. Рассмотрим сначала одномерную динамическую систему, описываемую уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)\,\alpha(t), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — произвольные функции, а случайная сила $\alpha(t)$ представляет собой гауссов марковский процесс. Зададим его вспомогательным стохастическим уравнением

$$\frac{d\alpha}{dt} + \Pi\alpha = \eta(t), \tag{2}$$

где $\eta(t)$ — гауссов дельта-коррелированный шум, для которого

$$\langle\eta\rangle = 0, \quad \langle\eta(t)\eta(t-\tau)\rangle = D_\eta\,\delta(\tau), \quad D_\eta = 2\Pi\langle\alpha^2\rangle$$

(последнее равенство обусловлено тем, что процесс $\alpha(t)$ полагается стационарным). Система уравнений (1), (2) определяет марковскую совокупность $\{\alpha(t), x(t)\}$, статистическое описание которой осуществимо на основе двумерной плотности вероятности $W_{\alpha x}(\alpha, x; t)$. Поскольку решить соответствующее «двумерное» уравнение Фоккера — Планка практически никогда не удается, мы рассмотрим другой путь.

Пусть $\psi(x)$ — произвольная, физически «хорошая» функция. На основании (1) запишем уравнение Лиувилля для эволюции среднего значения $\langle\psi(x)\rangle$:

$$\frac{\partial\langle\psi(x)\rangle}{\partial t} = \left\langle f(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right\rangle + \left\langle\alpha(t)\,g(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right\rangle. \tag{3}$$

Последний член этого уравнения не является замкнутым относительно одномерной плотности вероятности выходной координаты. Обозначив

$$\alpha(t)\,g(x)\,\frac{\partial\psi(x)}{\partial x} = \psi_1(x, t),$$

запишем на основании (1), (2) кинетическое уравнение для $\langle\psi_1(x, t)\rangle$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Pi\right)\langle\psi_1\rangle = \left\langle f\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right\rangle + \left\langle\alpha^2(t)\left(g\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi\right\rangle.$$

Последнее статистическое среднее имеет смысл представить в виде

$$\left\langle\alpha^2\left(g\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi\right\rangle = \langle\alpha^2\rangle\left\langle\left(g\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi\right\rangle + \left\langle\alpha, \alpha, \left(g\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi\right\rangle,$$

где $\langle\alpha, \alpha, Z\rangle$ — кумулянтная скобка (совместный кумулянт третьего порядка), $Z = \left(g\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi$ — некоторый функционал случайной силы $\alpha(t)$. Введя обозначения*

$$\langle\psi_s(x, t)\rangle = \left\langle\alpha^{[s]}(t), \left(g\frac{\partial}{\partial x}\right)^s\psi(x)\right\rangle, \qquad s = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

и используя свойства кумулянтных скобок [9], можно прийти к следующей цепочке кинетических уравнений:

$$\frac{\partial\langle\psi\rangle}{\partial t} = \left\langle f\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\rangle + \langle\psi_1\rangle,$$

* Без оператора статистического усреднения функция $\psi_s(x, t)$ представляет собой так называемую «неполную кумулянтную скобку», см. Приложение, а также [9].

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Pi\right)\langle\psi_1\rangle=\left\langle f\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right\rangle+\langle\alpha^2\rangle\left\langle\left(g\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi\right\rangle+\langle\psi_2\rangle, \quad (5)$$

. . . .

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+s\Pi\right)\langle\psi_s\rangle=\left\langle f\frac{\partial\psi_s}{\partial x}\right\rangle+s\langle\alpha^2\rangle\left\langle\left(g\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi_{s-1}\right\rangle+\langle\psi_{s+1}\rangle,$$

. . . .

В силу статистической независимости случайной силы $\alpha(t)$ и любого функционала вида $Z[\alpha]=Z(x[\alpha])$ в начальный момент времени $t=0$ вспомогательные переменные $\langle\psi_s\rangle$ обладают нулевыми начальными условиями

$$\langle\psi_s(x,\ 0)\rangle=0, \qquad s=1,\ 2,\ldots,$$

искомая же функция $\langle\psi(x)\rangle$ может иметь произвольное начальное условие.

Система уравнений (5) — точная; при $s\to\infty$ в ней содержится вся статистическая информация о выходной координате $x(t)$, которая есть в двумерном уравнении Фоккера — Планка. Замыкание цепочки (5) на некотором шаге можно осуществить двумя путями: а) опустить функцию $\langle\psi_n\rangle$ в уравнении для $\langle\psi_{n-1}\rangle$; б) замкнуть уравнение для функции $\langle\psi_{n-1}\rangle$, формально полагая случайную силу дельта-коррелированной только в уравнении для $\langle\psi_n\rangle$. Соответствующее способу замыкания (а) решение для функции $\langle\psi(x)\rangle$, следуя терминологии [6, 10], будем называть результатами n-го, а случаю (б) — n-го диффузионного приближения. Способ замыкания (а) соответствует пренебрежению статистическими связями высших порядков между случайной силой и некоторым ее функционалом.

Осуществив предельный переход к δ-коррелированному шуму

$$\Pi\to\infty, \qquad \langle\alpha^2\rangle\to\infty, \qquad 2\langle\alpha^2\rangle/\Pi=D=\mathrm{const} \quad (6)$$

в уравнении для функции $\langle\psi_n\rangle$, получим

$$\langle\psi_n(x,\ t)\rangle=\frac{D}{2}\left\langle\left(g(x)\ \frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi_{n-1}(x,\ t)\right\rangle.$$

Используя последний результат при значении $n=1$, придем к первому диффузионному (марковскому) приближению для искомой функции $\langle\psi(x)\rangle$:

$$\frac{\partial\langle\psi\rangle}{\partial t}=\left\langle f\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\rangle+\frac{D}{2}\left\langle\left(g\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi\right\rangle. \quad (7)$$

Приведем также систему уравнений второго диффузионного приближения:

$$\frac{\partial\langle\psi\rangle}{\partial t}=\left\langle f\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\rangle+\langle\psi_1\rangle,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Pi\right)\langle\psi_1\rangle=\left\langle f\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right\rangle+\langle\alpha^2\rangle\left\langle\left(g\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi\right\rangle+\frac{D}{2}\left\langle\left(g\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi_1\right\rangle. \quad (8)$$

Опустив последний член во втором уравнении (8), получим второе приближение для функции $\langle\psi(x)\rangle$, широко известное в случае линейной стохастической системы как приближение Бурре.

Обратим внимание на следующее обстоятельство: условием получения второго приближения является пренебрежение совместным кумулянтом $\langle\psi_2\rangle = \left\langle \alpha, \alpha, \left(g\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi\right\rangle$, что соответствует следующему «нечестному» размыканию смешанного момента:

$$\langle \alpha^2(t) Z_t[\alpha] \rangle \approx \langle\alpha^2\rangle \langle Z_t[\alpha] \rangle, \qquad Z_t = \left(g\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi(x, t).$$

Однако известно, что последняя формула является точной для любого функционала $Z_t[\alpha]$, если случайная сила $\alpha(t)$ представляет собой телеграфный (дихотомический) процесс с пуассоновской статистикой перескоков [7, 8]. Этот процесс обладает той же корреляционной функцией $B_\alpha(\tau) = \langle\alpha^2\rangle \exp(-\Pi\,|\,\tau\,|\,)$, что и рассматриваемый гауссов. Таким образом, ограничение вторым приближением соответствует замене гауссова случайного воздействия на телеграфное с такой же корреляционной функцией. Проводя сопоставление с результатами работы [11], можно утверждать, что ограничение n-м приближением в указанном смысле адекватно замене $\alpha(t)$ на суперпозицию из $(n-1)$-го статистически независимого телеграфного процесса.

Положив в выражениях (4), (5) $\psi(x) = x^n$, получим систему зацепляющихся уравнений для отыскания момента $\langle x^n\rangle$. В случае аддитивного воздействия ($g(x) = 1$) эта цепочка имеет конечный порядок n. Отметим, однако, что при любой нелинейной функции $f(x)$ указанная система неразрешима без дополнительных предположений, поскольку в нее войдут высшие моменты выходной координаты. Для линейной задачи ($f(x) = -ax$) точное значение момента находится без труда. В случае линейного стохастического уравнения ($f(x) = -ax$, $g(x) = -x$) система (5) сводится к бесконечной цепочке относительно переменных

$$\langle x^n\rangle,\ \langle\alpha,\ x^n\rangle,\ \dots,\ \langle\alpha^{[s]},\ x^n\rangle,\ \dots,$$

решение которой представимо цепной дробью [6].

3. Поскольку для нелинейной задачи система (8), как и любая замкнутая система уравнений n-го или n-го диффузионного приближения, не позволяет найти моменты, обратимся к построению системы кинетических уравнений для получения одномерного вероятностного распределения выходной координаты $W(x;\ t)$. Положив в (4), (5) $\psi(x) = \delta[x - x(t)]$, после некоторых преобразований, приведенных в Приложении, можно получить

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(fW) = \frac{\partial}{\partial x}(gW_1),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + s\Pi\right) W_s + \frac{\partial}{\partial x}(fW_s) = \frac{\partial}{\partial x} g\,(W_{s+1} + s\,\langle\alpha^2\rangle\, W_{s-1}),$$

$$s = 1,\ 2, \dots$$

Здесь $W(x;\ t) \equiv W_0(x,\ t)$, а вспомогательные переменные $W_s(x,\ t)$ связаны с условными кумулянтами процесса $\alpha(t)$ (см. Приложение):

$$W_s(x,\ t) = (-1)^s\, W(x;\ t)\,\langle\alpha^{[s]},\rangle_x. \tag{10}$$

Они обладают нулевыми начальными условиями и «нулевым весом»

$$W_s(x, 0) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} W_s(x, t)\,dx = 0, \quad s = 1, 2, \ldots$$

Цепочка уравнений (9) замыкается на некотором шаге аналогично (5). Так, система уравнений n-го диффузионного приближения для плотности вероятности $W(x; t)$ получается предельным переходом к белому шуму в уравнении для функции $W_n(x, t)$, при этом

$$W_n(x, t) = \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial x} g(x) W_{n-1}(x, t).$$

Используя последнее соотношение при $n=1$ и подставив в первое уравнение (9), легко получить уравнение Фоккера — Планка. Соответствующую плотность вероятности ниже будем называть результатом диффузионного приближения и обозначать $W_d(x; t)$. Опустив во втором уравнении цепочки (9) переменную W_2, получим замкнутую систему уравнений второго приближения

$$\begin{gathered} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(fW) = \frac{\partial}{\partial x}(gW_1), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Pi\right) W_1 + \frac{\partial}{\partial x}(fW_1) = \langle\alpha^2\rangle \frac{\partial}{\partial x}(gW). \end{gathered} \tag{11}$$

Соответствующую ей плотность вероятности ниже будем обозначать $W_{(2)}$. Полагая, что существует стационарная плотность вероятности $W_{(2)}(x) = W_{(2)}(x; \infty)$, на основании (11) нетрудно получить

$$W_{(2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{C\,|g|}{\langle\alpha^2\rangle g^2 - f^2} \exp\left(\Pi \displaystyle\int \frac{f\,dx}{\langle\alpha^2\rangle g^2 - f^2}\right), & f^2(x) < \langle\alpha^2\rangle g^2(x) \\ 0 & , \; f^2(x) \geqslant \langle\alpha^2\rangle g^2(x) \end{cases} \tag{12}$$

Отсюда следует, что функция $W_{(2)}(x)$ является финитной. Подобный результат впервые получен в [8], где эта плотность вероятности являлась точным решением интегродифференциального кинетического уравнения, соответствующего телеграфному процессу $\alpha(t)$. Осуществив предельный переход (6) в выражении (12), получим хорошо известное стационарное решение уравнения Фоккера — Планка:

$$W_d(x) = \frac{C}{|g(x)|} \exp\left(\frac{2}{D} \int \frac{f(x)\,dx}{g^2(x)}\right). \tag{13}$$

4. Проанализируем более подробно некоторые частные случаи. Рассмотрим динамическую систему с аддитивной внешней силой ($g(x) = 1$). При этом уравнение (1) описывает движение частицы в потенциальной яме под действием случайной силы с конечным временем корреляции. Из системы второго приближения (11) следует такое уравнение для стационарной плотности вероятности:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\langle\alpha^2\rangle - f^2(x)\right) W_{(2)}(x)\right] = \Pi f(x) W_{(2)}(x). \tag{14}$$

Домножив (14) на x и проинтегрировав по частям, получим соотношение

$$\langle\alpha^2\rangle + \Pi \langle x f(x)\rangle = \langle f^2(x)\rangle, \tag{15}$$

где второй и третий члены усредняются с плотностью вероятности $W_{(2)}(x)$. Заметим, что если бы мы использовали стационарную форму точной цепочки уравнений (9), то в правой части (14) добавился бы член $\frac{dW_2(x)}{dx}$. Как следует из (9), стационарное значение вспомогательной переменной $W_2(x)$ имеет вид производной по x от некоторой совокупности функций и, следовательно, наличие указанного члена не повлияет на результат (15). Другими словами, соотношение (15), полученное нами на основании плотности вероятности второго приближения, является точным. В этом можно убедиться также непосредственно из исходных уравнений (1), (2) (см. Приложение).

В частном случае линейной системы ($f(x) = -ax$) из уравнения (15) находится точное значение дисперсии выходной координаты

$$\langle x^2 \rangle = \sigma^2 (1 + 2\nu)^{-1}, \tag{16}$$

где $\sigma^2 = \langle \alpha^2 \rangle a^{-2}$, $\nu = \Pi (2a)^{-1}$ — соответственно безразмерная дисперсия и ширина спектра случайной силы $\alpha(t)$. Стационарная плотность вероятности второго приближения здесь имеет вид

$$W_{(2)}(x) = \sigma^{1-2\nu} B^{-1}\left(\nu; \frac{1}{2}\right)(\sigma^2 - x^2)^{\nu-1}, \qquad x \leqslant \sigma, \tag{17}$$

где $B(\nu;\ 1/2)$ — бета-функция. Непосредственное интегрирование выражения (17), разумеется, также приводит к результату (16). Заметим, однако, что при отыскании высших моментов (которые в силу гауссовости вероятностного распределения $W(x)$ имеют вид $\langle x^{2n} \rangle = (2n-1)!! \langle x^2 \rangle^n$) выражение (17) приводит к неверным результатам. Зависимость формы распределения (17) от ширины спектра флуктуаций ν (при фиксированном значении параметра $\Delta^2 = \sigma^2/2\nu = 1$) показана на рис. 1. Отсюда видно, что при $\nu < 1$ функция $W_{(2)}(x)$ совершенно отлична от гауссовой кривой, хотя, как отмечалось выше, приводит к точному значению дисперсии. С увеличением ν функция $W_{(2)}(x)$, как

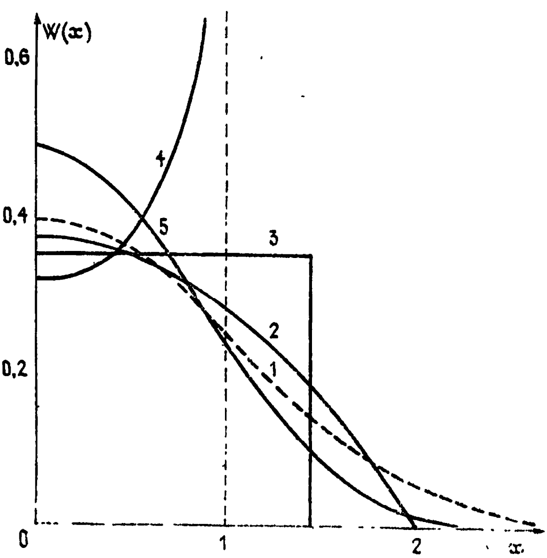

Рис. 1. Зависимость плотности вероятности (17) от относительной ширины спектра ν: кривая 1 — диффузионное приближение ($\nu = \infty$), кривая 2 — $\nu = 2$, кривая 3 — $\nu = 1$, кривая 4 — $\nu = 0{,}5$, кривая 5 — точное вероятностное распределение при $\nu = 1$.

и решение уравнения Фоккера — Планка, быстро «сходится» к точному результату.

Для системы с чисто кубичной нелинейностью ($f(x) = -ax^3$) соотношение (15) приводит к уравнению, связывающему четвертый и шестой моменты:

$$\langle x^6 \rangle + 2\nu \langle x^4 \rangle = \sigma^2. \tag{18}$$

В случае дельта-коррелированной силы ($\sigma^2 = 2\nu\Delta^2$, $\nu \to \infty$) отсюда находим четвертый момент $\langle x^4 \rangle_d = \Delta^2$, а в случае квазистатического воздействия ($\sigma^2 = \text{const}$, $\nu \to 0$) — точное значение шестого момента $\langle x^6 \rangle |_{\nu=0} = \sigma^2$. Плотность вероятности второго приближения здесь имеет вид

$$W_{(2)}(x) = \frac{C}{p^3 - x^6} \left[\frac{(p - x^2)}{p^2 + px^2 + x^4} \right]^{\nu/6p} \exp\left(\frac{\nu}{p\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{p + 2x^2}{p\sqrt{3}} \right), \quad |x| < \sqrt{p}, \qquad p = \sigma^{2/3}. \tag{19}$$

Отсюда видно, что существует некоторое критическое значение полосы флуктуаций $\nu^* = 3p$ (зависящее от интенсивности шума), такое, что при $\nu > \nu^*$ плотность вероятности (19) имеет вид, качественно подобный диффузионной плотности (13), где $g(x) = 1$, $f(x) = -ax^3$. При значениях $\nu < \nu^*$ эти кривые совершенно различны по форме, поскольку распределение (19) становится неограниченным на концах области существования $|x| = \sqrt{p}$. Трансформация формы вероятностного распределения (19) в зависимости от относительной ширины спектра ν показана на рис. 2. Отметим, что уже при $\nu = 5\nu^*$ $W_{(2)}(x)$ практически совпадает с $W_d(x)$.

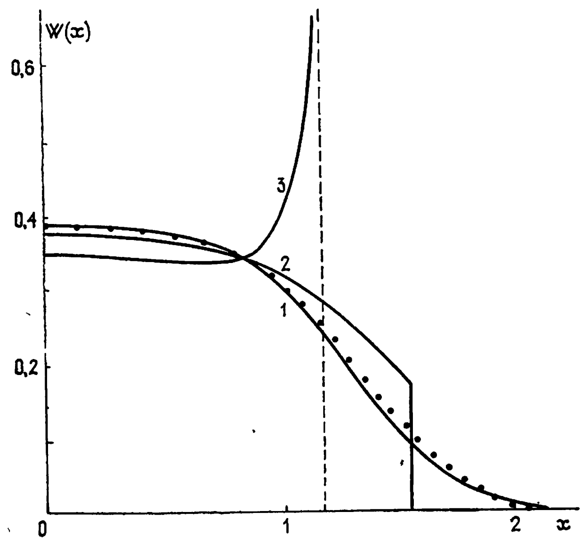

Рис. 2. Плотность вероятности второго приближения для системы с чисто кубичной нелинейностью при $\Delta = 1$: кривая 1 — диффузионное приближение ($\nu = \infty$), кривая $\cdots$ — $\nu = 5\nu^*$, кривая 2 — $\nu = \nu^*$, кривая 3 — $\nu = 0{,}2\nu^*$.

Для случая квазистатического воздействия ($\nu \to 0$) моменты второго приближения находятся аналитически. В частности,

$$\langle x^2 \rangle_{(2)} = p, \qquad \langle x^4 \rangle_{(2)} = p^2.$$

Соответствующие точные значения можно оплучить, усредняя квазистатическое решение исходного уравнения (1) по гауссову распределению α:

$$\langle x^2\rangle = 2^{1/3}\pi^{-1/2}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)p \approx 0{,}80\,p,$$

$$\langle x^4\rangle = 2^{2/3}\pi^{-1/2}\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)p^2 \approx 0{,}83\,p^2.$$

Приведем также результаты гауссова приближения, которые находим, полагая в уравнении (18) $\nu = 0$, а также $\langle x^{2n}\rangle = (2n-1)!!\,\langle x^2\rangle^n$:

$$\langle x^2\rangle_\Gamma \approx 0{,}40\,p, \qquad \langle x^4\rangle_\Gamma \approx 0{,}49\,p^2.$$

Данный пример показывает, что совпадение с точными значениями моментов, полученных интегрированием плотности вероятности второго приближения, удовлетворительное даже в случае предельно медленного воздействия (причем лучшее, чем дает гауссово приближение). Поскольку в другом предельном случае дельта-коррелированного воздействия второе приближение переходит в марковское и становится точным, есть основания полагать, что его можно с успехом использовать, по крайней мере, для отыскания нескольких первых моментов выходной координаты нелинейных стохастических систем.

При необходимости достигнуть большей точности следует использовать высшие приближения, причем в некоторых случаях «диффузионное» замыкание в уравнениях для переменных $\langle\psi_s\rangle$ (или W_s), $s = 2, 3, \ldots$ может приводить к лучшим результатам, чем простое отбрасывание переменных с бо́льшим номером [6, 10]. Системы уравнений (5), (9) задают сравнительно простой алгоритм построения высших приближений, который можно реализовать на ЭВМ.

5. Рассмотрим одну негауссову модель случайного воздействия $\alpha(t)$, допускающую подобное статистическое описание системы. Пусть $\alpha(t) = \xi^2(t)$, а $\xi(t)$ — гауссов шум, задаваемый вспомогательным стохастическим уравнением

$$\frac{d\xi}{dt} + \frac{\Pi}{2}\xi = \eta(t), \tag{2a}$$

где $\eta(t)$ — по-прежнему белый гауссов шум. После преобразований, подобных выполненным в п. 2, можно получить следующую зацепляющуюся систему кинетических уравнений*:

$$\frac{\partial\langle\psi\rangle}{\partial t} = \left\langle f\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\rangle + \langle\xi^2\rangle\left\langle g\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\rangle + \langle\psi_2\rangle,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + s\Pi\right)\langle\psi_{2s}\rangle = \left\langle f\frac{\partial\psi_{2s}}{\partial x}\right\rangle + (4s+1)\langle\xi^2\rangle\left\langle g\frac{\partial\psi_{2s}}{\partial x}\right\rangle + \tag{20}$$

$$+ 2s(2s-1)\langle\xi^2\rangle^2\left\langle\left(g\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi_{2s-2}\right\rangle + \langle\psi_{2s+2}\rangle, \qquad s = 1, 2, \ldots$$

---

* Для стохастической линейной системы вывод подобных кинетических уравнений приведен в работе [10].

Здесь введены вспомогательные переменные

$$\langle \psi_{2s}(x, t)\rangle = \left\langle \xi^{[2s]}(t), \left(g(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)^s \psi(x)\right\rangle,$$

обладающие, как и использованные выше, нулевыми начальными условиями. Для случая линейной стохастической системы уравнения (20) позволяют найти точное решение для моментов выходной координаты в форме цепной дроби [10], как и при гауссовом воздействии. Для анализа нелинейной системы следует перейти от (20) к соответствующей цепочке уравнений для плотности вероятности. Выполнив преобразования, аналогичные приведенным в Приложении, получим следующую систему кинетических уравнений:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f + \langle \xi^2\rangle g) W = \frac{\partial}{\partial x} g W_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{21}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + s\Pi\right) W_{2s} + \frac{\partial}{\partial x}(f + (4s+1)\langle \xi^2\rangle g) W_{2s} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} g(W_{2s+2} + 2s(2s-1)\langle \xi^2\rangle^2 W_{2s-2}), \quad s = 1, 2, \ldots,$$

где переменные $W_{2s}(x, t)$ по-прежнему определяются выражениями (10) при четных значениях номера s в (10). В случае, когда в исходное динамическое уравнение входит не квадрат гауссова процесса $\alpha = \xi^2(t)$, а лишь флуктуации этой величины $\tilde{\alpha} = \xi^2 - \langle \xi^2\rangle$, в системе (21) следует положить равными нулю члены, содержащие дисперсию $\langle \xi^2\rangle$ в первой степени. При этом в любом, начиная со второго, уравнении (21) можно формально перейти к «белому» шуму $\tilde{\alpha}(t)$ предельным переходом

$$\Pi \to \infty, \qquad 2\langle \tilde{\alpha}^2\rangle/\Pi = 4\langle \xi^2\rangle^2/\Pi = D = \mathrm{const}$$

и строить высшие диффузионные приближения для плотности вероятности $W(x; t)$. Если же в исходное уравнение входит сама величина $\xi^2(t)$ (как это имеет место в ряде приложений, например, при анализе систем автокомпенсации помех с корреляционной обратной связью [12]), то такой предельный переход не имеет физического смысла. В этом случае для получения n-го приближения для плотности вероятности следует опустить функцию W_{2n} в уравнении для W_{2n-2} (в полном соответствии с построением высших приближений в случае гауссова воздействия $\alpha(t)$). Отметим, однако, что такое обрывание цепочек (20), (21) не соответствует замене реального гауссова воздействия $\xi(t)$ (как и замене величины $\xi^2(t)$) на суперпозицию телеграфных процессов, как было для гауссова процесса $\alpha(t)$.

Как и в случае гауссова воздействия $\alpha(t)$, из уравнений (21) удается найти стационарную плотность вероятности второго приближения $W_{(2)}(x)$ (если она существует). Полагая в (21) $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ и ограничившись рассмотрением первых двух уравнений, можно прийти к выражению

$$W_{(2)}(x) = \frac{C|g(x)|}{h(x)} \exp\left(\Pi \int \frac{f(x) + \langle \xi^2\rangle g(x)}{h(x)}\, dx\right), \tag{22}$$

$$h(x) = f^2(x) + 6\langle \xi^2 \rangle f(x) g(x) + 3\langle \xi^2 \rangle^2 g^2(x),$$

несколько напоминающему (12)*.

Рассмотрим в качестве примера стохастическое уравнение

$$\frac{dx}{dt} + bx + \xi^2(t)\, x = a\xi^2(t), \tag{23}$$

описывающее при определенных условиях релаксацию управляющего напряжения (x) в системе автокомпенсации помех с корреляционной обратной связью [12]. Гауссов шум $\xi(t)$ (огибающая помехи) задается вспомогательным уравнением (2а). На основании (22) можно найти стационарную плотность вероятности флуктуаций управляющего напряжения, однако мы рассмотрим лишь второй момент $\langle x^2 \rangle = \langle x^2(t) \rangle|_{t\to\infty}$. Положив в (20) $\psi(x) = x^2$ и ограничившись системой второго приближения, нетрудно прийти к следующим уравнениям для стационарного значения $\langle x^2 \rangle$:

$$\begin{gathered}(1+\beta)\langle x^2 \rangle + \beta\varkappa_2 = a\beta(\langle x \rangle + \varkappa_1),\\ 4\beta\langle x^2 \rangle + 2(1+\nu+5\beta)\varkappa_2 = 2a\beta(3\langle x \rangle - a) + a(1+2\nu+15\beta)\varkappa_1,\end{gathered} \tag{24}$$

где $\varkappa_1 = \langle \xi, \xi, x \rangle \langle \xi^2 \rangle^{-1}$, $\varkappa_2 = \langle \xi, \xi, x^2 \rangle \langle \xi^2 \rangle^{-1}$ — вспомогательные переменные, представляющие собой совместные кумулянты; $\beta = \langle \xi^2 \rangle b^{-1}$, $\nu = \Pi(2b)^{-1}$ — безразмерные параметры, характеризующие мощность и ширину спектра шума $\xi(t)$. Значения $\langle x \rangle$ и $\varkappa_1$ легко находятся предварительно из подобной системы уравнений (для этого в (20) надо положить $\psi(x) = x$):

$$\langle x \rangle = \frac{a\beta}{1+\beta+2\beta(1+3\beta+2\nu)^{-1}}, \qquad \varkappa_1 = a + \frac{1+\beta}{\beta}\langle x \rangle. \tag{25}$$

Отыскание точного значения $\langle x^2 \rangle$ при произвольных ν и β весьма затруднительно [13]; однако из уравнения (23) находится квазистатическая плотность вероятности

Рис. 3.

* Плотность вероятности второго приближения (22), как и соответствующая плотность при гауссовом воздействии, является финитной: в области $h(x) \leqslant 0$ $W_{(2)}(x) = 0$.

$$W(x)|_{\nu=0} = (2\pi\beta x)^{-1/2}(a-x)^{-3/2}\exp\left(-\frac{x}{2\beta(a-x)}\right), \tag{26}$$

$$0 < x < a,$$

которая позволяет получить $\langle x^2 \rangle$ непосредственным интегрированием.

На рис. 3 показана зависимость квазистатических значений второго момента $\langle x^2 \rangle|_{\nu=0}$ от мощности помехи β. Кривая *1* — точное решение, найденное численным интегрированием плотности вероятности (26). Кривая *2* — результат второго приближения, полученный из (24), (25) при $\nu = 0$. Кривая *3* соответствует «первому приближению», т. е. прямому размыканию смешанных моментов $\langle x^k \xi^2 \rangle \approx \langle x^k \rangle \langle \xi^2 \rangle$, $k=1, 2$. Таким образом, даже при квазистатическом воздействии второе приближение практически совпадает с точным результатом в области не слишком сильной помехи $\beta \lesssim 1$.

6. Изложенный выше подход полностью применим к статистическому описанию многомерных динамических систем с одной случайной силой

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(\boldsymbol{x}) + \alpha(t)\, g_k(\boldsymbol{x}), \qquad k = \overline{1, N}, \tag{27}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ — N-мерный вектор состояния системы, а процесс $\alpha(t)$ задается вспомогательным стохастическим уравнением (2). Цепочка кинетических уравнений для среднего значения произвольной функции $\psi(\boldsymbol{x})$ теперь имеет вид

$$\frac{\partial \langle \psi \rangle}{\partial t} = \left\langle f \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{x}} \right\rangle + \sum_k \langle \psi_k \rangle,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + s\Pi\right) \langle \psi_{\underbrace{k \ldots mn}_{s}} \rangle = \left\langle f \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \psi_{k \ldots mn} \right\rangle + \tag{28}$$

$$+ s \langle \alpha^2 \rangle \left\langle \left(g \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^2 \psi_{\underbrace{k \ldots m}_{s-1}} \right\rangle + \sum_r \langle \psi_{\underbrace{k \ldots nr}_{s+1}} \rangle, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

где для краткости обозначено

$$f \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \equiv f_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \left(g \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^2 = g_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}\, g_j(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

По повторяющимся индексам выполняется суммирование от единицы до N. Используемые здесь вспомогательные функции определяются кумулянтными скобками вида

$$\psi_{\underbrace{k \ldots mn}_{s}}(\boldsymbol{x}, t) = \left\langle \alpha^{[s]}(t),\ g_k(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} \ldots g_n(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x_n} \psi(\boldsymbol{x}) \right\rangle, \quad s = 1, 2, \ldots$$

Соответствующая (9) система уравнений для отыскания N-мерной одноточечной плотности вероятности $W(\boldsymbol{x}; t)$ представляет собой

$$\frac{\partial W(\boldsymbol{x}; t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} f_k(\boldsymbol{x}) W(\boldsymbol{x}; t) = \frac{\partial}{\partial x_k} g_k(\boldsymbol{x}) W_1(\boldsymbol{x}, t),$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + s\Pi\right) W_s(\boldsymbol{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_k} f_k(\boldsymbol{x}) W_s(\boldsymbol{x}, t) = \tag{29}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k} g_k(\boldsymbol{x}) \left(W_{s+1}(\boldsymbol{x}, t) + s \langle \alpha^2 \rangle W_{s-1}(\boldsymbol{x}, t)\right),$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

где функции $W_s(\boldsymbol{x}, t)$ обладают нулевыми начальными условиями и определяются выражением (10) с точностью до замены $x \to \boldsymbol{x}$. Замыкание систем кинетических уравнений (28) и (29) осуществляется, как и в рассмотренном выше одномерном случае. В частности, выполнив предельный переход к белому шуму $\alpha(t)$ в уравнении для функции $W_1(\boldsymbol{x}, t)$, получим выражение последней через искомую плотность вероятности:

$$W_1(\boldsymbol{x}, t) = \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial x_n} g_n(\boldsymbol{x}) W_d(\boldsymbol{x}; t). \tag{30}$$

Подставив (30) в первое уравнение (29), придем к N-мерному уравнению Фоккера — Планка:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} f_k(\boldsymbol{x})\right) W_d(\boldsymbol{x}; t) = \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} g_k(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial x_n} g_n(\boldsymbol{x}) W_d(\boldsymbol{x}; t).$$

Если случайная сила, входящая в (27), представляет собой квадрат гауссова процесса $\xi(t)$, то обобщение соответствующих результатов п. 5 также не вызывает затруднений. Заметим, однако, что найти в общем случае аналитическое решение для плотности вероятности второго приближения, подобное (12) или (22), для многомерной задачи не удается.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Выбрав в выражениях (4) и (5) в качестве $\psi(x)$ дельта-функцию

$$\psi(x) = \delta(x' - x) \equiv \psi(x)_\delta, \qquad x = x(t),$$

преобразуем статистическое среднее (4). Введем в рассмотрение так называемые неполные (круглые) кумулянтные скобки [9]. По определению, скобкой $(x, y, \dots, z)_c$ называется некоторая функция случайных переменных и их статистических средних, которая после усреднения превращается в кумулянтную скобку, например,

$$(x, y)_c = xy - \langle x \rangle y,$$

$$\langle (x, y)_c \rangle = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle \equiv \langle x, y \rangle.$$

Используя эти обозначения, запишем статистическое среднее $\langle \psi_s(x)_\delta \rangle$ в виде

$$\langle \psi_s(x, t)_\delta \rangle = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} W_{\alpha x}(\alpha', x'; t) \left(\alpha'^{[s]}(t), \left(g \frac{\partial}{\partial x'}\right)^s \delta(x' - x)\right)_c d\alpha' dx',$$

где $W_{\alpha x}(\alpha', x'; t)$ — совместная плотность вероятности процессов $\alpha(t)$ и $x(t)$. Интегрируя по частям по переменной x', имеем

$$\langle \psi_s(x,\ t)_\delta \rangle = (-1)^s \left(\frac{\partial}{\partial x} g \right)^s \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha'^{[s]},\ )_c W_{\alpha x}(\alpha',\ x;\ t)\, d\alpha'.$$

Поскольку двумерная плотность вероятности связана с условной ($\widetilde{W}$) и одномерной соотношением

$$W_{\alpha x}(\alpha,\ x;\ t) = \widetilde{W}(\alpha/x;\ t)\, W(x;\ t),$$

окончательно получим

$$\langle \psi_s(x,\ t)_\delta \rangle = (-1)^s \left(\frac{\partial}{\partial x} g(x) \right)^s W_s(x,\ t), \tag{П.1}$$

где

$$W_s(x,\ t) = W(x;\ t) \langle \alpha^{[s]}(t),\ \rangle_x,$$

$$\langle \alpha^{[s]}(t),\ \rangle_x = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha'^{[s]},\ )_c W(\alpha'/x;\ t)\, d\alpha'. \tag{П.2}$$

Таким образом, вспомогательные переменные $W_s(x,\ t)$ представляют собой произведения одномерной плотности вероятности на условные кумулянты процесса $\alpha(t)$ (усреднение неполной кумулянтной скобки в (П.2) выполняется с условной плотностью вероятности).

Аналогичным образом нетрудно установить справедливость соотношений

$$\left\langle f(x) \frac{\partial \psi_s(x,\ t)_\delta}{\partial x} \right\rangle = -\left(\frac{\partial}{\partial x} g(x) \right)^s \frac{\partial}{\partial x} f(x) W_s(x,\ t),$$

$$\left\langle \left(g(x) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi_{s-1}(x,\ t)_\delta \right\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial x} g(x) \right)^{s+1} W_{s-1}(x,\ t). \tag{П.3}$$

Подставив полученные результаты в систему (5) и «сократив» на оператор $\left(\frac{\partial}{\partial x} g \right)^s$, придем к уравнению (9).

2. Рассмотрим исходную систему (1) с аддитивным воздействием, положив $g(x) = 1$. Домножим (1) на x^s и усредним. Если функция $f(x)$ такова, что существует стационарное вероятностное распределение, то, устремив $t \to \infty$, получим

$$\langle x^s f(x) \rangle = -\langle \alpha x^s \rangle, \qquad s = 0,\ 1, \ldots \tag{П.4}$$

Из формул (1), (2) следует также, что при $t \to \infty$

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \alpha x \rangle = \langle \alpha f(x) \rangle + \langle \alpha^2 \rangle - \Pi \langle \alpha x \rangle. \tag{П.5}$$

Представим функцию $f(x)$ в виде степенного ряда $f(x) = a_k x^k$ (по повторяющимся индексам выполняется суммирование). Тогда на основании (П.4)

$$-\langle \alpha x^s \rangle = \langle x^s f(x) \rangle = a_k \langle x^{s+k} \rangle.$$

Домножим последнее уравнение на a_s и суммируем по индексу s:

$$-a_s \langle \alpha x^s \rangle = a_k a_s \langle x^{k+s} \rangle,$$

или

$$-\langle \alpha f(x) \rangle = \langle f^2(x) \rangle. \tag{П.6}$$

На основании (П.4) — (П.6) получим окончательно

$$\langle \alpha^2 \rangle + \Pi \langle x f(x) \rangle = \langle f^2(x) \rangle .$$

Таким образом, соотношение (15) является точным следствием уравнений (1) и (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.
2. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975.
3. Van Kampen N. G. — Phys. Rep., 1974, 24, № 3, p. 171.
4. Brissaud A., Frish V.—J. Math. Phys., 1974, **15**, № 5, p. 524.
5. Кузовлев Ю. Е., Бочков Г. Н. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 10, с. 1505.
6. Малахов А. Н., Музычук О. В., Позументов И. Е. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 9, с. 1279.
7. Bourret R., Frish V., Pouquet A. — Physica, 1973, **65**, p. 303.
8. Кляцкин В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 4, с. 562.
9. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
10. Музычук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 10, с. 1246.
11. Кляцкин В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 6, с. 716.
12. Мальцев А. А., Музычук О. В., Позументов И. Е. — Радиотехника и электроника, 1978, **23**, № 7, с. 1401.
13. Мальцев А. А., Саичев А. И. — Радиотехника и электроника, 1978, **23**, № 12, с. 2543.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 4 апреля 1979 г.

PROBABLE CHARACTERISTICS OF DYNAMIC SYSTEMS AFFECTED BY NONDELTA-CORRELATED FORCES

A. N. Malakhov, O. V. Muzychuk

A method is developed for the analysis of dynamic systems of a general form affected by intensive random actions with an arbitrary scale of correlation. Chains of kinetic equations are built for the search of one-point probable characteristics. Breaking of these chains at a certain step corresponds the neglect of statistical relations of higher orders between random action and a certain its functional. The process of obtaining closed kinetic equations corresponds to another approach based on the substituting Gaussian random force by superposition of statistically independent telegraph processes. The possibility of utilizing the second approximation for the search of propable characteristics of nonlinear systems and systems with fluctuating parameters is investigated by several examples.