ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 8 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 538.56

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В НЕРАВНОВЕСНЫХ РАДИОФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Р. Л. Стратонович

Для неравновесных систем введена квазисвободная энергия, являющаяся обобщением обычной свободной энергии и помогающая анализировать фазовые переходы и критические состояния. Для случая, когда фазовый переход обусловлен линейными членами, произведено уменьшение числа аргументов квазисвободной энергии. Оно позволяет сконцентрировать внимание на тех переменных, которые непосредственно связаны с фазовым переходом. Теория проиллюстрирована на примере возбуждения лазерного излучения в двухуровневой среде.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье развивается методика анализа фазовых переходов в неконсервативных системах, в которых имеется приток энергии извне. Изменение интенсивности притока энергии часто приводит к фазовому переходу. Примерами такой ситуации являются возбуждение колебаний генератора или стационарного лазерного излучения в активной среде, появление конвекции в среде с градиентом температуры (ячейки Бенарда) и т. п.

Наше рассмотрение относится к тому случаю, когда фазовый переход связан с поведением линейных членов в исходных уравнениях. Термин «фазовый переход» применяется здесь по аналогии с хорошо известными фазовыми переходами в термодинамически равновесных системах. В роли температуры в неравновесных случаях обычно выступает параметр, характеризующий интенсивность притока энергии (взятый с обратным знаком). В данной статье будет введен неравновесный аналог свободной энергии, который мы будем называть квазисвободной энергией. Далее по аналогии с равновесным случаем (см., например, [1]) можно рассматривать критические индексы, характеризующие те или иные физические свойства вблизи фазового перехода. Аналогия между неравновесным фазовым переходом и равновесным обсуждалась в работах [2; 3], где были найдены также значения некоторых неравновесных критических индексов. Как показало исследование, классические значения индексов с бо́льшим основанием применимы к неравновесным фазовым переходам, чем к равновесным. Исходными для развиваемой теории являются общие уравнения вида

$$\dot{x}_\alpha = - f_\alpha (x, \Theta), \tag{1.1}$$

где $x = \{x_\alpha\}$ — вектор, описывающий состояние системы, Θ — параметр, изменение которого приводит к фазовому переходу. Применяемые методы нечувствительны к тому, чему равно число переменных x_α, конечно ли оно или бесконечно. Для простоты, однако, будем полагать $\alpha = 1, \dots, r$.

Вместо x можно рассматривать вектор y, полученный невырожденным преобразованием $y(x)$. При таком преобразовании уравнение (1.1) сохраняет свой вид. Кроме того, допустимы и некоторые вырожденные преобразования (скажем, дискретизация континуума, замена всех пространственных гармоник некоторым числом низших гармоник и т. п.), что сопровождается, конечно, некоторой потерей точности. В тех случаях, когда в системе возможен колебательный режим, может оказаться полезной замена x вектором y, который определяется равенством

$$x(t) = \varphi(y(t), t), \tag{1.2}$$

где $\varphi(y, t)$ — заданная периодическая функция от t. В этом случае для y из (1.1) выводится уравнение

$$\dot{y}_\alpha = -g_\alpha(y, \Theta, t). \tag{1.3}$$

Чтобы привести его к виду (1.1) для y, следует усреднить правую часть (1.3) за период. Итак, мы имеем различные варианты уравнений типа (1.1) и выбираем из них наиболее удобный.

2. ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть неравновесный процесс описывается системой уравнений (1.1), причем функции $f_\alpha(x, \Theta)$ предполагаются дифференцируемыми достаточное число раз. Зафиксировав значение Θ, назовем точку x^0 стационарной, если $f_\alpha(x^0, \Theta) = 0$, $\alpha = 1, \ldots, r$. Обозначим $x_\alpha - x_\alpha^0 = z_\alpha$ и разложим правую часть (1.1) в ряд Тейлора в стационарной точке. Отбрасывая члены четвертого порядка по z и выше, получаем

$$\dot{z}_\alpha = -a_{\alpha\beta}(\Theta) z_\beta - \frac{1}{2} b_{\alpha\beta\gamma}(\Theta) z_\beta z_\gamma - \frac{1}{6} c_{\alpha\beta\gamma\delta}(\Theta) z_\beta z_\gamma z_\delta, \tag{2.1}$$

где

$$a_{\alpha\beta}(\Theta) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\beta}(x^0, \Theta) \quad \text{и т. п.}$$

Стационарная точка x^0 является устойчивой, если все собственные значения α_ν $(\nu = 1, \ldots, r)$ матрицы $a_{\alpha\beta}$ имеют положительные действительные части. Она является неустойчивой, если среди α_ν имеется хотя бы одно собственное значение с отрицательной действительной частью.

Если менять Θ, то устойчивая точка или множество таких точек будет, как правило, непрерывно меняться в силу непрерывности функций f_α. Однако в порядке исключения возможны и аномальные изменения: устойчивая точка может пропасть, появиться, превратиться в какое-либо множество устойчивых точек и т. п. Назовем те значения, при которых происходят подобные аномальные изменения, критическими. Если система находится в состоянии, описываемом устойчивой точкой, с которой при $\Theta = \Theta_c$ происходят описанные аномальные изменения, то будем говорить, что в системе при $\Theta = \Theta_c$ происходит фазовый переход.

Рассмотрим частный случай аномального изменения устойчивой точки. Пусть все $\mathrm{Re}\,\alpha_\nu(\Theta)$ положительны при $\Theta < \Theta_c$. Часть $\mathrm{Re}\,\alpha_\nu(\Theta)$ пусть меняет знак при $\Theta = \Theta_c$, а именно:

$$\mathrm{Re}\,\alpha_\nu(\Theta) < 0, \quad \nu = 1, \ldots, l \leqslant r, \quad \mathrm{Re}\,\alpha_\nu(\Theta) > 0, \quad \nu = l+1, \ldots, r, \tag{2.2}$$

если $\Theta > \Theta_c$. Этот случай соответствует исчезновению устойчивой точки при увеличении Θ и прохождении через критическое значение Θ_c. Случай, соответствующий обратному изменению, можно привести к (2.2) заменой знака у Θ.

3. КВАЗИСВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ

Для удобства исследования критических точек и фазовых переходов введем квазисвободную энергию, которая является обобщением на неравновесный случай обычной свободной энергии. Свободная энергия F как функция внутренних термодинамических параметров $\boldsymbol{B}$, как известно (формула (116.7) из [1]), определяет равновесное распределение этих параметров:

$$p(\boldsymbol{B})=\text{const}\exp\left(-\frac{F(\boldsymbol{B})}{kT}\right). \tag{3.1}$$

Вводя в (1.1) малые аддитивные случайные воздействия, которые будем считать гауссовыми дельта-коррелированными и имеющими нулевое среднее значение, получим

$$\dot{x}_\alpha=-f_\alpha(\boldsymbol{x},\ \Theta)+\xi_\alpha,\qquad \alpha=1,\ \ldots,\ r, \tag{3.2}$$

причем

$$\langle\xi_\alpha(t_1)\,\xi_\beta(t_2)\rangle=2\mu N_{\alpha\beta}\,\delta(t_{12}). \tag{3.3}$$

Здесь $N_{\alpha\beta}$ — положительно определенная матрица, μ — малый параметр, указывающий малость случайных воздействий. Эти случайные воздействия могут или реально существовать в системе, или вводиться специально как вспомогательные. В последнем случае для простоты можно полагать $N_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$.

Поскольку процесс $\boldsymbol{x}(t)$, описываемый уравнением (3.2), в силу (3.3) является марковским, соответствующая ему плотность вероятностей удовлетворяет уравнению Фоккера—Планка:

$$\dot{p}(\boldsymbol{x},\ t)=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}[f_\alpha(\boldsymbol{x},\ \Theta)\,p]+\mu N_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 p}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}.$$

Отсюда следует, что стационарная плотность вероятностей, если она существует, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}[f_\alpha(\boldsymbol{x},\ \Theta)\,p_0]+\mu N_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 p_0}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}=0. \tag{3.4}$$

По аналогии с (3.1) введем квазисвободную энергию $F(\boldsymbol{x})$, определяемую формулой

$$p_0(\boldsymbol{x})=\text{const}\exp(-F(\boldsymbol{x})/\mu). \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в (3.4) и используя малость μ, получаем уравнение

$$f_\alpha\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}=N_{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}\,\frac{\partial F}{\partial x_\beta}, \tag{3.6}$$

из которого находится $F(\boldsymbol{x})$. В потенциальном случае [4], когда

$$\frac{\partial}{\partial x_\gamma}[N_{\beta\alpha}^{-1}f_\alpha]=\frac{\partial}{\partial x_\beta}[N_{\beta\alpha}^{-1}f_\alpha],$$

легко записать явное решение уравнения (3.6). В этом случае справедливы более сильные, чем (3.6), равенства $f_\alpha=N_{\alpha\beta}\,\partial F/\partial x_\beta$, которые дают

$$F(\boldsymbol{x})=\int^{\boldsymbol{x}} dx_\beta\,N_{\beta\alpha}^{-1}f_\alpha+\text{const}. \tag{3.7}$$

В общем случае, когда условие потенциальности не выполнено, решить уравнение (3.6) труднее. Будем искать решение в форме

$$F(x) = F(x^0)_r + k_\alpha z_\alpha + \frac{1}{2} l_{\alpha\beta} z_\alpha z_\beta + \frac{1}{6} m_{\alpha\beta\gamma} z_\alpha z_\beta z_\gamma + \\ + \frac{1}{24} n_{\alpha\beta\gamma\delta} z_\alpha \ldots z_\delta , \tag{3.8}$$

соответствующей разложению в (2.1). Подставляя (3.8) в (3.6) при учете разложения функций $f_\alpha(x)$, указанного в (2.1), и приравнивая члены различных порядков по z порознь, получаем уравнения, служащие для последовательного отыскания k_α, $l_{\alpha\beta}$, $m_{\alpha\beta\gamma}$, $n_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Значения k_α оказываются равными нулю. Для определения симметрической матрицы $l_{\alpha\beta}$ получаем уравнения

$$l_{\gamma\alpha} a_{\alpha\delta} + l_{\delta\alpha} a_{\alpha\gamma} = 2 l_{\gamma\alpha} N_{\alpha\beta} l_{\beta\delta} . \tag{3.9}$$

При записи следующих уравнений, служащих для отыскания $l_{\alpha\beta\gamma}$ и $n_{\alpha\beta\gamma\delta}$, для краткости будем использовать скобки $\{\ldots\}_s$, обозначающие симметризацию стоящего в скобках выражения по свободным индексам (т. е. по которым не производится суммирования). Из (3.6) получаем линейные системы уравнений

$$\{a'_{\gamma\alpha} m_{\alpha\delta\varepsilon}\}_s = \{l_{\gamma\alpha} b_{\alpha\delta\varepsilon}\}_s; \tag{3.10}$$

$$\{a'_{\gamma\alpha} n_{\alpha\delta\varepsilon\zeta}\}_s = \{l_{\gamma\alpha} c_{\alpha\delta\varepsilon\zeta}\}_s + \frac{3}{2} \{m_{\gamma\delta\alpha} b'_{\alpha\varepsilon\zeta}\}_s , \tag{3.11}$$

где обозначено

$$a'_{\gamma\alpha} = 2N_{\gamma\beta} l_{\beta\alpha} - a_{\gamma\alpha}, \qquad b'_{\alpha\varepsilon\zeta} = b_{\alpha\varepsilon\zeta} - N_{\alpha\beta} m_{\beta\varepsilon\zeta} . \tag{3.12}$$

Нужно отметить, что (3.9) также можно привести к форме линейной системы уравнений. Для этого перейдем к обратной матрице $k_{\alpha\beta} = l^{-1}_{\alpha\beta}$. Для нее имеем

$$a_{\alpha\delta} k_{\delta\beta} + a_{\beta\delta} k_{\delta\alpha} = 2N_{\alpha\beta} . \tag{3.13}$$

Итак, задача отыскания функции (3.8) сведена к решению систем линейных уравнений. В потенциальном случае (3.7) приведенные равенства при $N_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ дают $l_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$; $a'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$; $m_{\alpha\delta\varepsilon} = b_{\alpha\delta\varepsilon}$; $n = c$, $b' = 0$.

Отметим, что из дифференцируемости функций f_α вытекает дифференцируемость квазисвободной энергии $F(x, \Theta)$.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ И КВАЗИСВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ

Можно ожидать, что устойчивость стационарной точки, определяемая по матрице $a_{\alpha\beta}$, которая в общем случае несимметрична, совпадает с устойчивостью, определяемой по симметричной матрице $l_{\alpha\beta}$. Дело в том, что, как можно ожидать, имеет место подобие закона инерции (об обычном законе инерции см., например, в [5]): среди чисел $\mathrm{Re}\,\alpha_1, \ldots, \mathrm{Re}\,\alpha_r$ столько же положительных, отрицательных и нулей, сколько среди $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Здесь α_ν — собственные значения матрицы $a_{\alpha\beta}$, а λ_ν — собственные значения $l_{\alpha\beta}$.

Поскольку нелинейное уравнение (3.10) мало изучено, возьмем уравнение (3.13), при выводе которого предположено, что матрица $l_{\alpha\beta}$ невырождена. Полагая

$$D = N^{-1/2} A N^{1/2}, \quad H = \frac{1}{2} N^{-1/2} K N^{-1/2}$$
$$(A = \| a_{\alpha\beta} \| \quad \text{и т. д.}), \tag{4.1}$$

из (3.13) получаем

$$DH + HD^T = I \quad (I = \| \delta_{\alpha\beta} \|). \tag{4.2}$$

Уравнения такого вида играют большую роль в теории устойчивых матриц [6]. По теореме Таусски [6] среди $\eta_1, \ldots, \eta_r$ столько же положительных и отрицательных чисел, сколько и среди $\mathrm{Re}\,\delta_1, \ldots, \mathrm{Re}\,\delta_r$ (η_ν, δ_ν — собственные значения матриц H, D соответственно), если выполнено условие

$$\delta_\nu + \delta^*_\mu \neq 0, \qquad \nu, \mu = 1, \ldots, r. \tag{4.3}$$

Вследствие (4.1) собственные значения δ_ν совпадают с собственными значениями α_ν матрицы A, а по закону инерции [5] имеется столько же положительных и отрицательных значений η_ν, сколько и λ_ν. Если система устойчива по $a_{\alpha\beta}$, то условие (4.3) выполнено, и мы получаем, что все η_ν, а следовательно, и все λ_ν положительны. Поэтому система устойчива и по $l_{\alpha\beta}$.

Пусть теперь часть значений $\mathrm{Re}\,\alpha_\nu$ ($\nu \leqslant l$) при увеличении Θ непрерывным образом изменила знак (см. (2.2)), причем $\mathrm{Re}\,\alpha_\nu(\Theta_c) > 0$, $\nu > l$. Очевидно, что тогда неравенства (4.3) выполняются при $\Theta > \Theta_c$, $\nu > l$, $\mu > l$, а также при $\nu \leqslant l$, $\mu \leqslant l$. Нетрудно понять также, что (4.3) выполняются также и при $\nu \leqslant l$, $\mu > l$, если $\Theta - \Theta_c$ достаточно мало. Применяя теорему Таусски, видим, что при превышении критической точки Θ_c матрицы H, K, L теряют положительную определенность одновременно с тем, как A теряет устойчивость. Итак, для исследования устойчивости системы вблизи критической точки можно исследовать положительную определенность матрицы $l_{\alpha\beta} = \partial^2 F / \partial x_\alpha \partial x^\beta$, т. е. вогнутость квазисвободной энергии в точке $x = x^0$.

Если матрица $a_{\alpha\beta}$ вырождена, то уравнениями (3.13), (4.2) пользоваться нельзя, однако уравнение (3.9) сохраняет свое значение. Можно ожидать, что при этом матрица $l_{\alpha\beta}$ также оказывается вырожденной. Этот факт вытекает из непрерывности изменения $F(x, \Theta)$, а следовательно, и $l_{\alpha\beta}$ и λ_ν при изменении Θ.

В том случае, когда $x^0_\alpha(\Theta)$ имеют конечную (т. е. не бесконечную) производную по Θ, из дифференцируемости $f_\alpha(x, \Theta)$, вытекает, как правило, дифференцируемость $\mathrm{Re}\,\alpha_\nu(\Theta)$ по Θ. В соответствии с (2.2) в этом случае имеем

$$\mathrm{Re}\,\alpha_\nu(\Theta) = p_\nu(\Theta_c - \Theta), \qquad \nu \leqslant l, \tag{4.4}$$

где $p_\nu > 0$ — постоянные. Аналогичным образом из дифференцируемости $F(x, \Theta)$, а также из приведенных выше рассуждений относительно знаков собственных значений $\lambda_\nu(\Theta)$ следует, что

$$\lambda_\nu(\Theta) = q_\nu(\Theta_c - \Theta), \qquad \nu \leqslant l, \tag{4.5}$$

где $q_\nu > 0$. Прочие собственные значения в критической точке знака не меняют и $\lambda_\nu(\Theta_c) > 0$, $\nu > l$.

5. УМЕНЬШЕНИЕ ЧИСЛА АРГУМЕНТОВ КВАЗИСВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ

Чтобы облегчить анализ фазовых переходов и критических явлений, целесообразно сконцентрировать внимание на той части переменных, которые непосредственно связаны с фазовым переходом, отбросив остальные. Из (2.2), (4.5) видно, что число переменных, по которым фактически происходит фазовый переход, равно не r, а l, причем $r \leqslant l$ и зачастую $r < l$.

Произведем сначала ортогональное линейное преобразование переменных $z'_\alpha = u_{\alpha\beta} z_\beta$, диагонализирующее матрицу $l_{\alpha\beta}$. При невырожденных линейных преобразованиях квазисвободная энергия преобразуется как скалярная функция. Поэтому при новых переменных z'_α коэффициенты разложения (3.8) будут иметь вид

$$l'_{\alpha\beta} = u_{\alpha\varepsilon} u_{\beta\zeta} l_{\varepsilon\zeta}, \qquad m'_{\alpha\beta\gamma} = u_{\alpha\varepsilon} u_{\beta\zeta} u_{\gamma\eta} m_{\varepsilon\zeta\eta}, \qquad n'_{\alpha\beta\gamma\delta} = u_{\alpha\varepsilon} \ldots u_{\delta\vartheta} n_{\varepsilon\zeta\eta\vartheta}, \tag{5.1}$$

причем

$$l'_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \tag{5.2}$$

Согласно формуле (П.8) Приложения характеристический потенциал, порождающий кумулянты (П.3), в новых переменных имеет вид (П.2), где

$$\Phi_{\alpha\beta} = k_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \qquad \Phi_{\alpha\beta\gamma} = - k_\alpha k_\beta k_\gamma m'_{\alpha\beta\gamma}, \qquad \Phi_{\alpha\beta\gamma\delta} = k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta (3m'_{\alpha\beta\varepsilon} k_\varepsilon m'_{\varepsilon\gamma\delta} - n'_{\alpha\beta\gamma\delta}), \tag{5.3}$$

здесь $k_\alpha = \lambda_\alpha^{-1}$.

Произведем теперь новое линейное преобразование и будем рассматривать лишь часть полного числа переменных, а именно переменные

$$y_\rho = c_{\rho\alpha} z'_\alpha = c_{\rho\alpha} u_{\alpha\beta} z_\beta, \qquad \rho = 1, \ldots, l. \tag{5.4}$$

Число l этих переменных равно числу меняющих знак собственных значений (4.6). Подматрица $c_{\rho\sigma}$, $\rho \leqslant l$, $\sigma \leqslant l$, предполагается невырожденной. Обратную матрицу обозначим $b_{\rho\sigma}$. Условимся, что индексы ξ, π, ρ, ... пробегают значения $1, \ldots, l$, в то время как индексы α β, ..., ϑ —значения $1, \ldots, r$.

Преобразование (5.4) является вырожденным. При вырожденных преобразованиях как известно, весьма просто преобразуются кумулянты (П.3), а следовательно, и характеристический потенциал. Обозначим через $\tilde{\Phi}$ характеристический потенциал новых переменных (5.4), а через $\tilde{\Phi}_{\sigma_1 \ldots \sigma_n}$ — соответствующие коэффициенты разложения (П.2). Используя (5.3), находим

$$\tilde{\Phi}_{\rho\sigma} = c_{\rho\alpha} c_{\sigma\alpha} k_\alpha, \qquad \tilde{\Phi}_{\rho\sigma\tau} = - c_{\rho\alpha} c_{\sigma\beta} c_{\tau\gamma} k_\alpha k_\beta k_\gamma m'_{\alpha\beta\gamma}, \qquad \tilde{\Phi}_{\rho\sigma\tau\varphi} = c_{\rho\alpha} \ldots c_{\varphi\delta} k_\alpha \ldots k_\delta (3m'_{\alpha\beta\varepsilon} k_\varepsilon m'_{\varepsilon\gamma\delta} - n'_{\alpha\beta\gamma\delta}). \tag{5.5}$$

Теперь, снова используя (П.8), нетрудно найти коэффициенты разложения (3.8) новой квазисвободной энергии $\tilde{F}(y)$:

$$\| \tilde{l}_{\rho\sigma} \| = \| c_{\rho\alpha} k_\alpha c_{\sigma\alpha} \|^{-1}, \qquad \tilde{m}_{\rho\sigma\tau} = r_{\rho\alpha} r_{\sigma\beta} r_{\tau\gamma} m'_{\alpha\beta\gamma}, \qquad \tilde{n}_{\rho\sigma\tau\varphi} = r_{\rho\alpha} \ldots r_{\varphi\delta} [n'_{\alpha\beta\gamma\delta} + 3m'_{\alpha\beta\varepsilon} k_\varepsilon (c_{\rho\varepsilon} r_{\rho\zeta} - \delta_{\varepsilon\zeta}) m'_{\zeta\gamma\delta}], \tag{5.6}$$

где обозначено $r_{\rho\alpha} = \tilde{l}_{\rho\sigma} c_{\sigma\alpha} k_\alpha$.

Учтем, что часть значений $k_\alpha = \lambda_\alpha^{-1}$ в силу (4.6) становятся очень большими вблизи критической точки. Выделяя эти значения, имеем

$$\tilde{l}_{\rho\sigma}^{-1} = c_{\rho\tau} k_\tau c_{\sigma\tau} + \sum_{\nu > l} c_{\rho\nu} k_\nu c_{\sigma\nu} = (\Theta_c - \Theta)^{-1} c_{\rho\tau} q_\tau c_{\sigma\tau} + \sum_{\nu > l} c_{\rho\nu} k_\nu c_{\sigma\nu}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \| \tilde{l}_{\rho\sigma} \| &= (\Theta_c - \Theta) \| c_{\rho\tau} q_\tau c_{\sigma\tau} + (\Theta_c - \Theta) \sum_{\nu > l} c_{\rho\nu} k_\nu c_{\sigma\nu} \|^{-1} = \\ &= (\Theta_c - \Theta) \| s_{\rho\sigma} \| + O((\Theta_c - \Theta)^2), \end{aligned} \tag{5.7}$$

где

$$\| s_{\rho\sigma} \| = \| c_{\rho\tau} q_\tau c_{\sigma\tau} \|^{-1} = \| b_{\tau\rho} q_\tau^{-1} b_{\tau\sigma} \|. \tag{5.8}$$

Вследствие (5.7) и (5.8) находим

$$\begin{aligned} r_{\rho\tau} &= s_{\rho\sigma} c_{\sigma\tau} q_\tau + O(\Theta_c - \Theta) = b_{\tau\rho} + O(\Theta_c - \Theta), \\ r_{\rho\nu} &= O(\Theta_c - \Theta), \qquad \nu > l. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Подставляя (5.9) в (5.6) и принимая во внимание лишь главные члены разложения по малому параметру $\Theta_c - \Theta$, получаем

$$\tilde{m}_{\rho\sigma\tau} = m'_{\varphi\psi\omega} b_{\varphi\rho} b_{\psi\sigma} b_{\omega\tau},$$

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{\pi\rho\sigma\tau} = \Big[n'_{\varphi\chi\psi\omega} - 3 \sum_{\nu > l} \big(m'_{\varphi\chi\xi} v_{\xi\nu} k_\nu v_{o\nu} m'_{o\psi\omega} - m'_{\varphi\chi\xi} v_{\xi\nu} k_\nu m'_{\nu\psi\omega} - \\ - m'_{\varphi\chi\nu} k_\nu v_{\xi\nu} m'_{\xi\psi\omega} + m'_{\varphi\chi\nu} k_\nu m'_{\nu\psi\omega} \big) \Big] b_{\varphi\pi} \ldots b_{\omega\tau}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

где $v_{\xi\nu} = b_{\xi\tau} c_{\tau\nu}$. Анализ второго члена в квадратных скобках в (5.6) потребовал более точных соотношений, нежели (5.7) и (5.9). Формулы (5.1), (5.7), (5.10) позволяют найти квазисвободную энергию, получающуюся после описанного уменьшения числа переменных.

6. КРИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ γ И β

Критический индекс γ определяется формулой

$$\langle\langle y_\sigma, y_\tau \rangle\rangle \sim | \Theta - \Theta_c |^{-\gamma}.$$

Учитывая (П.3), первые формулы (5.5), (5.6), а также (5.7), имеем

$$\langle\langle y_\sigma, y_\tau \rangle\rangle = \mu (\Theta_c - \Theta)^{-1} s_{\sigma\tau}^{-1}.$$

Поэтому критический индекс γ в нашем случае имеет значение 1.

Перейдем к критическому индексу β. Предположим, что все $\tilde{m}_{\rho\sigma\tau} = 0$ и что матрица $\tilde{n}_{\pi\rho\sigma\tau}(\Theta_c)$ является положительно определенной в том смысле, что

$$\tilde{n}_{\pi\rho\sigma\tau}(\Theta_c)\, d_\pi\, d_\rho\, d_\sigma\, d_\tau > 0 \tag{6.1}$$

при любых d_π, не обращающихся в нуль одновременно. Тогда стоящая в левой части (6.1) сумма возрастает при увеличении K пропорционально K, если $d_\pi = K \nu_\pi$ и ν_π — не зависящий от K вектор.

В силу (4.5) стационарная точка $x^0(\Theta)$ является устойчивой при $\Theta < \Theta_c$. При $\Theta > \Theta_c$ она становится неустойчивой. Если разность $\Theta - \Theta_c$ мала, то новая устойчивая точка (или точки) будет лежать недалеко от $x^0(\Theta)$. Ее можно находить, отыскивая минимум квазисвободной энергии

$$\tilde{\Phi}(y) = -\frac{1}{2}(\Theta - \Theta_c)\, s_{\rho\sigma} y_\rho y_\sigma + \frac{1}{24}\tilde{n}_{\rho\sigma\tau\varphi} y_\rho y_\sigma y_\tau y_\varphi \tag{6.2}$$

(использовано (5.7)). Дифференцируя ее и приравнивая производную нулю, находим уравнения

$$\tilde{n}_{\rho\sigma\tau\varphi} y_\sigma y_\tau y_\varphi = 6(\Theta - \Theta_c)\, s_{\rho\sigma} y_\sigma, \tag{6.3}$$

которые служат для отыскания устойчивой точки. Обозначим ее y^*_σ. Критический индекс β определяется соотношением $y^*_\sigma \sim |\Theta - \Theta_c|^\beta$.

Будем искать решение уравнений (6.2) в виде

$$y^*_\sigma = y_* \nu_\sigma, \tag{6.4}$$

где ν — не зависящий от Θ вектор, удовлетворяющий условию нормировки $s_{\rho\sigma}\nu_\rho\nu_\sigma = 0$. Подстановка (6.4) в (6.3) дает

$$y_*^2 \tilde{n}_{\rho\sigma\tau\varphi} \nu_\sigma \nu_\tau \nu_\varphi = 6(\Theta - \Theta_c)\, s_{\rho\sigma}\nu_\sigma.$$

Умножая это равенство на ν_ρ и суммируя по ρ при учете условия нормировки вектора ν_ρ, получаем

$$y_* = 6^{1/2}(\Theta - \Theta_c)^{1/2}(\tilde{n}_{\rho\sigma\tau\varphi}\nu_\rho\nu_\sigma\nu_\tau\nu_\varphi)^{-1/2}. \tag{6.5}$$

Из (6.4) и (6.5) видим, что критический индекс β равен 1/2. Мы получили, таким образом, классические значения указанных критических индексов.

7. ПРИМЕР. ВОЗБУЖДЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ДВУХУРОВНЕВОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим пример, иллюстрирующий полезность уменьшения числа переменных при изучении фазового перехода.

1. Пусть имеется бесконечная однородная среда, содержащая молекулы с двумя энергетическими уровнями. В ней молекулы взаимодействуют с излучением. В качестве исходных уравнений возьмем уравнения (2.60) из [7]. Изменяя масштабы времени и пространства, а также взяв вместо $\boldsymbol{P}^s$, $N_1 - N_2$ пропорциональные им величины $\boldsymbol{P}$, d, полученные умножением на подходящие коэффициенты, записываем эти уравнения в виде

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} + 2\alpha\dot{\boldsymbol{E}} + \ddot{\boldsymbol{E}} = -\ddot{\boldsymbol{P}}, \\ \ddot{\boldsymbol{P}} + 2\beta\dot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{P} = -2d\boldsymbol{E}, \\ \dot{d} + \delta d = 2\gamma\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{P}} + \Theta, \end{gathered} \tag{7.1}$$

где Θ — накачка, α, β, γ, δ — постоянные, причем α и β предполагаются много меньшими единицы. Ограничиваясь рассмотрением поперечного поля, для которого $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0$, заменим $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}$ оператором $-\Delta\boldsymbol{E}$. Преобразуем первое уравнение (7.1) к виду

$$\ddot{\boldsymbol{E}} = -2\alpha\dot{\boldsymbol{E}} + \Delta\boldsymbol{E} + 2\beta\dot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{P} + 2d\boldsymbol{E}. \tag{7.2}$$

Вместо быстро меняющихся полей $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{P}$ введем медленно меняющиеся во времени комплексные амплитуды

$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{E} + i\lambda^{-1}\dot{\boldsymbol{E}})\, e^{i(\lambda t + \varphi_0)}, \qquad \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{P} + i\lambda^{-1}\dot{\boldsymbol{P}})\, e^{i(\lambda t + \varphi_0)}. \tag{7.3}$$

Здесь λ — близкий к единице параметр, значение которого будет определено ниже.

Из (7.3) имеем

$$\dot{z} = i\lambda^{-1}(\ddot{E} + \lambda^2 E)\, e^{i(\lambda t+\varphi_0)}, \qquad \dot{w} = i\lambda^{-1}(\ddot{P} + \lambda^2 P)\, e^{i(\lambda t+\varphi_0)}. \tag{7.4}$$

Подставим сюда (7.2) и второе уравнение (7.1). Используя также формулы

$$E = \operatorname{Re} z\, e^{-i\Phi}, \qquad \dot{E} = \lambda \operatorname{Im} z\, e^{-i\Phi}, \qquad P = \operatorname{Re} w\, e^{-i\Phi},$$

$$\dot{P} = \lambda \operatorname{Im} w\, e^{-i\Phi} \qquad (\Phi = \lambda t + \varphi_0),$$

произведем усреднение уравнений (7.4) и третьего уравнения (7.1) по времени за период $2\pi/\lambda$, считая при этом z, w, d постоянными. Получим основную систему укороченных уравнений

$$\lambda\dot{z} = \left[-\lambda\alpha + \frac{1}{2} i(\lambda^2 - 1) - iQ + id\right] z + \left(\lambda\beta + \frac{1}{2} i\right) w,$$

$$\lambda\dot{w} = -idz + \left[-\lambda\beta + \frac{1}{2} i(\lambda^2 - 1)\right] w, \tag{7.5}$$

$$\dot{d} = -\delta d + \lambda\gamma \operatorname{Im}(z^* w) + \Theta,$$

где обозначено

$$2Q = -\Delta - 1. \tag{7.6}$$

Поскольку в (7.5) входят комплексные переменные z, w, эти уравнения эквивалентны пяти уравнениям относительно переменных

$$x_1 = \operatorname{Re} z, \quad x_2 = \operatorname{Im} z, \quad x_3 = \operatorname{Re} w, \quad x_4 = \operatorname{Im} w, \quad x_5 = d. \tag{7.7}$$

Уравнения (7.5) или эквивалентные им уравнения для переменных (7.7) являются для рассматриваемой системы основной исходной системой уравнений (1.1). Переход к действительным переменным (7.7) не является обязательным, так как теория, изложенная в разд. 2—6, легко обобщается на случай комплексных переменных. Существенно, что основные уравнения (7.5) инвариантны относительно изменения начальной фазы φ_0, т. е. преобразований $z \to e^{i\varphi} z$, $w \to e^{i\varphi} w$ при действительном φ.

2. Предположим, что зависимость z и w от пространственного радиуса-вектора носит гармонический характер:

$$z = C_1 e^{ikr} + C_2 e^{-ikr}, \qquad w = C_3 e^{ikr} + C_4 e^{-ikr}, \tag{7.8}$$

так что $2Q = k^2 - 1$ в силу (7.6), и исследуем стационарные точки системы (7.5). Приравнивая производные по времени нулю, получаем

$$\left[-\lambda\alpha + \frac{1}{2} i(\lambda^2 - 1) - iQ + id\right] z + \left(\lambda\beta + \frac{1}{2} i\right) w = 0,$$

$$-idz + \left[-\lambda\beta + \frac{1}{2} i(\lambda^2 - 1)\right] w = 0, \tag{7.9}$$

$$-\delta d + \lambda\gamma \operatorname{Im}(z^* w) + \Theta = 0.$$

Складывая первые два из этих уравнений, имеем

$$[-2\lambda\alpha + i(\lambda^2 - 1 - 2Q)]\, z + i\lambda^2 w = 0,$$

т. е.

$$w = \lambda^{-2}(k^2 - \lambda^2 - 2i\lambda\alpha)\, z. \tag{7.10}$$

Подставляя (7.10) в третье уравнение (7.9), находим

$$\delta d + 2\alpha\gamma\, z^* z = \Theta. \tag{7.11}$$

Теперь подставим (7.10) в первое уравнение (7.9) и приравняем нулю действительную и мнимую части полученного выражения порознь. Будем иметь два соотношения:

$$\alpha(\lambda^2 - 1) = \beta(k^2 - \lambda^2); \tag{7.12}$$

$$d = 2\alpha\beta + \frac{1}{2}\lambda^{-2}(\lambda^2 - 1)(k^2 - \lambda^2) \qquad \text{при} \qquad z^*z > 0. \tag{7.13}$$

Исключим d из (7.13) при помощи (7.11). Это дает

$$\begin{aligned} 2\alpha\gamma\, z^* z &= \Theta - 2\alpha\beta\delta - \frac{1}{2}\delta\lambda^{-2}(\lambda^2 - 1)(k^2 - \lambda^2) = \\ &= \Theta - 2\alpha\beta\delta - \frac{1}{2}\frac{\alpha\beta\delta}{(\alpha+\beta)^2}(k^2 - 1)^2\left[1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(k^2 - 1)\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{7.14}$$

В последнем члене этого выражения λ^2 выражено через k^2 при помощи уравнения (7.12), которое служит для определения λ. Обсудим следствия из полученных формул. Из (7.9) видно, что всегда существует стационарная точка, соответствующая значениям $z = 0$, $w = 0$, $d_0 = \Theta/\delta$. Однако, как вытекает из (7.14) при значениях накачки Θ, превышающих критическое значение

$$\Theta_c(k^2) = 2\alpha\beta\delta + \frac{1}{2}\frac{\alpha\beta\delta}{(\alpha+\beta)^2}(k^2 - 1)^2\left[1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(k^2 - 1)\right]^{-1}, \tag{7.15}$$

возникают дополнительно ненулевые стационарные точки

$$|z| = (2\alpha\gamma)^{-1/2}[\Theta - \Theta_c(k^2)]^{1/2}. \tag{7.16}$$

Им соответствует значение (7.13) и значение $|w|$, получаемое при помощи (7.10). Учитывая вид последнего члена в (7.14), легко понять, что при увеличении накачки прежде всего возбуждаются гармоники с $k \approx 1$.

3. Исследуем нулевую стационарную точку на устойчивость. Для этого найдем квадратичную часть

$$\begin{aligned} F^{(2)}(z, w, d) = \frac{1}{2}[&l_{11}z^*z + l_{12}z^*w + l_{21}w^*z + \\ &+ l_{22}w^*w + l_{33}(d - d_0)^2] \end{aligned} \tag{7.17}$$

квазисвободной энергии. Функция (7.17) подобрана таким образом, чтобы она была инвариантна относительно упоминавшегося ранее преобразования начальной фазы. В (7.17) приведены все инвариантные квадратичные комбинации. Коэффициенты перед ними подлежат определению. Коэффициент $l_{12} = l_{21}^*$ комплексный, остальные действительные.

Для комплексных x_α уравнение (3.6) принимает вид

$$f_\alpha \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = 2N_{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial x_\alpha^*}\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}, \tag{7.18}$$

где при дифференцировании по x_α фиксируются x^* и наоборот. Подставляя сюда (7.17), а также уравнения (7.5) в линейном приближении, которые кратко можно записать

$$\dot{z}_\alpha = -f_\alpha = -a_{\alpha\beta} z_\beta$$
$$(z_1 = z, \quad z_2 = w, \quad z_3 = d - d_0), \tag{7.19}$$

нетрудно получить (при $N_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$)

$$LA + A^+ L = 2L^2 \tag{7.20}$$

$(L = \| l_{\alpha\beta} \|, \; A = \| a_{\alpha\beta} \|)$ в соответствии в (3.9). В линейном приближении координата $z_3 = d - d_0$ не зацепляется за остальные, и для нее из (7.20) легко находим $l_{33}\delta = l_{33}^2$, т. е. $l_{33} = \delta$. Остальным переменным в (7.20) соответствует 2×2-матрицы A и L. Переходя к обратной 2×2-матрице $K = L^{-1}$, из (7.20) имеем

$$AK + KA^+ = 2. \tag{7.21}$$

Будем решать это уравнение, представляя A и K через матрицы Паули:

$$A = \sum_{n=0}^{3} (r_n + is_n)\sigma_n \equiv (r_0 + is_0)\sigma_0 + (\boldsymbol{r} + i\boldsymbol{s})\boldsymbol{\sigma}, \qquad K = k_0\sigma_0 + \boldsymbol{k\sigma}, \tag{7.22}$$

где

$$\sigma_0 = \| \delta_{\alpha\beta} \|, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.23}$$

Подставляя (7.22) в (7.21) и пользуясь известными алгебраическими свойствами матриц Паули, получаем

$$r_0 k_0 + \boldsymbol{rk} = 1; \tag{7.24}$$

$$r_0 \boldsymbol{k} - \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{k} = -k_0 \boldsymbol{r}. \tag{7.25}$$

Умножая (7.25) скалярно на $\boldsymbol{k}$, находим $r_0 k^2 = -k_0 \boldsymbol{rk}$ $(k^2 = \boldsymbol{kk})$, откуда с учетом (7.24) имеем

$$k_0^2 - k^2 = k_0 / r_0. \tag{7.26}$$

Если же разрешить (7.25) относительно k_α как линейную систему трех уравнений, то будем иметь

$$\boldsymbol{k} = -k_0 \Delta^{-1} [r_0^2 \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{rs})\boldsymbol{s} + r_0 \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}]$$
$$(\Delta = r_0(r_0^2 + s^2)). \tag{7.27}$$

Подставляя (7.27) в (7.24), получаем

$$k_0 = \Delta [r_0 \Delta - r_0^2 r^2 - (\boldsymbol{rs})^2]^{-1}. \tag{7.28}$$

Поскольку собственные значения матрицы $K = k_0 \sigma_0 + \boldsymbol{k\sigma}$ равны $k_0 \pm k$, то собственные значения обратной матрицы L равны

$$\lambda_\pm = (k_0 \mp k)^{-1} = (k_0^2 - k^2)^{-1}(k_0 \pm k)$$

или, в силу (7.26),

$$\lambda_\pm = r_0 \pm \left(\frac{k_0^2 - k_0/r_0}{(k_0^2 - k^2)^2} \right)^{1/2} = r_0 [1 \pm (1 - (k_0 r_0)^{-1})^{1/2}]. \tag{7.29}$$

Отсюда видно, что (при $r_0 > 0$) оба собственных значения будут положительны, т. е. L будет устойчива, если $(k_0 r_0)^{-1} > 0$. Далее, одно из них будет отрицательно, т. е. L неустойчива, если $(k_0 r_0)^{-1} < 0$. Таким образом, устойчивость матрицы L определяется знаком выражения $(k_0 r_0)^{-1}$, которое в силу (7.28) приводится к виду

$$(k_0 r_0)^{-1} = r_0^{-2}(r_0^2 + s^2)^{-1}\left[r_0^4 + r_0^2 s^2 - r_0^2 r^2 - (rs)^2\right]. \tag{7.30}$$

Сравнивая (7.19) с (7.5) при учете (7.22), нетрудно найти, как r_0, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ выражаются через α, β и т. п. Подставляя эти выражения в (7.30), имеем

$$(k_0 r_0)^{-1} = \frac{1}{2}(r_0^2 + s^2)^{-1}\lambda^2\delta^{-1}(\Theta_c(k) - \Theta). \tag{7.31}$$

Здесь учтено равенство (7.15), а также равенство $d_0 = \Theta/\delta$. Итак, нулевая точка является устойчивой при $\Theta < \Theta_c(k)$ и неустойчивой в противоположном случае.

4. Как видно из (7.31), при $\Theta = \Theta_c(\boldsymbol{k})$ одно из собственных значений (7.29) меняет знак, а другое нет. В связи с этим для явного выделения фазового перехода целесообразно произвести уменьшение числа переменных. Из переменных $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{w}$, d оставим только $\boldsymbol{z}$ и отбросим остальные. Ранее указывалось, что при уменьшении числа переменных особенно просто преобразуется матрица K. Легко видеть, что при отбрасывании всех переменных, кроме $\boldsymbol{z}$, следует оставить лишь верхний диагональный элемент матрицы K, а именно k_{11}. Из (7.22), (7.23) имеем $k_{11} = k_0 + k_3$. В соответствии с принятыми ранее обозначениями обратную величину $\tilde{l}_{11}$ запишем в виде $\tilde{l}_{11} = (k_0 + k_3)^{-1}$. Используя (7.27), (7.31), имеем

$$\tilde{l}_{11} = c(\Theta_c(k) - \Theta), \tag{7.32}$$

где

$$c = \frac{1}{2}\lambda^2\delta^{-1} r_0^2\left[r_0(r_0^2 + s^2) - r_0^2 r_3 - \boldsymbol{rs}s_3 - r_0(s_1 r_2 - s_2 r_1)\right]^{-1} > 0.$$

Следовательно, квадратичная часть квазисвободной энергии уменьшенного числа переменных имеет вид

$$\tilde{\Phi}^{(2)}(z) = \frac{1}{2}c(\Theta_c(k) - \Theta)z^* z. \tag{7.33}$$

Нетрудно понять, какой вид должна иметь квазисвободная энергия при учете нескольких следующих членов разложения вследствие инвариантности относительно замены $z \to e^{i\varphi}z$:

$$\tilde{\Phi}(z) = \frac{1}{2}c(\Theta_c(k) - \Theta)z^* z + \frac{1}{24}\tilde{n}(z^* z)^2. \tag{7.34}$$

Определить $\tilde{n}$ проще всего так: положим $\Theta > \Theta_c(k)$ и найдем из (7.34) ненулевые стационарные точки $|z|^2 = 6c(\Theta - \Theta_c)/\tilde{n}$. Сравнение с (7.16) дает $\tilde{n} = 12\alpha\gamma c$. Квазисвободная энергия (7.34) аналогична (6.2), поэтому фазовый переход в рассматриваемой системе такой же, как и в разд. 6.

5. До сих пор рассматривалась только одна пространственная гармоника полей $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{P}$. Рассмотрим теперь общий случай, когда одновременно имеется много гармоник. Случайные поля предполагаются пространственно-однородными. Отсюда вытекает статистическая независимость гармоник в линейном приближении. Независимости соответствует аддитивность квазисвободной энергии. Заменим в (7.33) $z^* z$ выражением $z^* z \Delta k$ и просуммируем вклады, даваемые различными гармониками. Получим

$$\tilde{\Phi}^{(2)}[z(k)] = \frac{1}{2}\int [c(\Theta_c - \Theta) + b(k^2-1)^2]\, z^*(k)\, z(k)\, dk. \qquad (7.35)$$

Здесь $\Theta_c = 2\alpha\beta\delta$, $b = \frac{1}{2}\alpha\beta\delta(\alpha+\beta)^{-2}c$. Мы использовали (7.15), где отбросили члены порядка $(k^2-1)^3$ и выше. Переходя в (7.35) от спектрального представления к пространственному, находим

$$\tilde{\Phi}^{(2)}[z(r)] = \frac{1}{2}\int [c(\Theta_c - \Theta)\,|z(r)|^2 + b\,|(\Delta+1)\,z(r)|^2]\, dr. \qquad (7.36)$$

Наконец, если синтезировать формулы (7.34) и (7.36), то будем иметь

$$\tilde{\Phi}[z(r)] = \frac{1}{2}\int \left[c(\Theta_c - \Theta)\,|z|^2 + b\,|(\Delta+1)\,z|^2 + \frac{1}{6}\tilde{n}\,|z|^4\right] dr.$$

Квазисвободная энергия такого вида получена в [8] другим методом. Там было показано, что она приводит к несовпадающим значениям продольного и поперечного критического индекса ν: $\nu_{\parallel} = 1/2$, $\nu_{\perp} = 1/4$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Связь квазисвободной энергии с характеристическим потенциалом

Рассмотрим характеристическую функцию $\Theta(iu) = \int e^{iux} p_0(x)\, dx$ случайных величин, описываемых распределением (3.5), и характеристический потенциал $\Phi(h)$, определяемый формулой

$$\Theta(\mu^{-1} h) = \exp[\mu^{-1}\Phi(h)]. \qquad (П.1)$$

Из (П.1) легко видеть, что коэффициенты разложения

$$\Phi(h) = \Phi_\alpha h_\alpha + \frac{1}{2}\Phi_{\alpha\beta} h_\alpha h_\beta + \frac{1}{6}\Phi_{\alpha\beta\gamma} h_\alpha h_\beta h_\gamma + + \frac{1}{24}\Phi_{\alpha\beta\gamma\delta} h_\alpha \ldots h_\delta + \ldots \qquad (П.2)$$

пропорциональны кумулянтам

$$\langle\langle x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n} \rangle\rangle = \mu^{n-1}\Phi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}. \qquad (П.3)$$

Из определения $\Theta(iu)$ имеем

$$p_0(x) = (2\pi)^{-r}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int e^{-iux}\,\Theta(iu)\, du. \qquad (П.4)$$

После подстановки (П.1) в (П.4) целесообразно вычислять этот интеграл методом скорейшего спуска, используя малость μ. Пусть h^0 — точка, в которой подынтегральное выражение имеет экстремум. Она определяется уравнением

$$\partial\Phi(h^0)/\partial h_\alpha = x_\alpha. \qquad (П.5)$$

Нетрудно доказать, что указанный экстремум является максимумом при чисто мнимых $h_\alpha - h_\alpha^0$, соответствующих направлению скорейшего спуска. Применяя метод скорейшего спуска, получаем приближенную

$$F(x) = h^0 x - \Phi(h^0) + O(\mu \ln \mu) \qquad (\text{П}.6)$$

(см. (3.5)). Здесь h^0 является функцией от x, как это видно из (П.5).

Мы видим, что $F(x)$ является преобразованием Лежандра $F = \hat{L}[\Phi]$ при малых μ. Обратное преобразование совпадает с прямым: $\Phi = \hat{L}[F]$. Формуле (П.5) соответствует формула

$$\partial F / \partial x_\alpha = h_\alpha . \qquad (\text{П}.7)$$

Пусть функция $F(x)$ имеет вид (3.8). Найдем соответствующую ей функцию $\Phi(h)$ или, что то же самое, коэффициенты разложения (П.2). При этом, разумеется, будем принимать во внимание то же самое число членов разложения. Используя (3.8), (П.7), (П.5), можно получить

$$\Phi_{\varepsilon\zeta} = k_{\varepsilon\zeta}, \qquad \Phi_{\varepsilon\zeta\eta} = - m_{\alpha\beta\gamma} k_{\alpha\varepsilon} k_{\beta\zeta} k_{\gamma\eta},$$
$$\Phi_{\varepsilon\zeta\eta\vartheta} = (3 m_{\alpha\beta\varkappa} k_{\varkappa\lambda} m_{\lambda\gamma\delta} - n_{\alpha\beta\gamma\delta}) k_{\alpha\varepsilon} \ldots k_{\delta\vartheta}. \qquad (\text{П}.8)$$

Обратные формулы имеют такой же вид при замене $l_{\alpha\beta} \rightleftarrows \Phi_{\alpha\beta}$,

$$m_{\alpha\beta\gamma} \rightleftarrows \Phi_{\alpha\beta\gamma}, \qquad n_{\alpha\beta\gamma\delta} \rightleftarrows \Phi_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика, Ч. 1. — М.: Наука, 1976.
2. Хакен Г. В кн.: М. Лэкс, Флуктуация и когерентные явления.— М.: Мир, 1974.
3. Ахманов С. А., Пахалов В. Б., Чиркин А. С. — Письма в ЖЭТФ, 1976, 23, с. 391.
4. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.— М: Сов. радио, 1961.
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры.— М.: Наука, 1975.
6. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств.—М.: Наука, 1972.
7. Пантел Р., Путхоф Г. Основы квантовой электроники. — М.: Мир, 1972, с. 59.
8. Стратонович Р. Л.— Квантовая электроника, 1977, 4, с. 2141.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 8 мая 1979 г., после доработки 23 января 1980 г.

PHASE TRANSITIONS IN NONEQUILIBRIUM RADIOPHYSICAL SYSTEMS

R. L. Stratonovich

A quasi-free energy is introduced for nonequilibrium systems which is a generalization of an ordinary free energy. It helps to analyse phase transitions and critical states. For the case when the phase transition is due to linear terms a decrease of a number of arguments of the free energy is made. It permits to concetrate the attention at those variables which are directly associated with the phase transition. The theory is illustrated by the example of a laser radiation excitation in a two-level medium.