ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975.
2. Кляцкин В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 4, с. 562.
3. Van Kampen N. G. — Phys. Rep., 1976, 24, № 3, p. 171.

Тихоокеанский океанологический институт ДВНЦ АН СССР

Поступила в редакцию 25 июня 1979 г.

УДК 538.56 : 519.25

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

А. А. Бердников

Определение корреляционной функции диффузионного процесса при известных его локальных характеристиках в общем случае сводится к решению уравнения Фоккера — — Планка — Колмогорова для переходной плотности вероятности

$$Lp(x, t|x_0, t_0) = 0, \quad t \geqslant t_0, \quad x \in \Omega, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $L \equiv \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} b(x, t) - \dfrac{\partial}{\partial x} a(x, t) - \dfrac{\partial}{\partial t}$, Ω — область существования траекторий процесса $x(t)$, определяемая условиями задачи. Переходная плотность вероятности должна удовлетворять начальному условию

$$\lim_{t\to t_0} p(x, t|x_0, t_0) = \delta\,(x - x_0) \tag{2}$$

и граничному условию

$$p(x, t|x_0, t_0) = 0, \quad x \in \Gamma\,\Omega, \tag{3}$$

где $\Gamma\,\Omega$ — граница области Ω.

Аналитическое решение (1) удается получить лишь для ограниченного набора локальных характеристик [1]. В [2] найден класс таких решений, для которого ограничения имеют вид дифференциального уравнения, связывающего локальные характеристики. Для решения (1) широко используются также приближенные методы [1, 3, 4].

В настоящем сообщении излагается метод приближенного решения (1), позволяющий получить простую вычислительную процедуру определения корреляционной функции. Процедура в общем случае рассчитана на использование ЭВМ.

Итерационный процесс решения (1) в [4] задается интегральной формой

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x, t|x_0, t_0) &= p_0(x, t|x_0, t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\Omega} dy\, p_n(x, t|y, \tau)\; Lp_0(y, \tau|x_0, t_0), \end{aligned} \tag{4}$$

где $p_0(x, t|x_0, t_0)$ — произвольное начальное приближение, удовлетворяющее условиям (2), (3).

Будем в качестве начального приближения использовать функцию, которая, кроме условий (2), (3), удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x} a(x, t)\, p_0(x, t|x_0, t_0) - \frac{\partial}{\partial t} p_0(x, t|x_0, t_0) = 0. \tag{5}$$

Ограничимся в дальнейшем задачами, для которых коэффициент сноса

$$a(x, t) = a(x)\, a_1(t). \tag{6}$$

Тогда решением (5) будет дельта-функция

$$p_0(x, t|x_0, t_0) = \delta\{\, x - F^{-1}[F(x_0) + F_1(t, t_0)]\,\},$$

где $F(x) = \int \frac{dx}{a(x)}$, $F_1(t, t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} a_1(z)dz$, $F^{-1}[\cdot]$ — функция, обратная $F(x)$, т. е. $F^{-1}[F(x)] = x$. При этом условии процедура (4) примет следующий вид:

$$p_{n+1}(x, t\,|\,x_0, t_0) = \delta(x - x^0) + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} b(u, \tau)\,\frac{\partial^2 p_n(x, t\,|\,u, \tau)}{\partial u^2}\,d\tau. \tag{7}$$

Здесь введены обозначения, используемые и в последующих формулах:

$$x^0 = F^{-1}[F(x_0) + F_1(t, t_0)], \quad u = F^{-1}[F(x_0) + F_1(\tau, t_0)].$$

Вычисляя последовательные итерации (7), получаем

$$p_n(x, t\,|\,x_0, t_0) = \sum_{i=0}^{2n} r_{i,n}(t, x_0, t_0)\,\delta^{(i)}(x - x^0), \tag{8}$$

$$r_{0,n} = 1,$$

где $r_{i,n}(t, x_0, t_0)$ определяются итеративной процедурой

$$r_{i,n+1}(t, x_0, t_0) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} b(u, \tau)\,\frac{\partial^2 r_{i,n}(t, u, \tau)}{\partial u^2}\,d\tau + r_{i,0}(t, x_0, t_0) \tag{9}$$

с начальным приближением

$$\begin{aligned} r_{i,0}(t, x_0, t_0) = \frac{a(x^0)}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{b(u, \tau)}{a^2(u)}\Big\{[a'(u) - a'(x^0)]\,r_{i-1,0}(t, u, \tau) - \\ - 2a(u)\,\frac{\partial r_{i-1,0}(t, u, \tau)}{\partial u} + a(x^0)\,r_{i-2,0}(t, u, \tau)\Big\}\,d\tau. \end{aligned} \tag{10}$$

В отличие от известных (см., например, [5]) разложений решения (1) по производным дельта-функции аргументом последней в (8) является движение эквивалентной (по коэффициенту сноса) динамической системы в отсутствие шума. Это разложение может оказаться полезным при анализе моментных функций процесса, являющегося реакцией динамической системы на воздействие белого шума. Так если процедура (9) при $n \to \infty$ сходится к некоторым $r_i(t, x_0, t_0)$, то двухточечный момент порядка $k + n$ равен

$$\langle x^k x_0^n \rangle = k!\sum_{s=0}^{k}\frac{(-1)^s}{(k-s)!}\int\limits_{\Omega} x_0^n (x^0)^{k-s} w(x_0)\,r_s(t, x_0, t_0)\,dx_0,$$

откуда следует, что $r_i(t, x_0, t_0)$ являются своего рода условными квазимоментами.

Для корреляционной функции n-е приближение с учетом (8) имеет следующий вид:

$$B_{x,n}(t, t_0) = \int\limits_{\Omega} x_0\, w(x_0)[x^0 - r_{1,n}(t, x_0, t_0)]\,dx_0, \tag{11}$$

причем соотношение (10) для $r_{1,0}(t, x_0, t_0)$ существенно упрощается:

$$r_{1,0}(t; x_0, t_0) = \frac{a(x^0)}{2}\int\limits_{t_0}^{t}[a'(u) - a'(x^0)]\,\frac{b(u, \tau)}{a^2(u)}\,d\tau. \tag{12}$$

Таким образом, формулы (9), (11), (12) позволяют простыми итерациями находить корреляционную функцию нестационарного в общем случае диффузионного процесса при ограничении (6) на вид коэффициента сноса. В отличие от метода [3, 6], хорошо работающего при малых τ, каждая итерация (11) пригодна при всех значениях τ.

Найденные предложенным методом итерации корреляционной функции задачи [6] при разложении в ряд по степеням τ дают коэффициенты, совпадающие с приведенными в [6].

Легко видеть, что если в (12) положить $a(x) = -\alpha x$, то $r_{1,0} = 0$ и

$$B_x(t, t_0) = \langle x_0^2 \rangle \exp[-\alpha F_1(t, t_0)].$$

Этот частный результат предлагаемого метода позволяет однозначно и точно, в отличие от [7], синтезировать динамическую систему вида

$$\dot{x} = f(x) + g(x)n(t), \ \langle n n_\tau \rangle = \delta(\tau),$$

порождающую стационарный процесс с коэффициентом корреляции $\exp(-\alpha|\tau|)$ и одномерной плотностью $w(x)$, произвольно заданной, по формулам

$$g^2(x) = -\frac{2\alpha}{w(x)} \int x w(x) dx, \quad f(x) = -\alpha x - \frac{1}{2} g(x) g'(x).$$

Очевидно, искомые $f(x)$ и $g(x)$ редко выражаются через элементарные функции. Так, например, для процесса, имеющего «m-распределение»

$$w(x) = \text{const} \cdot x^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\sigma^2} x^2\right), \qquad x \geqslant 0, \ m \geqslant \frac{1}{2},$$

при $m = n + \frac{1}{2}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ функция $g^2(x)$ является полиномом относительно x^{-2} порядка n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.
2. Маков Ю. В., Хохлов Р. В. — ДАН СССР, 1976, 227, № 2, с. 315.
3. Красовский А. А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. — М.: Наука, 1974.
4. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении. — М.: Сов. радио, 1978.
5. Параев Ю. И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. — М.: Сов. радио, 1976.
6. Медведев С. Ю. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 8, с. 1241.
7. Конторович В. Я. — Изв. АН СССР — Техническая кибернетика, 1974, № 6, с. 143.

Ленинградский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию 17 июля 1979 г., после доработки 10 марта 1980 г.

УДК 538.574.6

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ МЕТОДОМ НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

А. Г. Свешников, Ю. А. Еремин

1. До сих пор одним из универсальных методов исследования задач дифракции на проводящих и диэлектрических телах в однородной среде является метод интегральных уравнений [1, 2]. Он позволяет достаточно точно определять токи на поверхности рассеивателя, а также вторичные поля в ближней и дальней зонах. Особенно много численных результатов получено для случая возбуждения тел вращения [2]. В последнее время появилась также тенденция использовать метод неортогональных рядов для решения дифракционных задач [3], однако известны численные результаты лишь для плоских случаев. Вместе с тем следует отметить, что в определенном классе задач, а именно в задачах локации, где, как правило, требуется определить лишь вторичные поля (не производя анализа токов), метод неортогональных рядов, на наш взгляд, может составить конкуренцию методу интегральных уравнений.

В работе [4] приведена реализация метода неортогональных рядов решения задачи дифракции на теле вращения при произвольном возбуждении с использованием в качестве базисной системы произвольно ориентированных электрических диполей, расположенных на сосной поверхности вращения внутри тела. В данной заметке излагается методика, отличная от [4], рассчитанная на решение задачи дифракции плоской волны, распространяющейся вдоль оси симметрии. Такое упрощение постановки дает возможность добиться максимальной эффективности численного алгоритма, в котором в каче-