так как для условий проведения эксперимента масштаб $\sqrt{\lambda_1 L}$ был заметно больше внутреннего масштаба турбулентности. Отметим сразу, что глубокие провалы, соответствующие обращению в нуль значений $W_{1,2}(\omega)$, не наблюдаются в условиях эксперимента как из-за конечной полосы частотного фильтра при обработке, так и из-за турбулентных флуктуаций скорости переноса. Оба эти механизма, в первую очередь, приводят к сглаживанию расчетной кривой и замытию минимумов. На рис. 1 также представлены результаты измерений, причем в качестве параметра, характеризующего условия измерений, было выбрано значение $\beta_2^0 = 0{,}31\, C_\varepsilon^2 k_0^{7/6} L^{11/6}$. Выбор этого параметра по аналогии с [10] обусловлен тем, что в проводившемся эксперименте расстройка $K/k_0 = 0{,}18$ была невелика, поэтому β_0^2 единым образом характеризует, если можно так сказать, насколько «сильными» были флуктуации интенсивности света. В частности, значениям $\beta_0 \approx 2 \div 4$ соответствуют наибольшие значения относительных флуктуаций интенсивности — область случайных фокусировок.

Данные, полученные в эксперименте, показывают, что для низких частот когерентность оказывается меньше расчетного значения, вычисленного в первом приближении МПВ. Более неожиданным является то обстоятельство, что при высоких частотах когерентность больше, чем дает расчет в этом приближении, и особенно то, что с ростом β_0^2 когерентность заметно увеличивается. Наиболее простым качественным объяснением этого увеличения могла бы быть ссылка на хорошо известный факт расширения автоспектра флуктуаций с ростом параметра β_0^2 [6]. Но поскольку когерентность $c(\omega)$ аналогична спектральному коэффициенту корреляции, только упоминание этого факта не является исчерпывающим объяснением наблюдавшегося явления, и в данном случае, как нам представляется, требуется более детальный теоретический анализ. Несомненный интерес представят эксперименты, аналогичные описанному выше, но с большей расстройкой по частотам или с большими значениями β_0^2.

Авторы выражают благодарность В. А. Безверхнему и Л. Г. Покасовой за помощь в расчетах на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pincus P. A., Kerr J. R. — Appl. Opt., 1976, 15, № 10, p. 2305.
2. Гурвич А. С., Кан В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 7, с. 843.
3. Альбер Я. И., Ерухимов Л. М., Рыжов В. А., Урядов В. П. — Изв. вузов — Радиофизика, 1968, 11, № 9, с. 1371.
4. Шишов В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1973, 16, № 3, с. 423.
5. Артемьев А. В., Гурвич А. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1971, 14, № 5, с. 734.
6. Гурвич А. С., Елепов Б. С., Покасов Вл. В., Сабельфельд К. К., Татарский В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 2, с. 198.
7. Fried D. L. — Appl. Opt., 1971, 10, № 4, p. 721.
8. Фукс И. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, 17, № 11, с. 1665.
9. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
10. Грачева М. Е., Гурвич А. С., Кашкаров С. С., Покасов Вл. В. — В сб.: ed. J. W. Strohbehn. Laser Beam Propagation in the Atmosphere, Springer-Verlag, 1978, p. 107.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
10 сентября 1979 г.

УДК 519.217

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ФУРУТЦУ — НОВИКОВА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО ПРОЦЕССА

Г. И. Бабкин, В. И. Кляцкин, Л. Я. Любавин

При анализе стохастических уравнений большую роль играет формула, называемая формулой Фурутцу — Новикова (см., например, [1]):

$$\langle z(t) R[z(\tau)] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \langle z(t) z(\tau_1) \rangle \left\langle \frac{\delta R[z(\tau)]}{\delta z(\tau_1)} \right\rangle, \tag{1}$$

справедливая для гауссова случайного процесса $z(t)$ и произвольного функционала $R[z(\tau)]$ от него.

Для телеграфного процесса $z(t)$ с корреляционной функцией $\langle z^2 \rangle e^{-2\alpha|\tau|}$ известны формулы [2]

$$\langle z(t) R_{t_0}^t[z(\tau)]\rangle = \langle z^2\rangle \int_{t_0}^{t} d\tau_1 e^{-2\alpha(t-\tau_1)} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(\tau_1)} R_{t_0}^t[z(\tau)\theta(\tau_1-\tau+0)]\right\rangle,$$
$$\langle z(t_0) R_{t_0}^t[z(\tau)]\rangle = \langle z^2\rangle \int_{t_0}^{t} d\tau_1 e^{-2\alpha(\tau_1-t_0)} \left\langle \frac{\delta}{\delta z(\tau_1)} R_{t_0}^t[z(\tau)\theta(\tau-\tau_1+0)]\right\rangle, \tag{2}$$

где $R_{t_0}^t[z(\tau)]$ — произвольный функционал процесса $z(\tau)$, такой, что $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$. Ниже будет получена формула для корреляции $\langle z(\xi) R_{t_0}^t[z(\tau)]\rangle$, где $t_0 \leqslant \xi \leqslant t$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$.

Рассмотрим функционал

$$\Phi_{tt_0}[v(\tau)] = \left\langle \exp\left\{i\int_{t_0}^{t} d\tau\, z(\tau) v(\tau)\right\}\right\rangle \theta(t-t_0),$$

который, очевидно, удовлетворяет интегральному уравнению, аналогичному уравнению для характеристического функционала Φ_{t_0} процесса $z(t)$ [2]:

$$\Phi_{tt_0} = \theta(t-t_0) - \langle z^2\rangle \int_{t_0}^{t} d\tau_1 v(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 v(\tau_2) e^{-2\alpha(\tau_1-\tau_2)} \Phi_{\tau_2 t_0}, \tag{3}$$

которое можно переписать в виде

$$\Phi_{tt_0} = \theta(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} d\tau K(t,\tau)\Phi_{\tau t_0},$$
$$K(t,\tau) = -\langle z^2\rangle v(\tau) \int_{\tau}^{t} d\tau_1 v(\tau_1) e^{-2\alpha(\tau_1-\tau)}. \tag{4}$$

Проварьируем уравнение (4) по $v(\xi)$. В результате для функционала

$$\Psi_{t_0}^t[\xi, v(\tau)] \equiv \frac{\delta}{i\,\delta v(\xi)} \Phi_{tt_0} = \left\langle z(\xi)\exp\left\{i\int_{t_0}^{t} d\tau\, z(\tau) v(\tau)\right\}\right\rangle \tag{5}$$

получаем интегральное уравнение

$$\Psi_{t_0}^t[\xi, v(\tau)] = \int_{t_0}^{t} dt_1 \frac{\delta K(t,t_1)}{i\,\delta v(\xi)} \Phi_{t_1 t_0} + \int_{t_0}^{t} dt_1 K(t,t_1)\Psi_{t_0}^{t_1}[\xi, v(\tau)]. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) можно выразить через решение уравнения (4)

$$\Psi_{t_0}^t[\xi, v(\tau)] = \int_{t_0}^{t} d\tau \Phi_{t\tau} \int_{t_0}^{\tau} d\tau_1 \Phi_{\tau_1 t_0} \frac{\delta}{i\,\delta v(\xi)} \frac{\partial K(\tau,\tau_1)}{\partial \tau}, \tag{7}$$

которое с учетом определения функционала $K(t,\tau)$ можно переписать следующим образом:

$$\Psi_{t_0}^t[\xi, v(\tau)] = i\langle z^2\rangle \Phi_{t\xi}[v(\tau)] \int_{t_0}^{\xi} dt_1 v(t_1) e^{-2\alpha(\xi-t_1)} \Phi_{t_1 t_0}[v(\tau)] +$$
$$+ i\langle z^2\rangle \Phi_{\xi t_0}[v(\tau)] \int_{\xi}^{t} dt_1 \Phi_{tt_1}[v(\tau)] v(t_1) e^{-2\alpha(t_1-\xi)}. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь корреляцию

$$\langle z(\xi) R_{t_0}^t[\eta(\tau)+z(\tau)]\rangle = \left\langle z(\xi)\exp\left\{\int_{t_0}^{t} d\tau\, z(\tau)\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)}\right\}\right\rangle R_{t_0}^t[\eta(\tau)] =$$
$$= \Psi_{t_0}^t\left[\xi, \frac{\delta}{i\,\delta\eta(\tau)}\right] R_{t_0}^t[\eta(\tau)] = \tag{9}$$

$$= \langle z^2 \rangle \int_{t_0}^{\xi} dt_1 e^{-2\alpha(\xi - t_1)} \frac{\delta}{\delta\eta(t_1)} \Phi_{t\xi}\left[\frac{\delta}{i\delta\eta(\tau)}\right] \Phi_{t_1 t_0}\left[\frac{\delta}{i\delta\eta(\tau)}\right] R_{t_0}^t [\eta(\tau)] +$$

$$+ \langle z^2 \rangle \int_{\xi}^{t} dt_1 e^{-2\alpha(t_1 - \xi)} \frac{\delta}{\delta\eta(t_1)} \Phi_{tt_1}\left[\frac{\delta}{i\delta\eta(\tau)}\right] \Phi_{\xi t_0}\left[\frac{\delta}{i\delta\eta(\tau)}\right] R_{t_0}^t [\eta(\tau)],$$

где $R_{t_0}^t [z(\tau)]$ — произвольный функционал процесса $z(\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, $t_0 \leqslant \xi \leqslant t$. Следовательно, учитывая определение функционала Φ, можно переписать равенство (9) в виде

$$\langle z(\xi) R_{t_0}^t [\eta(\tau) + z(\tau)] \rangle =$$

$$= \langle z^2 \rangle \int_{t_0}^{\xi} dt_1 e^{-2\alpha(\xi - t_1)} \frac{\delta}{\delta\eta(t_1)} \langle R_{t_0}^t [\eta(\tau) + z_1(\tau)\theta(\tau - \xi) + z_2(\tau)\theta(t_1 - \tau)] \rangle + \tag{10}$$

$$+ \langle z^2 \rangle \int_{\xi}^{t} dt_1 e^{-2\alpha(t_1 - \xi)} \frac{\delta}{\delta\eta(t_1)} \langle R_{t_0}^t [\eta(\tau) + z_1(\tau)\theta(\xi - \tau) + z_2(\tau)\theta(\tau - t_1)] \rangle,$$

где $z_1(t)$, $z_2(t)$ — статистически независимые телеграфные процессы с одинаковой корреляционной функцией $\langle z^2 \rangle e^{-2\alpha|\tau|}$.

Полагая теперь в (10) $\eta(\tau) \equiv 0$, получаем окончательное выражение

$$\langle z(\xi) R_{t_0}^t [z(\tau)] \rangle =$$

$$= \langle z^2 \rangle \int_{t_0}^{\xi} dt_1 e^{-2\alpha(\xi - t_1)} \left\langle \frac{\delta}{\delta z_2(t_1)} R_{t_0}^t [z_1(\tau)\theta(\tau - \xi) + z_2(\tau)\theta(t_1 - \tau + 0)] \right\rangle + \tag{11}$$

$$+ \langle z^2 \rangle \int_{\xi}^{t} dt_1 e^{-2\alpha(t_1 - \xi)} \left\langle \frac{\delta}{\delta z_2(t_1)} R_{t_0}^t [z_1(\tau)\theta(\xi - \tau) + z_2(\tau)\theta(\tau - t_1 + \theta)] \right\rangle.$$

При $\xi = t$ или $\xi = t_0$ формула (11) совпадает с выражениями (2) и представляет собой обобщение формулы Фурутцу — Новикова (1) на случай телеграфного процесса. Отметим, что в (11) пределы интегрирования t_0, t могут принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Отметим также, что если в формуле (8) положить $v(\tau) \equiv v$, то получим

$$\left\langle z(\xi) \exp\left[iv \int_{t_0}^{t} d\tau\, z(\tau)\right]\right\rangle =$$

$$= iv \langle z^2 \rangle [\Phi(t - \xi) F(\xi - t_0) + F(t - \xi) \Phi(\xi - t_0)], \tag{12}$$

где $\Phi(t)$ — характеристическая функция случайного процесса $\int_0^t d\tau z(\tau)$, для которой имеем (см., например, [3])

$$\Phi(t) = \left\langle \exp\left[iv \int_0^t d\tau\, z(\tau)\right]\right\rangle = e^{-\alpha t}\left\{\operatorname{ch}\lambda t + \frac{\alpha}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda t\right\},$$

$$F(t) = \int_0^t d\tau\, e^{-2\alpha(t-\tau)} \Phi(\tau) = \lambda^{-1} e^{-\alpha t} \operatorname{sh}\lambda t, \quad \lambda = (\alpha^2 - v^2 \langle z^2 \rangle)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\left\langle z(\xi) \exp\left\{iv \int_{t_0}^{t} d\tau\, z(\tau)\right\}\right\rangle =$$

$$= \frac{iv \langle z^2 \rangle}{\lambda} e^{-\alpha(t - t_0)} \left[\operatorname{sh}\lambda(t - t_0) + \frac{2\alpha}{\lambda} \operatorname{sh}\lambda(t - \xi) \operatorname{sh}\lambda(\xi - t_0)\right]. \tag{13}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975.
2. Кляцкин В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 4, с. 562.
3. Van Kampen N. G. — Phys. Rep., 1976, 24, № 3, p. 171.

Тихоокеанский океанологический институт ДВНЦ АН СССР

Поступила в редакцию 25 июня 1979 г.

УДК 538.56 : 519.25

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

А. А. Бердников

Определение корреляционной функции диффузионного процесса при известных его локальных характеристиках в общем случае сводится к решению уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова для переходной плотности вероятности

$$Lp(x,\ t\,|\,x_0,\ t_0) = 0,\quad t \geqslant t_0,\quad x \in \Omega,\quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где $L \equiv \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} b(x,\ t) - \dfrac{\partial}{\partial x} a(x,\ t) - \dfrac{\partial}{\partial t}$, Ω — область существования траекторий процесса $x(t)$, определяемая условиями задачи. Переходная плотность вероятности должна удовлетворять начальному условию

$$\lim_{t\to t_0} p(x,\ t\,|\,x_0,\ t_0) = \delta\,(x - x_0) \tag{2}$$

и граничному условию

$$p(x,\ t\,|\,x_0,\ t_0) = 0,\quad x \in \Gamma\,\Omega, \tag{3}$$

где $\Gamma\,\Omega$ — граница области Ω.

Аналитическое решение (1) удается получить лишь для ограниченного набора локальных характеристик [1]. В [2] найден класс таких решений, для которого ограничения имеют вид дифференциального уравнения, связывающего локальные характеристики. Для решения (1) широко используются также приближенные методы [1, 3, 4].

В настоящем сообщении излагается метод приближенного решения (1), позволяющий получить простую вычислительную процедуру определения корреляционной функции. Процедура в общем случае рассчитана на использование ЭВМ.

Итерационный процесс решения (1) в [4] задается интегральной формой

$$p_{n+1}(x,\ t\,|\,x_0,\ t_0) = p_0(x,\ t\,|\,x_0,\ t_0) + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\Omega} dy\, p_n(x,\ t\,|\,y,\ \tau)\ Lp_0(y,\ \tau\,|\,x_0,\ t_0), \tag{4}$$

где $p_0(x,\ t\,|\,x_0,\ t_0)$ — произвольное начальное приближение, удовлетворяющее условиям (2), (3).

Будем в качестве начального приближения использовать функцию, которая, кроме условий (2), (3), удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x} a(x,\ t)\, p_0(x,\ t\,|\,x_0,\ t_0) - \frac{\partial}{\partial t}\, p_0(x,\ t\,|\,x_0,\ t_0) = 0. \tag{5}$$

Ограничимся в дальнейшем задачами, для которых коэффициент сноса

$$a(x,\ t) = a(x)\, a_1(t). \tag{6}$$

Тогда решением (5) будет дельта-функция

$$p_0(x,\ t\,|\,x_0,\ t_0) = \delta\{\,x - F^{-1}[F(x_0) + F_1(t,\ t_0)]\,\},$$