откуда

$$\frac{d^2 x_j}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d x_j}{d\tau}\right) = -A^2 \left(n^4 \frac{d^2 x_j}{d\theta^2} + n^2 \frac{d n^2}{d\theta} \frac{d x_j}{d\theta}\right).$$

Поэтому (7) преобразуется в

$$\frac{d^2 x_j}{d\theta^2} + 2\frac{d}{d\theta}(\ln n)\frac{d x_j}{d\theta} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\ln n)\left[\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{d x_\nu}{d\theta}\right)^2\right] = 0. \qquad (10)$$

Но (10) точно так же является дифференциальным выражением принципа (2), как (7) и (8), — принципа (4), в чем нетрудно убедиться, записав (6) для квадратичной формы $(d\theta)^2 = n^2\left[\sum_{\nu=1}^{3}(d x_\nu)^2\right]$ аналогично тому, что выше было сделано для формы (5).

Таким образом из (4) мы получили доказательство (2) и (3). Обратив его, можно получить также (4) из (2) и (3), что и свидетельствует об эквивалентности данных принципов.

В общем случае (4) определяет экстремаль в четырехмерном комплексном пространстве x_k. В этой связи напомним про комплексные пространственно-временные лучи, вводящиеся как характеристики уравнения эйконала с $n = n(x, \omega)$ [2–4], и про имеющиеся [5] четырехмерные обобщения (2). В отличие от них здесь переход в четырехмерное пространство осуществлен путем изменения самой метрики экстремалей, что позволило найти вариационный принцип в простой форме (4), выражающийся в привычных координатах теории относительности. Эти свойства (4) делают его перспективным для дальнейшего применения

Заметим, что, фактически, соотношение (4) уже неявно использовалось в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, изд. Наука, М., 1964.
2. P. S. Epstein, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S, **16**, 37 (1930).
3. M. Kline, W. I. Key, Electromagnetic theory and geometrical optics, N Y., 1965.
4. K. A. Connor, L. B. Felsen, Proc. IEEE, **62**, 1586 (1974).
5. Д. Синг, Классическая динамика, Физматгиз, М, 1963
6. В. И. Погорелов, Изв вузов — Радиофизика, **20**, № 12, 1887 (1977).

Поступила в редакцию
11 декабря 1979 г.

УДК 517.9

О СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ

А. С. Пиковский

Как известно, во многих многомерных нелинейных физических системах могут наблюдаться стохастические автоколебания, математическим образом которых является странный аттрактор [1]. Несмотря на внешнее разнообразие странных аттракторов, большую их часть можно достаточно хорошо описать с помощью простой универсальной модели — одномерного отображения $x_{i+1} = g(x_i, \lambda)$, зависящего от одного параметра λ. Это связано с действием диссипации, которая приводит к сжатию фазового пространства. Таким отображением описывается, в частности, динамика автогенератора с запаздывающей обратной связью [2], эволюция биологических популяций [3] и т. д Поскольку для широкого класса отображений основные свойства стохастичности практически не зависят от конкретного вида функции $g(x, \lambda)$ [3, 4], мы в дальнейшем для наглядности будем говорить об отображении*

---

* Приводимые ниже результаты справедливы и в общем случае.

$$x_{i+1} = f(x_i, \lambda) = \lambda\ (1 - 2x^2), \quad \lambda < 1. \tag{1}$$

В этой системе переход к стохастичности происходит при $\lambda_{кр} = 0{,}837 \ldots$ Возникновению хаоса предшествует бесконечное число бифуркационных точек $\tilde{\lambda}_n$, при которых устойчивый цикл периода 2^n сменяется устойчивым циклом периода 2^{n+1}. Эта иерархия бифуркаций удвоения периода подчиняется обнаруженному недавно Фейгенбаумом [4] закону подобия $\lambda_{кр} - \tilde{\lambda}_n \sim \delta^{-n}$, где $\delta = 4{,}669 \ldots$ — универсальная константа, не зависящая от конкретного вида функции $g(x, \lambda)$. При $\lambda > \lambda_{кр}$ в системе (1) наблюдаются, как правило, стохастические колебания, свойства которых определяются параметром λ. В данной работе мы покажем, что некоторые из этих свойств также подчиняются универсальному закону подобия.

Содержательной характеристикой стохастичности динамической системы является топологическая энтропия h, которая определяет степень разнообразия траекторий в фазовом пространстве [1] и, в частности, число циклов: $h = \lim\limits_{m\to\infty} (\log K_m/m)$, где K_m — число циклов периода m. При $\lambda < \lambda_{кр}$ $h = 0$ (число циклов конечно), а при $\lambda > \lambda_{кр}$ $h > 0$. Проводя аналогию между переходом к стохастичности и фазовым переходом, можно назвать h «параметром беспорядка». Считая $h(\lambda)$ непрерывной функцией, определим зависимость $h(\lambda)$ при λ, стремящемся к $\lambda_{кр}$ сверху, используя закон подобия.

При $\lambda_0 = 1$ отображение $f(x, 1) = 1 - 2x^2$ переводит две точки отрезка (—1, 1) в одну; следовательно, $K_m = 2^m$ и $h(1) = \log 2$. Перейдем теперь к отображению $f^2(x, 1)$, которое имеет два горба и посередине впадину. Если уменьшать λ, то при $\lambda_1 = 0{,}8785 \ldots$ $f^2(x, \lambda_1)$ на отрезке $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ переводит две точки в одну и поэтому эквивалентно отображению $f(x, 1)$, так что $K_m \sim 2^{m/2}$ и $h(\lambda_1) = 2^{-1}\log 2$. Перейдем далее к отображению $f^4(x, \lambda_1)$. На участке $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ оно имеет две впадины и горб, т. е. аналогично $f^2(x, 1)$ на участке (—1, 1). Поэтому существует точка $\lambda_2 = 0{,}8456 \ldots$, в которой отображение $f^4(x, \lambda_2)$ переводит две точки отрезка $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ в одну и $h(\lambda_2) = 2^{-2}\log 2$. Повторяя эти рассуждения, получаем последовательность $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots$, такую, что $\lambda_n \to \lambda_{кр}$ и $h(\lambda_n) = 2^{-n}\log 2$. Аналогично тому, как это сделано в [4], можно показать, что $\lambda_n - \lambda_{кр} \sim \delta^{-n}$, отсюда сразу получаем $h(\lambda) \sim (\lambda - \lambda_{кр})^{\gamma}$, где критический индекс γ равен $\gamma = \log 2/\log \delta = 0{,}449 \ldots$

В том случае, когда отображение (1) не имеет устойчивых циклов, энтропия h равна так называемой ляпуновской характеристической величине ρ — средней скорости разбегания близких траекторий. В частности, $h = \rho$ при описанных выше значениях параметра $\lambda = \lambda_n$. Однако $\rho(\lambda)$ не является непрерывной функцией, поскольку на открытом всюду плотном множестве значений λ есть устойчивый цикл и близкие траектории не расходятся. Проведенные нами численные расчеты показали, что эти устойчивые циклы из-за неизбежных шумов, как правило, не проявляются, а зависимость $\rho(\lambda)$ имеет вид $\rho \sim (\lambda - \lambda_{кр})^{0{,}44}$.

Заметим, что Хаберман и Рудник [5], используя закон подобия [4], показали, что $\rho \sim (\lambda - \lambda_{кр})^{\gamma}$. Однако их рассуждения основаны на предположении, что отображение (1) имеет инвариантное непрерывное распределение вероятностей, а это выполняется только для дискретного набора значений параметра λ, в остальных случаях надо учитывать шумы.

Таким образом, в данной работе показано, что установленный Фейгенбаумом для предтурбулентной области (λ стремится к $\lambda_{кр}$ снизу) закон подобия справедлив и за порогом возникновения стохастичности. Это позволило вычислить критический индекс зависимости энтропии системы — «параметра беспорядка» — от надкритичности.

Автор выражает признательность М. И. Рабиновичу за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Рабинович, УФН, 125, № 1, 123 (1978).
2. В. Я. Кислов, Н. Н. Залогин, Е. А. Мясин, Радиотехника и электроника, 24, № 6, 1118 (1979).
3. R. M. May, Nature, 261, № 5560, 459 (1976).
4. M. J. Feigenbaum, J. Stat. Phys., 19, № 1, 25 (1978).
5. B. A. Huberman, J. Rudnick, Preprint, 1980.

Институт прикладной физики АН СССР

Поступила в редакцию 4 июня 1980 г.