на глубину δ_1, соответствующую частоте $\omega - \Omega$. При $\omega - \Omega \ll \omega$, когда $\delta_1 \gg \delta_0$, это слагаемое принимает вид

$$\tilde{E}(z, t) = E_0 \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\Omega} - 1\right) \exp\left(-\frac{z}{\delta_1}\right) \cos\left(\frac{z}{\delta_1} - \omega t\right). \tag{7}$$

Отношение амплитуды поля $\tilde{E}(z, t)$ к амплитуде поля на той же глубине z в отсутствие модуляции проводимости $\bar{E}$ можно представить в виде

$$\frac{\tilde{E}}{\bar{E}} = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \frac{F(\xi_1)}{F(\xi_0)}, \tag{8}$$

где

$$F(\xi) = \xi^2 \exp(-\xi), \quad \xi_{0,1} = z/\delta_{0,1}.$$

При

$$z > \frac{2\delta_0 \delta_1}{\delta_1 - \delta_0} \ln\left(\frac{2}{\gamma} \frac{\delta_1}{\delta_0}\right) \approx 2\delta_0 \ln\left(\frac{2\delta_1}{\gamma \delta_0}\right) \tag{9}$$

отношение (8) становится больше единицы, т. е. глубоко проникающая составляющая, обусловленная модуляцией проводимости, преобладает, несмотря на наличие в (7) малого параметра $\gamma^2(\omega/\Omega - 1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.

Поступила в редакцию
11 ноября 1979 г.

УДК 517

ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ АНАЛОГ ПРИНЦИПА ФЕРМА

В. И. Погорелов

Геометрооптическое (лучевое) приближение для решения скалярного волнового уравнения

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varphi - \frac{n^2(x, \omega)}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = \rho(x) e^{i\omega t} \tag{1}$$

основано, как известно, на принципе Ферма:

$$\delta \int_{x'}^{x} n \, d\sigma = 0, \tag{2}$$

использующем вариацию пути $\sigma(x', x)$ между точкой излучения x' и текущей точкой x, где элемент пути $d\sigma = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} (d x_j)^2}$. Уравнение (2) определяет те траектории в трехмерном пространстве x_1, x_2, x_3, с помощью которых по $\rho(x') \exp(i\omega t')$ строится данное приближение для $\varphi(x, t)$, причем

$$t - t' = \int_{x'}^{x} \frac{n \, d\sigma}{C}. \tag{3}$$

Покажем, что принцип Ферма допускает и другую формулировку, эквивалентную этой, имеющую универсальный четырехмерный характер в комплексном пространстве переменных $x_1, x_2, x_3, x_4 = ict$ и приводящую как к (2), так и к (3):

$$\delta \int_{(x',t')}^{(x,t)} dS = 0, \tag{4}$$

где

$$dS = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} (dx_j)^2 + \frac{(dx_4)^2}{n^2}}.$$

Действительно, (4) есть частный случай определения экстремали (геодезической) в псевдоримановой метрике

$$(dS)^2 = \sum_{j=1}^{4} g_{j\nu}\, dx_j\, dx_\nu \tag{5}$$

для $g_{j\nu} = 0$ при $j \neq \nu$, $g_{jj} = 1$ при $j < 4$, $g_{44} = 1/n^2$. Но экстремали такого типа [1] подчиняются уравнениям

$$\frac{d^2 x_j}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \sum_{k,\mu,\nu}^{4} g^{jk} \left(\frac{\partial g_{k\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{k\nu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_k} \right) \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx_\nu}{d\tau} = 0, \tag{6}$$

где τ — так называемый канонический параметр на экстремали, пропорциональный $S = \int_{x'}^{x} dS$, а g^{jk} вводятся системой уравнений $\sum g^{jk} g_{ki} = \delta^j_i$ и здесь равны: $g^{jk} = 0$ при $j \neq k$, $g^{jj} = 1$ при $j < 4$, $g^{44} = n^2(x)$. Подставляя данные g_{ki} и g^{jk} в (6), находим

$$\frac{d^2 x_\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{n^3} \frac{\partial n}{\partial x_\nu} \left(\frac{dx_4}{d\tau} \right)^2 = 0 \qquad (\nu < 4); \tag{7}$$

$$\frac{d^2 x_4}{d\tau^2} - 2 \frac{d(\ln n)}{d\tau} \frac{dx_4}{d\tau} = 0. \tag{8}$$

Из (8) следует

$$\frac{1}{n^2} \frac{dx_4}{d\tau} = \mathrm{const} = A \tag{9}$$

В (6)—(8) геодезическая кривая выражается с помощью параметра τ в виде зависимостей $x_j = x_j(\tau)$. Приращению $d\tau$ в каждой точке τ соответствуют $dx_j = \frac{dx_j(\tau)}{d\tau} d\tau$, на основе которых можно вводить на экстремали и другие параметры, например, ее четырехмерную длину $S = \int dS = \int \sqrt{\sum_{i,j}^{4} g_{ij} \frac{dx_i}{d\tau} \frac{dx_j}{d\tau}}\, d\tau = \mathrm{const}\ \tau$ [1], ее трехмерную длину $\sigma = \int d\sigma = \int \sqrt{\sum_{i}^{3} (dx_i)^2}$ и эйконал $\theta = \int d\theta = \int n\, d\sigma$.

Если теперь мы будем рассматривать только изотропные экстремали (вдоль которых везде $dS = 0$, но $d\tau \neq 0$ [1]), то для них имеем, деля (5) на $(d\tau)^2$,

$$\left(\frac{dS}{d\tau} \right)^2 = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{dx_j}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{dx_4}{d\tau} \right)^2 = 0,$$

откуда следует $dx_4 = i\, d\theta$ или $dt = \frac{d\theta}{C} = \frac{n\, d\sigma}{C}$, т. е. (3). Сопоставляя (9) и (3), находим $\frac{d\theta}{d\tau} = -iAn^2$.

Данное соотношение позволяет переписать (7) с помощью параметра θ вместо τ. Действительно,

$$\frac{dx_j}{d\tau} = \frac{dx_j}{d\theta} \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{dx_j}{d\theta} (-iAn^2),$$

откуда

$$\frac{d^2 x_j}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d x_j}{d\tau}\right) = -A^2\left(n^4 \frac{d^2 x_j}{d\theta^2} + n^2 \frac{d n^2}{d\theta}\frac{d x_j}{d\theta}\right).$$

Поэтому (7) преобразуется в

$$\frac{d^2 x_j}{d\theta^2} + 2\frac{d}{d\theta}(\ln n)\frac{d x_j}{d\theta} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\ln n)\left[\sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{d x_\nu}{d\theta}\right)^2\right] = 0. \qquad (10)$$

Но (10) точно так же является дифференциальным выражением принципа (2), как (7) и (8), —принципа (4), в чем нетрудно убедиться, записав (6) для квадратичной формы $(d\theta)^2 = n^2\left[\sum_{\nu=1}^{3}(d x_\nu)^2\right]$ аналогично тому, что выше было сделано для формы (5).

Таким образом из (4) мы получили доказательство (2) и (3). Обратив его, можно получить также (4) из (2) и (3), что и свидетельствует об эквивалентности данных принципов.

В общем случае (4) определяет экстремаль в четырехмерном комплексном пространстве x_k. В этой связи напомним про комплексные пространственно-временные лучи, вводящиеся как характеристики уравнения эйконала с $n = n(x, \omega)$ [2–4], и про имеющиеся [5] четырехмерные обобщения (2). В отличие от них здесь переход в четырехмерное пространство осуществлен путем изменения самой метрики экстремалей, что позволило найти вариационный принцип в простой форме (4), выражающийся в привычных координатах теории относительности. Эти свойства (4) делают его перспективным для дальнейшего применения

Заметим, что, фактически, соотношение (4) уже неявно использовалось в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, изд. Наука, М., 1964.
2. P. S. Epstein, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S, **16**, 37 (1930).
3. M. Kline, W. I. Key, Electromagnetic theory and geometrical optics, N Y., 1965.
4. K. A. Connor, L. B. Felsen, Proc. IEEE, **62**, 1586 (1974).
5. Д. Синг, Классическая динамика, Физматгиз, М, 1963
6. В. И. Погорелов, Изв вузов — Радиофизика, **20**, № 12, 1887 (1977).

Поступила в редакцию
11 декабря 1979 г.

УДК 517.9

О СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАНИЙ

А. С. Пиковский

Как известно, во многих многомерных нелинейных физических системах могут наблюдаться стохастические автоколебания, математическим образом которых является странный аттрактор [1]. Несмотря на внешнее разнообразие странных аттракторов, большую их часть можно достаточно хорошо описать с помощью простой универсальной модели — одномерного отображения $x_{i+1} = g(x_i, \lambda)$, зависящего от одного параметра λ. Это связано с действием диссипации, которая приводит к сжатию фазового пространства. Таким отображением описывается, в частности, динамика автогенератора с запаздывающей обратной связью [2], эволюция биологических популяций [3] и т. д Поскольку для широкого класса отображений основные свойства стохастичности практически не зависят от конкретного вида функции $g(x, \lambda)$ [3, 4], мы в дальнейшем для наглядности будем говорить об отображении*

* Приводимые ниже результаты справедливы и в общем случае.