

УДК 621.372.822

## РАСЧЕТ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ В ОБЛАСТИ МАЛЫХ ЗАМЕДЛЕНИЙ

А. Е. Береза

Для расчета прямоугольных анизотропных диэлектрических волноводов (ПАДВ) применен вариационный метод, использующий в качестве начального приближения простое распределение поля ПАДВ, найденное методикой Маркатили. Диэлектрическая проницаемость прямоугольного стержня описывается диагональным однократно вырожденным тензором  $\epsilon$ . Показано, что при использовании вариационного метода получается удовлетворительная точность расчета ПАДВ в области малых замедлений, где приближение Маркатили неприменимо.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

При конструировании функциональных устройств на основе диэлектрических волноводов (ДВ) весьма перспективным является применение анизотропных материалов [1, 2] и материалов с управляемыми значениями  $\epsilon$  либо  $\mu$  [3].

Однако теоретический анализ анизотропных открытых волноводных систем ограничивается, в основном, цилиндрическими либо двумерными структурами [4]. Известно несколько работ [5, 6], где проведен расчет прямоугольных анизотропных диэлектрических волноводов (ПАДВ) с диагональным видом тензора диэлектрической проницаемости, причем точность расчета не превышает точности метода Маркатили (приближение плоского волновода) [7].

Сравнение с результатами более точных численных методов расчета изотропных ПДВ [8] показывает, что приближение плоского волновода является очень грубым для волноводов с сечением, близким к симметричному ( $a/b \approx 1$ ), а также в области малых замедлений ( $k_z/k_0 \approx 1$ ). Ясно, что эти недостатки методики Маркатили имеют место и в случае применения ее к расчету анизотропных ПДВ.

Здесь к расчету ПАДВ, проницаемость которых выражена диагональным однократно вырожденным тензором  $\epsilon$ , применен вариационный метод, предложенный первоначально в [8] для определения с большой точностью постоянной распространения связанных изотропных ПДВ.

Применение вариационного метода [8] с использованием аппроксимирующих полей, полученных в приближении Маркатили [6], позволяет повысить точность и провести расчет ПАДВ в области малых замедлений, где методика Маркатили неприменима.

### 2. ВИД ТЕНЗОРА $\epsilon$ И ГЕОМЕТРИЯ ЗАДАЧИ

Согласно [6] поле в прямоугольном диэлектрическом стержне с проницаемостью  $\epsilon$  можно представить в виде ортогонально поляризованных волн  $E_{mn}^x$  и  $E_{mn}^y$  в случае, если  $\epsilon$  — тензор диагонального вида и, кроме того, два из трех ненулевых компонентов равны, т. е.

$\epsilon_{xx} = \epsilon_{zz}$ , либо  $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz}$ , либо  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy}$ . Эти случаи соответствуют распространению поля в одноосных кристаллах при различной ориентации оптической оси кристалла относительно направления распространения.

Ограничимся здесь рассмотрением ПАДВ с  $\epsilon$  вида

$$\overset{\leftrightarrow}{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Координатная система (рис. 1) строится аналогично тому, как это сделано в [8]. Предполагая структуру симметричной, рассмотрим только один, положительный квадрант сечения рис. 1, учитывая в  $x=0$  и в  $y=0$  наличие электрической либо магнитной стенки. Линиями  $y = \text{const}$  поперечное сечение разбивается на несколько областей.

Если отличным от  $\epsilon$  является компонент  $\epsilon_{yy}$  тензора (1), то для разбиения поперечного сечения на области следует использовать линии  $x = \text{const}$ . Области I и III — однородные, в области II диэлектрическая проницаемость — функция координаты  $x$ , причем в заштрихованном участке она выражается  $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$  вида (1).

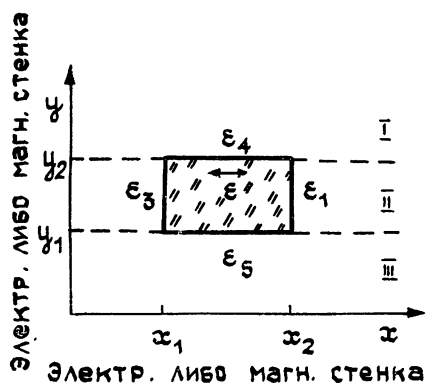


Рис. 1.

### 3. ВАРИАЦИОННОЕ ВЫРАЖЕНИЕ

В [8] для нахождения постоянной распространения изотропных ПДВ используется вариационный принцип в  $E$ -формулировке, стационарность которого доказана в [9] для всех волн дискретного спектра открытых систем:

$$\iint_{(S)} \left\{ [k_z^2 - k_0^2 \epsilon(i)] (|E_x|^2 + |E_y|^2) + \left| \frac{\partial E_z}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial E_z}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right|^2 - k_0^2 \epsilon(i) |E_z|^2 \right\} dS = 0, \quad (2)$$

где  $i$  — номер области рассматриваемого сечения.

Равенство (2) является скалярной формой вариационного выражения и после вычисления интегралов обращается в алгебраическое уравнение относительно постоянной распространения  $k_z$ .

### 4. АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛЯ

Все типы волн рассматриваемой системы могут быть получены с помощью электрического и магнитного векторных потенциалов, направленных вдоль  $x$  (если рассматриваемое сечение разбито на области линиями  $x = \text{const}$ , то для описания поля следует выбрать векторные потенциалы, направленные вдоль  $y$ ) [8]:

$$E = -\overset{\sim}{\nabla} \frac{1}{\epsilon_1(x)} \nabla \times \nabla \times \Pi_E - j\omega\mu_0 \nabla \times \Pi_H,$$

$$\mathbf{H} = j\omega \varepsilon_0 \nabla \times \Pi_E + \nabla \times \nabla \times \Pi_H, \quad (3)$$

$$\Pi_{E, H} = \varphi_{e, h}(x, y) \mathbf{e}_x \exp [j(\omega t - k_z z)],$$

где  $\mathbf{e}_x$  — орт в направлении  $x$ .

Скалярные потенциалы  $\varphi_{e, h}$  удовлетворяют волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial y^2} + [\varepsilon_i(x) k_0^2 - k_z^2] \varphi_h = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_i(x)} \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial y^2} + (\varepsilon_{xx} k_0^2 - k_z^2) \varphi_e - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} \frac{1}{\varepsilon_{xx}} \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} = 0.$$

Для областей, где диэлектрическая проницаемость — скалярная величина,  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_i(x)$ .

Так как каждая из подобластей поперечного сечения (рис. 1) бесконечна в направлении  $x$ , а поля (3) — функции, непрерывные от  $x$ , волновые потенциалы можно преобразовать к интегралам Фурье [8]:

$$\Phi_{E, H}(k_x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{e, h}(x, y) \exp(-jk_x x) dx. \quad (5)$$

Из (4) находим, что в области II  $\Phi_{E, H}$  удовлетворяет уравнениям

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \gamma_1^2 \right) \Phi_H = -k_0^2 \int_{-x_2}^{x_2} [\varepsilon_i(x) - \varepsilon_1] \varphi_h(x, y) \exp(-jk_x x) \times \\ \times dx = S_H(k_x, y), \quad (6)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \gamma_x^2 \right) \Phi_E = -k_0^2 \int_{-x_2}^{x_2} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_1) \varphi_e(x, y) \exp(-jk_x x) dx + \\ + \sum_{k=-2}^2 d \varepsilon_{xx}(x_k) \left[ \frac{1}{\varepsilon_{xx}} \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} \right]_{x=x_k} \exp(-jk_x x) = S_F(k_x, y),$$

где

$$d \varepsilon_{xx}(x_k) = \varepsilon_{xx}(x_k + 0) - \varepsilon_{xx}(x_k - 0), \\ \gamma_1^2 = k_z^2 + k_x^2 - \varepsilon_1 k_0^2, \quad (6a)$$

$$\gamma_x^2 = k_z^2 + \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_i(x)} k_x^2 - \varepsilon_1 k_0^2,$$

как и в (4), в областях со скалярной проницаемостью  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_i(x)$ .

Для областей I и III, где диэлектрическая проницаемость постоянна, уравнения (4) преобразуются к виду [8]

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \gamma_{4,5}^2 \right) \Phi_{E, H} = 0, \quad (7)$$

где

$$\gamma_{4,5}^2 = k_z^2 + k_x^2 - \varepsilon_{4,5} k_0^2.$$

Вид решений  $\Phi_{E, H}$  однородных дифференциальных уравнений (7) можно записать аналогично [8], предполагая экспоненциальную зависимость в области I и используя гиперболические функции  $\text{Sh}(\gamma_5 y)$ ,  $\text{Ch}(\gamma_5 y)$  для описания поля в области III.

Решения уравнений (6) можно представить суперпозицией общего решения  $\Phi_{E, H}$  однородного уравнения и частного решения  $\Phi_{E, H, r}$  неоднородного уравнения.

При определении  $S_E(k_x, y)$  и  $S_H(k_x, y)$  и частных решений  $\Phi_{E, r}$  и  $\Phi_{H, r}$  в (6) используем приближенное поле, определенное ранее [6] для ПАДВ с  $\vec{\epsilon}$  вида (1). Ограничиваясь волнами  $E_{mn}^x$ , для которых

$$\begin{aligned} \varphi_n &= 0, \\ \varphi_e &= \cos \tilde{k}_x (x - x_0) \cos \tilde{k}_y (y - y_0), \\ \tilde{k}_z^2 &= \epsilon_{xx} k_0^2 - \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon} \tilde{k}_x^2 - \tilde{k}_y^2, \end{aligned} \quad (8)$$

получим правые части

$$\begin{aligned} S_E(\tilde{k}_x, y) &= S_E(k_x) \cos \tilde{k}_y (y - y_0), \\ S_H(\tilde{k}_x, y) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

и частные решения в (6):

$$\begin{aligned} \Phi_{E, r} &= - \frac{S_E(\tilde{k}_x)}{\tilde{k}_y^2 - \gamma_x^2} \cos \tilde{k}_y (y - y_0), \\ \Phi_{H, r} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнениях (8)–(10)  $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z$  — приближенные значения волновых чисел ПАДВ, полученные применением методики Маркатили.

Неизвестные амплитуды в выражениях для  $\Phi_{E, H}$  в областях I—III находятся из условий непрерывности фурье-преобразований касательных составляющих полей  $E_x, E_z, H_x, H_z$  на границах  $y = y_1, y_2$ .

## 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ВАРИАЦИОННОМ УРАВНЕНИИ

Ввиду симметричности системы (рис. 1) интегрирование в (2) проводим в положительном квадранте сечения. Выражение (2) преобразуем к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ [k_z^2 - \epsilon(i) k_0^2] (|E_x|^2 + |E_y|^2) + \left| \frac{\partial E_z}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial E_z}{\partial y} \right|^2 + \right. \\ & \left. + \left| \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right|^2 - \epsilon(i) k_0^2 |E_z|^2 \right\} dx dy + \int_{y_1}^{y_2} \int_0^\infty \{ k_0^2 (\epsilon_1 - \epsilon_{xx}) \times \\ & \times |E_x|^2 + k_0^2 [\epsilon_1 - \epsilon_i(x)] (|E_y|^2 + |E_z|^2) \} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Интегрирование по  $dx$  в первом слагаемом (11) целесообразно заметить, используя теорему Парсеваля, интегрированием по  $dk_x$  фурье-преобразований полей; этот шаг избавит от необходимости обратного преобразования поля при определении  $k_z$  из вариационного выражения. Обозначая этот интеграл  $I_4$ , имеем

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ [k_z^2 - \epsilon(i) k_0^2] (|\tilde{E}_x|^2 + |\tilde{E}_y|^2) + \left| \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial x} \right|^2 + \right. \quad (12)$$

$$+ \left| \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} \right|^2 - \varepsilon(i) k_0^2 |\tilde{E}_z|^2 \} dk_x dy,$$

где  $\varepsilon(i)$  — постоянные значения проницаемости в областях I и III, волной наверху обозначены фурье-преобразования полей, определяемые из (6), (5) и (3).

Второе слагаемое в (11) — интеграл в области II с изменяющейся проницаемостью  $\varepsilon_i(x)$ :

$$I_3 = \int_{y_1}^{y_2} \int_0^\infty \{ k_0^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_{xx}) |E_x|^2 + k_0^2 [\varepsilon_1 - \varepsilon_i(x)] (|E_y|^2 + |E_z|^2) \} dx dy. \quad (13)$$

Здесь интегрируется приближенное поле, задаваемое потенциалом  $\varphi_e$  (8).  $I_3$  определяется аналитически, в  $I_4$  интегрирование по  $dy$  осуществляется аналитически, интегрирование по  $dk_x$  — численно. После вычисления всех интегралов (11) превращается в алгебраическое уравнение относительно искомой постоянной распространения:

$$I_4(k_z) + I_3(k_z) = 0. \quad (14)$$

## 6. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ИЗМЕРЕНИЯ ПРОДОЛЬНОЙ ПОСТОЯННОЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ В ПАДВ

Изложенная выше методика была использована для вычисления постоянной распространения одиночного волновода с проницаемостью  $\varepsilon$  вида (1), окруженного однородной средой с  $\varepsilon_1 = 1$ . В случае одиночного волновода определение неизвестных амплитуд из граничных условий и вычисление интегралов в вариационном выражении существенно упрощаются. Расчет был проведен на ЭВМ М-222. Правильность алгоритма проверялась сравнением с результатами анализа прямоугольного диэлектрического волновода с параметрами  $n_x = 2,222$ ,  $n_y = n_z = 2,3129$  и  $b/a = 5$ , проведенного в [10] методом конечных элементов. Максимальное различие значений  $k_z/k_0$  (сравнивались точки на участке  $10 \leq ak_0 \leq 20$ ) составило 0,06%. Точность метода конечных элементов оценена в [10] сравнением с результатами аналитического расчета плоских волноводов. Для волн типов ТЕ и ТМ различие составило 0,034—0,041% и 0,036—0,062% соответственно.

На рис. 2 приведены дисперсионные характеристики волн типа  $E_{II}^x$  в изотропных ПДВ с проницаемостью  $\varepsilon = 2,74$  и в анизотропных волноводах с  $\varepsilon_{xx} = 2,54$  и  $\varepsilon = 2,74$  того же поперечного сечения. Сплошные и пунктирные кривые получены вариационным методом для изотропных и анизотропных ПДВ соответственно, штрихпунктирные — методом Маркатили.

Приведенный пример и аналогичные расчеты ПАДВ с различными параметрами показывают, что общий ход дисперсионных кривых анизотропных волноводов с  $\varepsilon$  вида (1) такой же, как и для изотропных, однако максимальные значения постоянной распространения волн  $E_{mn}^x$  и  $E_{mn}^y$  в анизотропных волноводах не совпадают, а определяются значениями соответствующих компонентов  $\varepsilon$  — для волн  $E_{mn}^x$   $k_{z \max}/k_0 = \sqrt{\varepsilon_{xx}}$ , для  $E_{mn}^y$   $k_{z \max}/k_0 = \sqrt{\varepsilon}$ . В ПАДВ квадратного сечения типы  $E_{mn}^x$  и  $E_{mn}^y$  не вырождены [6].

Для получения этих выводов достаточно применения методики Маркатили, так как результаты приближенного и вариационного расчетов в области больших и средних замедлений мало отличаются, а расход машинного времени на получение одной точки  $k_z(ak_0)$  вариационным методом приблизительно в 10 раз больше, чем методом Маркатили, и составляет 10—15 мин.

Из рис. 2 видно также, что штрихпунктирные линии практически совпадают с линиями, полученными вариационным методом, для замедлений, больших 20%, для замедлений, меньших 10%, они сильно различаются.

Сравнительные расчеты ПАДВ с различной степенью анизотропии и несимметричности сечения показывают, что нижний предел этого интервала опускается с увеличением значения  $\epsilon$  и несимметричности поперечного сечения, а верхний предел увеличивается с увеличением анизотропии  $\Delta\epsilon = |\epsilon_{xx} - \epsilon|$  и приближением сечения к квадратному. Таким образом, при неблагоприятном сочетании различных факторов (квадратная форма сечения, большие значения относительных проницаемостей и анизотропии) результаты вариационного и приближенного методов могут отличаться вплоть до замедлений 50%.

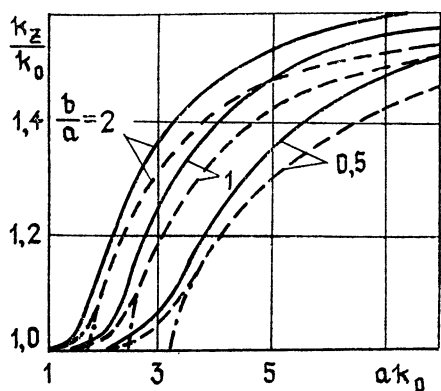


Рис. 2.

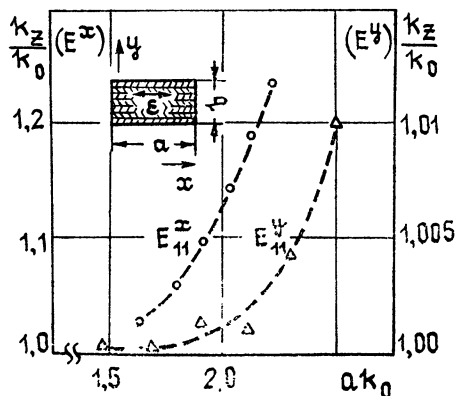


Рис. 3.

На рис. 3 приведены также результаты измерения постоянных распространения волн  $E_{11}^x$  и  $E_{11}^y$  в ПАДВ из искусственного диэлектрика. Искусственный анизотропный диэлектрик представляет собой мелкослоистую структуру, составленную из материалов с различной проницаемостью. Согласно [11] такая структура обладает свойствами одноосного кристалла с оптической осью, перпендикулярной слоям, и проницаемостью, выраженной однократно вырожденным тензором с главными значениями

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} = \epsilon_{22} &= \frac{d_1 \epsilon_1 + d_2 \epsilon_2}{d_1 + d_2} = \epsilon_{\parallel}, \\ \epsilon_{33} &= \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 (d_1 + d_2)}{d_1 \epsilon_2 + d_2 \epsilon_1} = \epsilon_{\perp}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $d_1$  — толщина слоя с проницаемостью  $\epsilon_1$ ,  $d_2$  — толщина слоя с проницаемостью  $\epsilon_2$ .

Для измерения  $k_z/k_0$  диэлектрического волновода был использован резонансный метод, обеспечивающий высокую чистоту типа колебаний и точность определения продольного фазового числа [12],

Продольное распределение поля (порядок резонанса) в открытом резонаторе определялось модифицированным методом малых возмущений [13]. Метод основан на том, что малое поглощающее пробное тело, внесенное в резонатор, изменяет его добротность, почти не влияя на резонансную частоту и распределение поля. Измерения проводились в трехсантиметровом диапазоне частот.

Измерения постоянной распространения в ПАДВ с размерами  $5 \times 10 \times 150$  мм из слоев слюды ( $d_1 = 0,5$  мм) и тефлоновой пленки ( $d_2 = 0,05$  мм), представленные на рис. 3, качественно подтверждают ход дисперсионных кривых, вычисляемых вариационным методом.

Для проведения количественных оценок необходимо точное измерение проницаемости анизотропного диэлектрика волновода либо проницаемости исходных слоев с последующим вычислением  $\epsilon$  из соотношений (15).

Эксперимент показал также несовершенство реальной модели анизотропного диэлектрика, которое проявляется в следующем.

В ПАДВ, выполненных не из однородного анизотропного материала, а из слоев с различной проницаемостью, ухудшаются условия резонанса (появляются паразитные, неустойчивые порядки, особенно в области малых замедлений) в случае, если вектор электрического ВЧ поля распространяющейся волны ориентирован перпендикулярно слоям. Так как этот эффект уменьшается с увеличением несимметричности сечения, можно полагать, что неполное соответствие реальной модели ПАДВ волноводу, выполненному из материала с естественной анизотропией, приводит к нарушению однородности поля, чистоты поляризации и к ошибкам в определении резонансной частоты, не связанным с погрешностью измерительной аппаратуры.

Для расчета ПАДВ с поперечной анизотропией типа одноосного кристалла (1) вполне пригодными являются идеи методов Маркатили [7] и вариационного [8] при незначительном их изменении. Косвенные оценки позволяют заключить, что точность этих методик при расчете ПАДВ указанного типа не хуже, чем при расчете изотропных волноводов.

Даже качественное сравнение с экспериментальными данными показывает, что в области малых замедлений целесообразно применять вариационный метод расчета, а приближение Маркатили использовать для получения подходящей аппроксимации поля в вариационных соотношениях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. Warner, IEEE Trans. MTT, 21, № 12, 769 (1973).
2. К. Кутајама, Н. Кумагаи, IEEE Trans. MTT, 25, № 7, 567 (1977).
3. В. П. Мальцев, Е. И. Нефедов, В. В. Шевченко, Изв. вузов — Радиоэлектроника, 13, № 11, 1381 (1970)
4. А. И. Гончаренко, В. П. Редько, Введение в интегральную оптику, изд. Наука и техника, Минск, 1975
5. R. A. Steinberg, T. G. Giallorenzi, J. Opt. Soc. Am., 67, № 4, 523 (1977).
6. А. Е. Береза, В. П. Канунников, А. А. Юров, в сб. Теория дифракции и распространения волн (VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, краткие тексты докладов), 3, 28 (1977).
7. E. A. J. Marcattili, Bell Syst. Techn. J., 48, № 7, 2071 (1972)
8. R. Pregla, Archiv für Electronic und Übertragungstechnik, 28, № 9, 349 (1974).

9. S. Yamamoto, J. Cojama da, T. Makimoto, J. Appl. Phys., 43, № 12, 5090 (1972).
10. P. Vandembulcke, P. E. Lagasse, Electronics Letters, 12, № 5, 120 (1976).
11. С. М. Рытов, ЖЭТФ, 29, № 5, 605 (1955).
12. В. Ф. Взятыйшев, Г. Д. Рожков, в сб. Доклады НТК МЭИ по итогам НИР за 1968—1969 гг., секция радиотехническая, подсекция линий передачи и волноводных устройств, М., 1969.
13. Р. А. Валитов и др., Техника субмиллиметровых волн, изд. Сов. радио, М., 1969.

Днепропетровский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
31 июля 1978 г.,  
после доработки  
16 июля 1979 г.

## CALCULATION OF RECTANGULAR ANISOTROPIC DIELECTRIC WAVEGUIDES IN THE REGION OF SMALL SLOWING-DOWN

*A. E. Bereza*

To calculate rectangular anisotropic dielectric waveguides (RADW) a variation method is used which employes as an initial approximation a simple distribution of RADW field found by Markatili method. The dielectric permittivity of a rectangular rod is described by the diagonal tensor  $\epsilon$  singly degenerated. It is shown, that using the variation method a satisfactorily accuracy is obtained of RADW calculation in the region of small slowing down where Markatili approximation is not applicable.

---