ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 6 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 538.56 : 519.25

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ РЕЗОНАНСНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

О. В. Музычук

Исследуются общие статистические характеристики броуновского движения резонансной системы с одной степенью свободы, возмущенного широкополосными флуктуациями собственной частоты и затухания. Найдена стационарная плотность вероятности выходного сигнала и его амплитуды. Отмечено, что для обоих вероятностных распределений имеет место степенной закон спадания «крыльев» с показателем степени, обратно пропорциональным эффективной мощности параметрических воздействий. Установлены вероятностные условия параметрического возбуждения системы флуктуациями собственной частоты и затухания, отличные от соответствующих условий среднеквадратичной устойчивости.

1. В значительном большинстве работ, посвященных статистическому описанию динамических систем с флуктуирующими параметрами, рассматриваются лишь простейшие вероятностные характеристики выходной координаты: первые два момента, корреляционная функция. Это обусловлено существенными математическими трудностями решения уравнений Фоккера — Планка в случаях, когда система описывается дифференциальным уравнением старше первого порядка. Поскольку вероятностное распределение выходного сигнала даже линейной стохастической системы не является гауссовым, отыскания указанных характеристик недостаточно для адекватного статистического описания системы.

Настоящая статья вслед за работой [1] посвящена получению общих вероятностных характеристик резонансной стохастической системы с одной степенью свободы

$$y'' + 2h(t)y' + \Omega^2(t)\,y = \Omega^2 x(t), \tag{1}$$

представляющей большой интерес в различных радиофизических задачах. Здесь

$$\Omega^2(t) = \Omega^2 + \alpha(t), \qquad h(t) = h + \beta(t),$$

а $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $x(t)$ полагаем гауссовыми дельта-коррелированными процессами с*

$$\langle \xi \rangle = 0, \qquad \langle \xi(t)\,\xi(t-\tau) \rangle = D_\xi\,\delta(\tau), \qquad \xi = \alpha,\ \beta,\ x.$$

Считаем для простоты все случайные воздействия взаимно некоррелированными. Среднеквадратичные характеристики такой системы хорошо изучены (см., например, [2–7]). В работе [1] «индуктивным» методом получены рекуррентные формулы для стационарных значений моментов выходной координаты системы с добротностью $q \gg 1$. В отсутствие флуктуаций затухания ($\beta(t) \equiv 0$) последние имеют вид

$$\langle y^{2n} \rangle_{(\alpha)} = (2n-1)\,\langle y^2 \rangle_0\,\langle y^{2n-2} \rangle_{(\alpha)} \left(1 - \frac{n+1}{2}\,\mu_\alpha\right)^{-1}, \tag{2a}$$

* Условия применимости аппроксимации реальных случайных воздействий дельта-коррелированными применительно к данной системе обсуждались, например, в [6].

$$\mu_\alpha < 2/(n+1), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а в отсутствие флуктуаций собственной частоты $(\alpha(t) \equiv 0)$

$$\langle y^{2n} \rangle_{(\beta)} = (2n-1)\langle y^2 \rangle_0 \langle y^{2n-2} \rangle_{(\beta)} \left(1 - \frac{3n+1}{4}\mu_\beta\right)^{-1}$$
$$\mu_\beta < 4/(3n+1). \tag{2б}$$

Здесь использованы безразмерные параметры

$$\langle y^2 \rangle_0 = \Omega^2 D_x (4h)^{-1}, \quad \mu_\alpha = D_\alpha (4h\,\Omega^2)^{-1}, \quad \mu_\beta = 2D_\beta\, h^{-1}, \tag{3}$$

представляющие собой дисперсию невозмущенного броуновского движения и эффективные мощности параметрических воздействий. В обоих случаях нечетные моменты равны нулю в силу симметрии вероятностного распределения входного воздействия $x(t)$.

2. Выражения (2) позволяют «восстановить» одномерное вероятностное распределение выходного сигнала $y(t)$, найти которое непосредственно из уравнения Фоккера — Планка не удается. Как показывает анализ, стационарное распределение следует искать в виде

$$W(y) = C\left(1 + k\mu\frac{y^2}{\langle y^2 \rangle_0}\right)^{r-s/\mu}, \tag{4}$$

где k, r, s — некоторые константы, подлежащие определению. В самом деле, такая плотность вероятности имеет расходящиеся высшие моменты, причем с ростом μ моменты с меньшими номерами становятся также неограниченными (см. формулы (2)). Величины r и s легко найти из условий расходимости, например, моментов $\langle y^2 \rangle$ и $\langle y^4 \rangle$ (см. [1]). Константа k определяется с помощью предельного перехода к гауссову распределению невозмущенного броуновского движения*:

$$\lim_{\mu\to 0} W(y) = W_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle y^2 \rangle_0}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\langle y^2 \rangle_0}\right).$$

Таким образом, для системы с флуктуациями собственной частоты приходим к следующему выражению для стационарной плотности вероятности выходного сигнала:

$$W_{(\alpha)}(y) = C_\alpha \left(1 + \frac{\mu_\alpha}{4}\frac{y^2}{\langle y^2 \rangle_0}\right)^{1/2 - 2/\mu_\alpha}, \qquad \mu_\alpha < 2,$$
$$C_\alpha = \sqrt{\frac{\mu_\alpha}{4\langle y^2 \rangle_0}}\, B^{-1}(1/2,\ 2/\mu_\alpha - 1), \tag{5а}$$

где B — бета-функция. Нетрудно убедиться, что распределение (5а) действительно приводит к рекуррентной формуле (2а). Интегрируя это распределение, получим

$$\langle y^{2n} \rangle_{(\alpha)} = \left(\frac{4\langle y^2 \rangle_0}{\mu_\alpha}\right)^n \frac{B(n+1/2,\ 2/\mu_\alpha - n - 1)}{B(1/2,\ 2/\mu_\alpha - 1)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6а}$$

Принимая во внимание, что

---

* При $\mu \to 0$ функция вида (4) превращается в экспоненту как «замечательный предел» $(1+\mu)^{1/\mu} \to e$.

$$B(u,\ v)=\Gamma(u)\Gamma(v)\Gamma^{-1}(u+v),\quad \Gamma(u+1)=u\Gamma(u),$$

приходим к выражению (2а).

Аналогичным образом для осциллятора с флуктуациями затухания на основании (2б) можно получить

$$W_{(\beta)}(y)=C_\beta\left(1+\frac{3\mu_\beta}{8}\,\frac{y^2}{\langle y^2\rangle_0}\right)^{1/6-4/3\,\mu_\beta},\quad \mu_\beta<4,$$

$$C_\beta=\sqrt{\frac{3\mu_\beta}{8\langle y^2\rangle_0}}\,B^{-1}(1/2,\ 4/3\,\mu_\beta-2/3); \tag{5б}$$

$$\langle y^{2n}\rangle_{(\beta)}=\left(\frac{8\langle y^2\rangle_0}{3\mu_\beta}\right)^n\frac{B(n+1/2,\ 4/3\,\mu_\beta-n-2/3)}{B(1/2,\ 4/3\,\mu_\beta-2/3)},$$

$$n=1,\ 2,\ \ldots \tag{6б}$$

Итак, в обоих случаях стационарная плотность вероятности имеет крылья, спадающие по степенному закону, причем показатель степени уменьшается с ростом эффективной мощности параметрических воздействий. Аналогичная ситуация имеет место и для стохастического фильтра 1-го порядка (см., например, [8, 9]), что дает основания считать степенной характер спадания крыльев распределения характерной особенностью линейных стохастических систем с гауссовыми флуктуациями параметров. Именно этим обусловлена расходимость высших моментов выходного сигнала. Отметим, что в отличие от стохастической системы 1-го порядка плотность вероятности (5) существует не при всех значениях μ, а, соответственно, до значений $\mu_\alpha=2$ и $\mu_\beta=4$. (Значения $\mu_\alpha\geqslant 1$ и $\mu\geqslant 1$ соответствуют нарушению среднеквадатичной устойчивости системы.)

3. Как уже отмечалось, формулы (5), (6) не удается получить непосредственно из двумерного уравнения Фоккера — Планка для марковской совокупности $\{y,\ y'\}$. Можно, однако, перейти к амплитуде и фазе колебания и с помощью некоторых упрощений получить вероятностные характеристики амплитуды, а именно они и представляют наибольший практический интерес. Введя обычным образом амплитуду и фазу выходного колебания

$$y=A\sin\Phi,\quad y'=\Omega A\cos\Phi,\quad \Phi=\Omega t+\varphi,$$

из исходного уравнения (1) получим следующую систему:

$$A\varphi'=A(h+\beta(t))\sin 2\Phi+\frac{A}{\Omega}\,\alpha(t)\sin 2\Phi+\Omega\,x(t)\cos\Phi,$$

$$A'=-2A(h+\beta(t))\cos^2\Phi-\frac{A}{2\Omega}\,\alpha(t)\sin^2\Phi-\Omega\,x(t)\sin\Phi.$$

Отсюда стандартным путем (см., например, [5, 6]) можно прийти к замкнутому кинетическому уравнению для среднего значения произвольной функции $\langle\psi(A,\ \varphi)\rangle$, однако оно выглядит весьма громоздко. Для системы с большой добротностью эффективной упрощающей процедурой является усреднение кинетического уравнения по «быстрому» времени $\tau=\Omega^{-1}$ [6, 7]. Отметим, что в [6] эта процедура применялась к подобной системе в отсутствие аддитивного воздействия и флуктуаций затухания. При этом установлено, что эволюция вероятностного распределения происходит по логарифмически нормальному закону. Мы будем интересоваться, в основном, стационарными вероятностными характеристиками амплитуды выходного колебания.

В безразмерных параметрах (3) искомое кинетическое уравнение после усреднения по быстрому времени примет вид

$$\frac{4}{h}\frac{\partial\langle\psi\rangle}{\partial t}+(4-2\mu_\alpha-\mu_\beta)\left\langle A\frac{\partial\psi}{\partial A}\right\rangle-(\mu_\alpha+\mu_\beta)\left\langle\left(A\frac{\partial}{\partial A}\right)^2\psi\right\rangle-$$
$$-\left(3\mu_\alpha+\frac{1}{2}\mu_\beta\right)\left\langle\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right\rangle=2I_0\left(\left\langle\frac{\partial^2\psi}{\partial A^2}\right\rangle+\left\langle\frac{1}{A}\frac{\partial\psi}{\partial A}\right\rangle+\left\langle\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right\rangle\right). \quad (7)$$

Здесь $I_0=\langle A^2\rangle_0=2\langle y^2\rangle_0$ — средняя интенсивность выходного колебания в отсутствие параметрического воздействия. Из уравнения (7) вытекает независимость вероятностных характеристик амплитуды от характеристик фазы. Действительно, считая в (7) функцию ψ зависящей только от амплитуды, получим замкнутое уравнение для $\langle\psi_A\rangle=\langle\psi(A)\rangle$. В частности, положив $\psi_A=A^m$, придем к уравнению релаксации моментов амплитуды*

$$\left(\frac{4}{mh}\frac{d}{dt}+4-(m+2)\mu_\alpha-(m+1)\mu_\beta\right)\langle A^m\rangle=2mI_0\langle A^{m-2}\rangle,$$
$$m=2,\ 3,\ \ldots$$

Отсюда следует, что время релаксации увеличивается с ростом номера и всегда найдется такое значение m_*, что моменты с номерами $m>m_*$ становятся неустойчивыми. Для стационарных значений моментов приходим к рекуррентным формулам, напоминающим (2):

$$\langle A^m\rangle_{(\alpha)}=\frac{m}{2}I_0\langle A^{m-2}\rangle_{(\alpha)}\left(1-\frac{m+2}{4}\mu_\alpha\right)^{-1},$$
$$m=2,\ 3,\ \ldots; \quad (8а)$$

$$\langle A^m\rangle_{(\beta)}=\frac{m}{2}I_0\langle A^{m-2}\rangle_{(\beta)}\left(1-\frac{m+1}{4}\mu_\beta\right)^{-1}. \quad (8б)$$

Заметим, что при наличии только флуктуаций собственной частоты условие ограниченности m-го момента амплитуды в точности совпадает (для четных m) с соответствующим условием для момента выходного сигнала $\langle y^{2n}\rangle$. При наличии флуктуаций потерь точного совпадения нет; в частности, условие среднеквадратичной устойчивости амплитуды имеет вид $\mu_\beta<4/3$, а не $\mu_\beta<1$.

4. Положив в уравнении (7) $\psi(A,\varphi)=\delta(A-A(t))\,\delta(\varphi-\varphi(t))$, где δ — дельта-функция, получим двумерное уравнение Фоккера—Планка, усредненное по быстрому времени. Однако поскольку амплитудные характеристики развязываются, можно сразу записать одномерное уравнение для плотности вероятности амплитуды колебания. Соответствующее уравнение для стационарного распределения $W(A)$

$$((\mu_\alpha+\mu_\beta)A^2+2I_0)\frac{dW}{dA}=(\mu_\alpha-4)AW+2I_0\frac{W}{A}$$

* Среднее значение амплитуды $\langle A\rangle$ отсюда не определяется и может быть получено только интегрированием соответствующей плотности вероятности (см. ниже).

легко решается:

$$W(A)=CA\left(1+\frac{\mu_\alpha+\mu_\beta}{2I_0}A^2\right)^{-(2+\mu_\beta/2)/(\mu_\alpha+\mu_\beta)}. \tag{9}$$

В частности, при $\beta(t)\equiv 0$

$$W_{(\alpha)}(A)=\frac{2-\mu_\alpha}{I_0}A\left(1+\frac{\mu_\alpha}{2I_0}A^2\right)^{-2/\mu_\alpha},\qquad \mu_\alpha<2; \tag{9а}$$

при $\alpha(t)\equiv 0$

$$W_{(\beta)}(A)=\frac{4-\mu_\beta}{2I_0}A\left(1+\frac{\mu_\beta}{2I_0}A^2\right)^{-2/\mu_\beta-1/2},\qquad \mu_\beta<4. \tag{9б}$$

Заметим, что при μ_α, $\mu_\beta\to 0$ формулы (9) переходят в распределение Рэлея невозмущенной амплитуды броуновского движения

$$W_0(A)=2A/I_0\exp(-A^2/I_0).$$

Непосредственным интегрированием теперь нетрудно найти общие выражения для моментов амплитуды

$$\langle A^m\rangle_{(\alpha)}=\frac{2-\mu_\alpha}{2I_0}\left(\frac{2I_0}{\mu_\alpha}\right)^{m/2+1}B(m/2+1,\ 2/\mu_\alpha-m/2-1); \tag{10а}$$

$$\langle A^m\rangle_{(\beta)}=\frac{4-\mu_\beta}{2I_0}\left(\frac{2I_0}{\mu_\beta}\right)^{m/2+1}B(m/2+1,\ 2/\mu_\beta-m/2-1/2), \tag{10б}$$

которые при $m\geqslant 2$ адекватны рекуррентным формулам (8).

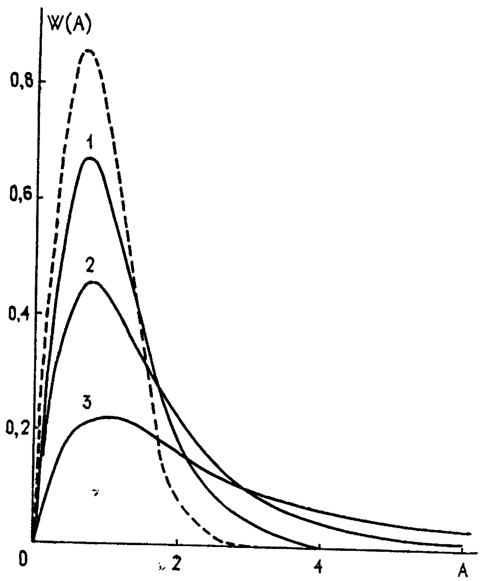

Рис 1.

Зависимость плотности вероятности (9а) от эффективной мощности параметрического воздействия показана на рис. 1. Здесь кривые *1*, *2*, *3* соответствуют значениям $\mu_\alpha=0{,}5$; 1; 1,5; пунктирная кривая — рэлеевское распределение. График построен для значения $I_0=1$.

На основании формул (9) легко получить вероятностное распределение интенсивности выходного колебания $W_I(I) = I^{-1/2}W(\sqrt{I})$. Так, для случая флуктуаций собственной частоты оно имеет вид

$$W_I(I) = \frac{2-\mu_\alpha}{I_0}\left(1+\frac{\mu_\alpha}{2}\frac{I}{I_0}\right)^{-2/\mu_\alpha}, \qquad I \geqslant 0, \qquad \mu_\alpha < 2. \tag{11}$$

5. Известно, что для получения корректного условия параметрического возбуждения системы случайной силой недостаточно только условий моментной устойчивости. (На несовпадение условий моментной и вероятностной устойчивости указывалось еще в работе [10].) Знание плотности вероятности $W(A)$ позволяет оценить величину вероятности превышения амплитудой A некоторого фиксированного значения A_*. Эта величина в большей степени, чем условия моментной устойчивости, характеризует возможность параметрического нарастания колебаний конкретной системы, а не статистического ансамбля в целом.

Взяв $A_* = kA_0$, где $A_0 = \sqrt{I_0}$, получим тем самым вероятность превышения невозмущенной амплитуды в k раз. Для плотности вероятности (9а) последняя имеет вид

$$\mathrm{Prob}(A > kA_0) = \left(1 + k^2\frac{\mu_\alpha}{2}\right)^{1-2/\mu_\alpha}, \qquad \mu_\alpha < 2. \tag{12}$$

Отсюда видно, что при $\mu_\alpha \to 2$ вероятность превышения любого наперед заданного уровня стремится к единице (при $\mu_\alpha \to 0$ $\mathrm{Prob}(A > kA_0) \to \exp(-k^2)$). Таким образом, условием возбуждения резонансной системы (1) широкополосными флуктуациями собственной частоты следует считать превышение значения $\mu_\alpha = 2$. Тот факт, что при этом перестает существовать стационарное распределение (как амплитуды, так и самой выходной координаты), и означает в действительности возбуждение соответствующего параметрического усилителя. Для отыскания же реально существующих стационарных вероятностных характеристик в этом случае необходимо учитывать нелинейные свойства системы [11].

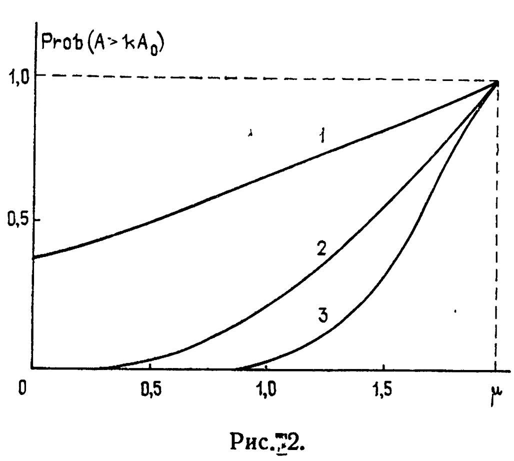

Рис. 2.

Зависимость вероятности превышения (12) от эффективной мощности параметрического воздействия показана на рис. 2. Здесь кривые *1*, *2*, *3* соответствуют значениям $k = 1, e, 10$. Заметим, что при значении $\mu_\alpha = 1$, при котором средняя интенсивность обращается в бесконечность, вероятность значительного роста амплитуды невелика (см. кривые 2, 3). Как следует из формулы (9б), вероятность превышения фиксированного значения в случае системы с флуктуациями потерь имеет вид, подобный (12), но условием параметрического возбуждения здесь является $\mu_\beta \geqslant 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. В. Музычук, Изв. вузов — Радиофизика, **21**, № 4, 534 (1978).
2. Ю. Е. Дьяков, Радиотехника и электроника, **5**, № 5, 863 (1960).
3. T. K. Caughey, J. K. Deines, J. Math. Phys., **41**, № 4, 300 (1962).
4. K. K. Chen, Int J. Control, **16**, № 2, 209 (1972).
5. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, ч. 1, изд. Наука, М., 1976.
6. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М, 1975
7. Ю. Н. Барабаненков, М. И. Калинин, Изв. вузов — Радиофизика, **20**, № 3, 343 (1977).
8. В. С. Пугачев, И. Е. Казаков, Л. Г. Евланов, Основы статистической теории автоматических систем, изд. Машиностроение, М., 1974.
9. А. Н. Малахов, О. В. Музычук, Изв вузов — Радиофизика, **21**, № 1, 71 (1978)
10. A. Rosenbloom, Proc. of Symp. on Information Network, 1954, p. 145.
11. С. Ю. Медведев, О. В. Музычук, Изв. вузов — Радиофизика, **23**, № 6, 701 (1980).

Горьковский инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию 11 июня 1979 г.

PROBABLE CHARACTERISTICS OF RESONANCE STOCHASTIC SYSTEM

O V. Muzychuk

General statistical characteristics of Brownian motion of the resonance system with one degree of freedom excited by wide-band fluctuations of the natural frequency and damping are investigated. The stationary probability density of the output signal and its amplitude have been found. It is noted that the «wings» of the probability distributions have the power law decrease, the power index being inversely proportional to the effective power of the parametric action Probable conditions of the parametric excitation of the system by fluctuations of the natural frequency and damping different from the corresponding conditions of rms stability are stated.