ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 6 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 538.56 : 519.25

О ВЛИЯНИИ НЕЛИНЕЙНОГО ЗАТУХАНИЯ НА ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С. Ю. Медведев, О. В. Музычук

На основе уравнения Фоккера — Планка исследуется влияние нелинейного затухания на вероятностные характеристики стохастических систем, описываемых дифференциальными уравнениями первого и второго порядков. Показано, что наличие нелинейного затухания устраняет параметрическое возбуждение. Установлено, что в случае кубичной нелинейности при определенных соотношениях между интенсивностью шумового параметрического воздействия и величиной нелинейности имеет место «компенсация» этих факторов, в результате чего вероятностное распределение выходной координаты оказывается гауссовым.

Изучение статистических характеристик динамических систем, подверженных воздействию случайных сил, представляет интерес для широкого круга радиофизических проблем. В настоящее время сравнительно хорошо исследованы лишь системы, описываемые линейными стохастическими уравнениями. Анализ нелинейных систем с параметрически действующей случайной силой весьма затруднителен, поскольку соответствующие уравнения Фоккера — Планка для плотности вероятности выходной координаты обычно не решаются аналитическими методами. Известно, что достаточно интенсивные флуктуации параметров могут вызывать возбуждение линейной системы (рост средней энергии и высших моментов выходной координаты). В такой ситуации линейная модель может оказаться физически неадекватной, и, в общем случае, следует учитывать нелинейные свойства системы, в первую очередь — возможность нелинейного затухания.

В настоящей работе на основе уравнений Фоккера — Планка анализируется влияние нелинейного затухания на вероятностные характеристики достаточно простых, но весьма важных для приложений стохастических систем (см., например, [1]), описываемых дифференциальными уравнениями первого и второго порядков.

1. Рассмотрим динамическую систему, описываемую уравнением*

$$\frac{dy}{dt} + h\,[1 + \beta y^2 + \alpha(t)]\, y = hx(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — соответственно входное воздействие и выходная координата, $\alpha(t)$ — случайная сила. Будем считать процессы $\alpha(t)$ и $x(t)$ гауссовыми дельта-коррелированными шумами с

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\, \xi(t-\tau) \rangle = D_\xi\, \delta(\tau), \quad \xi = \alpha,\ x.$$

Положим для простоты процессы $x(t)$ и $\alpha(t)$ статистически независимыми. Стандартным путем (см., например, [3, 4]) нетрудно получить уравнение Фоккера — Планка для релаксации плотности вероятности выходной координаты $W_y(y;\, t)$. Для стационарной плотности $W(y) = W_y(y;\, \infty)$ оно имеет вид

* В работе [2] рассматривалась подобная задача методами теории возмущений, существенно ограничивающими условия применимости результатов.

$$\frac{d}{dy}(\mu y^2 + 2D_0)\, W(y) = (\mu - 2 - 2\beta y^2) y\, W(y), \tag{2}$$

где введены безразмерные параметры $\mu = hD_\alpha$, $D_0 = (1/2)hD_x$, представляющие собой эффективную мощность параметрического воздействия и дисперсию невозмущенного броуновского движения линейной системы (дисперсию выходного шума при $\mu = 0$, $\beta = 0$). Уравнение (2) легко интегрируется; в результате находим следующее выражение для стационарной плотности вероятности:

$$W(y) = C \exp\left(-\frac{\beta}{\mu} y^2\right)(\mu y^2 + 2D_0)^{2\beta D_0/\mu^2 - 1/2 - 1/\mu}, \tag{3}$$

где константа C определяется из условий нормировки. В отсутствие параметрического воздействия ($\mu \to 0$) из формулы (3) приходим к выражению

$$W(y)|_{\mu=0} = C_1 \exp\left[-\frac{y^2}{2D_0}\left(1 + \frac{\beta}{2} y^2\right)\right], \tag{3а}$$

соответствующему стационарному вероятностному распределению броуновского движения частицы в потенциальной яме с $U(y) \sim y^2 + \beta y^4$ [4, 5]. При $\beta \to 0$ из формулы (3) следует «параметрическая» плотность вероятности со степенным законом спадания крыльев [1, 6]:

$$W(y)|_{\beta=0} = C_2 (\mu y^2 + 2D_0)^{-1/2 - 1/\mu}. \tag{3б}$$

Отметим одно интересное обстоятельство: как видно из выражения (3), при определенном соотношении между параметрами μ и β, а именно

$$\mu(\mu + 2) = 4\beta D_0, \tag{4}$$

стационарное вероятностное распределение выходной координаты является гауссовым:

$$W(y) = W_\Gamma(y) = \sqrt{\frac{2+\mu}{4\pi D_0}} \exp\left[-\frac{(2+\mu)}{4D_0} y^2\right]. \tag{5}$$

Таким образом, при выполнении условия (4) имеет место некоторая «компенсация» факторов параметрического возбуждения и нелинейного затухания. В самом деле, как следует из выражений (3а), (3б), нелинейность и параметрическое воздействие денормализуют вероятностное распределение свободного броуновского движения системы «в разные стороны», поэтому при определенном соотношении между этими факторами возможна указанная компенсация. Заметим, однако, что такая компенсация возможна только в рассматриваемом случае кубичной нелинейности. Отметим также, что дисперсия гауссова распределения (5) отлична от дисперсии свободного броноувского движения D_0 (см. рис. 1).

Хотя на основании плотности вероятности (3) можно найти точное выражение для дисперсии $\langle y^2 \rangle$ и других моментов (которое, однако, не выражается в элементарных функциях при произвольных значениях μ и β), представляет интерес проанализировать также выражения, получаемые с использованием кумулянтных приближений [5]. Последний метод применим к анализу нелинейных систем общего вида, а сопоставление с точным результатом в данной задаче дает представление о погрешности кумулянтных приближений.

Наличие нелинейного затухания в исходном уравнении (1) приводит к зацеплению в уравнениях для моментов выходной координаты;

стационарное значение дисперсии $\langle y^2\rangle$ находится из следующей цепочки:

$$(1-\mu)\langle y^2\rangle+\beta\langle y^4\rangle=D_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(1-n\mu)\langle y^{2n}\rangle+\beta\langle y^{2n+2}\rangle=(2n-1)D_0\langle y^{2n-2}\rangle, \tag{6}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\langle y^{2n-1}\rangle=0, \quad n=1, 2, \ldots$$

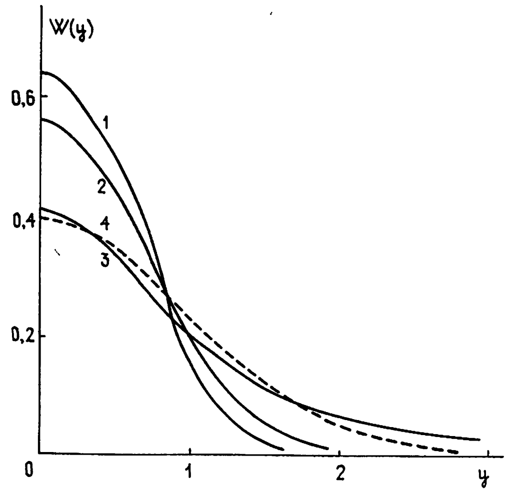

Рис. 1. Зависимость плотности вероятности от величины нелинейного затухания β (при $\mu=2$, $D_0=1$): кривая 1 — $\beta=4$, кривая 2 — $\beta=2$, 3 — $\beta=0{,}2$. Кривая 2 соответствует гауссову распределению, полученному в результате „компенсации“ факторов параметрического возбуждения и нелинейного затухания; кривая 4 — гауссово распределение невозмушенной линейной системы ($\mu=0$, $\beta=0$).

Полагая в гауссовом приближении $\langle y^4\rangle\approx 3\langle y^2\rangle^2$, получим замкнутое уравнение для дисперсии, решение которого имеет вид

$$\langle y^2\rangle_\Gamma=(6\beta)^{-1}\left(\mu-1+\sqrt{(\mu-1)^2+12\beta D_0}\right). \tag{7}$$

При $\beta\to 0$ отсюда следует известное выражение для дисперсии выходной координаты стохастической линейной системы

$$\langle y^2\rangle=D_0(1-\mu)^{-1}, \qquad \mu<1$$

(значение $\mu=1$ соответствует границе среднеквадратичной устойчивости в отсутствие нелинейного затухания.)

Следующее за гауссовым эксцессное приближение [5] получается путем приближенного разложения шестого момента (пренебрегаем шестым кумулянтом)*

$$\langle y^6\rangle\approx 15\langle y^2\rangle\langle y^4\rangle-30\langle y^2\rangle^3.$$

Используя это разложение в системе (6), приходим к кубичному уравнению для дисперсии:

* n-е приближение для дисперсии $\langle y^2\rangle$ находится путем приближенного разложения момента $\langle y^{2n+2}\rangle$ в пренебрежении старшим кумулянтом $\langle y, {}^{[2n+2]}\rangle$.

$$30\beta^2\langle y^2\rangle^3 + 15\beta(1-\mu)\langle y^2\rangle^2 + [(1-\mu)(1-2\mu) - \\ - 12\beta D_0]\langle y^2\rangle = (1-2\mu)D_0. \tag{8}$$

Зависимость дисперсии выходной координаты $\langle y^2\rangle$ от параметров μ и β при постоянном значении мощности входного воздействия $D_0 = 1$ показана на рис. 2. Здесь сплошными линиями построены кривые гауссова приближения, пунктирными — эксцессного приближения, кружочками — точная зависимость, рассчитанная с помощью численного интегрирования вероятностного распределения (3). Отметим, прежде всего, что при любой, отличной от нуля величине нелинейных потерь дисперсия имеет конечную величину при любом конечном значении μ, т. е. нелинейное затухание ликвидирует параметрическое возбуждение системы. Из рисунка видно также, что, действительно, кривые гауссова, эксцессного приближений и точного решения пересекаются в одной точке, координаты которой удовлетворяют соотношению (4).

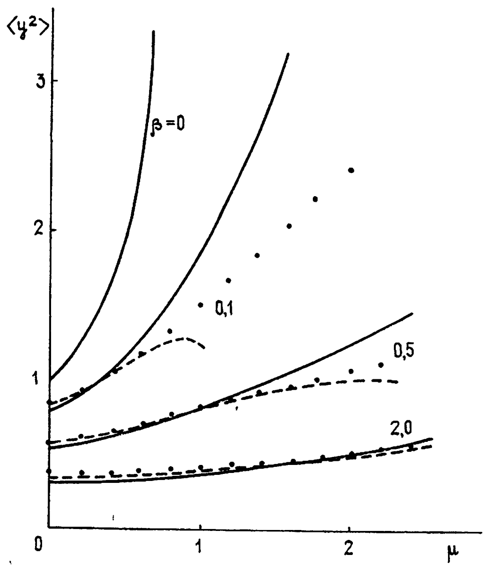

Рис. 2.

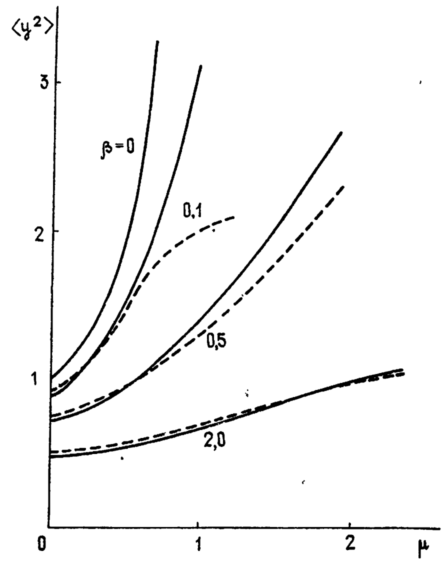

Рис. 3.

Интересно отметить, что, хотя при малых μ эксцессное приближение дает лучшее совпадение с точным результатом, чем гауссово, с ростом мощности параметрического воздействия μ (и уменьшением нелинейного затухания β) погрешность его резко возрастает (см. спад пунктирных кривых). Это свидетельствует о том, что эксцессное приближение плохо работает в случае вероятностного распределения с медленно спадающими крыльями, близкого к «параметрическому» распределению (3б).

2. Рассмотрим теперь влияние нелинейного затухания на вероятностные характеристики параметрически возбуждаемого гармонического осциллятора, описываемого стохастическим уравнением

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2h(1+\beta y^2)\frac{dy}{dt} + \Omega^2[1+\alpha(t)]\,y = \Omega^2 x(t). \tag{9}$$

По-прежнему полагаем процессы $\alpha(t)$ и $x(t)$ статистически независимыми дельта-коррелированными шумами. Найти решение соответствующего двумерного уравнения Фоккера — Планка не удается, поэтому ограничимся рассмотрением моментов выходной координаты. Обозначив $\dot{y} = \Omega z$, стандартным путем приходим к зацепляющейся системе уравнений для стационарных значений моментов марковской совокупности $\{y, z\}$:

$$q \frac{n}{m} \langle y^{n-1} z^{m+1} \rangle + \langle m - 1 \rangle \mu \langle y^{n+2} z^{m-2} \rangle + (m-1) D_0 \langle y^n z^{m-2} \rangle =$$
$$= \langle y^n z^m \rangle + \beta \langle y^{n+2} z^m \rangle + q \langle y^{n+1} z^{m-1} \rangle, \qquad m, n = 0, 1, \dots$$

Отсюда

$$\begin{gathered}
\langle y^{2k+1} \rangle = \langle z^{2k+1} \rangle = \langle y^k z \rangle = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, \\
\langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle, \qquad \langle y^4 \rangle = 3 \langle y^2 z^2 \rangle, \\
\langle y^2 \rangle (1 - \mu) + \beta \langle y^2 z^2 \rangle = D_0, \\
D_0 \langle y^2 \rangle + \left(\mu - \frac{1}{3}\right) \langle y^4 \rangle + q \langle y z^3 \rangle = \beta \langle y^4 z^2 \rangle, \\
q \langle y^4 \rangle = q \langle z^4 \rangle + 3 \langle y z^3 \rangle + 3\beta \langle y^3 z^3 \rangle, \\
3 D_0 \langle y^2 \rangle + \mu \langle y^4 \rangle = \langle z^4 \rangle + q \langle y z^3 \rangle + \beta \langle y^2 z^4 \rangle, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered} \tag{10}$$

Замыкая систему (10) в гауссовом приближении по совокупности переменных $\{y, z\}$, т. е. полагая $\langle y^2 z^2 \rangle \approx \langle y^2 \rangle \langle z^2 \rangle = \langle y^2 \rangle^2$, получим для дисперсии выходной координаты квадратное уравнение, как и в случае системы первого порядка (1). Его решение имеет вид

$$\langle y^2 \rangle_{\Gamma} = (2\beta)^{-1} \left(\mu - 1 + \sqrt{(\mu - 1)^2 + 4\beta D_0}\right), \tag{11}$$

подобный (7). Здесь использованы безразмерные переменные

$$\mu = \Omega^2 D_\alpha (4h)^{-1}, \qquad D_0 = \Omega^2 D_x (4h)^{-1}, \qquad q = \Omega (2h)^{-1},$$

имеющие тот же смысл, что и ранее. В эксцессном приближении по совокупности $\{y, z\}$ ограничиваемся (с учетом (10)) следующими приближенными разложениями смешанных моментов:

$$\begin{gathered}
\langle y^2 z^4 \rangle \approx \langle y^2 \rangle \langle z^4 \rangle + 2 \langle y^2 \rangle \langle y^4 \rangle - 6 \langle y^2 \rangle^3, \\
\langle y^4 z^2 \rangle \approx 3 \langle y^4 \rangle \langle y^2 \rangle - 6 \langle y^2 \rangle^3, \\
\langle y^3 z^3 \rangle \approx 6 \langle y^2 \rangle \langle y z^3 \rangle.
\end{gathered}$$

Это позволит перейти от системы (10) к кубичному уравнению для искомой величины $\langle y^2 \rangle$. Для случая большой добротности невозмущенной системы $q \gg 1$ последнее имеет вид

$$\begin{gathered}
6\beta^2 \langle y^2 \rangle^3 + 9\beta (1 - \mu) \langle y^2 \rangle^2 + [(1 - \mu)(2 - 3\mu) - \\
- 7\beta D_0] \langle y^2 \rangle = (2 - 3\mu) D_0.
\end{gathered} \tag{12}$$

Зависимость средней энергии $\langle y^2 \rangle$ от величин μ и β, характеризующих мощность параметрического воздействия и величину нелинейности, показана на рис. 3 ($D_0 = 1$, $q \gg 1$). Здесь сплошными линиями отмечены результаты гауссова приближения (11), пунктирными — эксцессного (12). Отметим, что ход кривых качественно подобен построенным на рис. 2 для системы первого порядка. Пересечение кривых гауссова и эксцессного приближений свидетельствует о том, что при определенном соотношении между параметрами μ и β вероятностное распределение является гауссовым, как и в рассмотренном выше случае. Чтобы убедиться в этом, запишем стационарное уравнение Фоккера — Планка для двумерной плотности вероятности $W(y, z)$:

$$q\left(z\frac{\partial W}{\partial y}-y\frac{\partial W}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left[(z+\beta y^2 z)W+(\mu y^2+D_0)\frac{\partial W}{\partial z}\right]. \tag{13}$$

Найти «настоящее» решение этого уравнения не удается, однако если искать плотность вероятности в виде гауссова распределения

$$W(y, z)=W_{\Gamma}(y)\,W_{\Gamma}(z)=\frac{1}{2\pi\langle y^2\rangle}\exp\left[-\frac{1}{2\langle y^2\rangle}(y^2+z^2)\right], \tag{14}$$

то нетрудно убедиться, что при выполнении условия $\mu=\beta D_0$ распределение (14) удовлетворяет уравнению (13), причем дисперсия $\langle y^2\rangle$ в данном случае совпадает с дисперсией выходной координаты свободного броуновского движения линейной системы D_0. Таким образом, кубичная нелинейность затухания в стохастическом осцилляторе при выполнении указанного условия полностью компенсирует параметрические эффекты.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Пугачев, И. Е. Казаков, Л. Г. Евланов, Основы статистической теории автоматических систем, Машиностроение, М., 1974.
2. Y. H. Ku, T. S. Lin, J. Franclin Institute, 292, № 5, 313 (1971).
3. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961
4. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
5. А. Н. Малахов, Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований, изд. Сов. радио, М., 1978.
6. А. Н. Малахов, О. В. Музычук, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 1, 71 (1978).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 11 января 1979 г.

THE EFFECT OF NONLINEAR DAMPING ON PROBABLE CHARACTERISTICS OF SOME STOCHASTIC SYSTEMS

S. Yu. Medvedev, O. V. Muzychuk

Based on Fokker — Plank equation the effect of nonlinear damping on probable characteristics of stochastic systems described by differential equations of the first and the second order is analysed. It is shown that the presence of nonlinear damping eliminates the parametric excitation It is stated, that in the case of cubic nonlinearity with the definite relations between the intensity of the noise parametric interaction and the value of the nonlinearity the «compensation» of these factors takes place. As a result the output coordinate probability distribution appears to be the Gaussian one.