

УДК 523.7

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ТОКОВОГО СЛОЯ

В. Д. Кузнецов

Рассмотрено обычное тормозное излучение токового слоя. Показано, что слой является оптически толстым ($\tau_e \geq 1$) на частоте, соответствующей критической для центра слоя $\omega = \omega_0$, если его толщина L удовлетворяет условию $L \geq \lambda_s = c/\nu_0$.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительное внимание уделяется теоретическому и экспериментальному исследованию нейтральных токовых слоев [1, 2]. Это обстоятельство в значительной мере связано с тем, какую роль играют нейтральные токовые слои в объяснении солнечных вспышек [3, 4] и магнитосферных явлений [5].

Представляет интерес изучение радиочастотных свойств токовых слоев (распространения электромагнитных волн, собственного излучения) как для целей диагностики лабораторной и космической плазмы [1, 6], так и для обнаружения токовых слоев в солнечной атмосфере с целью прогнозирования солнечных вспышек [7, 8]. Данные по микроволновому радиоизлучению токовых слоев наряду с магнитными измерениями и наблюдениями в ультрафиолетовом и рентгеновском диапазонах могут быть использованы для определения положения и характеристик токового слоя в солнечной атмосфере.

Идеализированный стационарный (самосогласованный) нейтральный токовый слой обычно характеризуется следующим распределением параметров [9]:

$$N(x) = \frac{N_0}{\text{ch}^2(x/L)}, \quad H(x) = H_\infty \text{th}(x/L), \quad (1)$$

или

$$\omega_p^2(x) = \frac{\omega_0^2}{\text{ch}^2(x/L)}, \quad \omega_H^2(x) = \omega_{H_\infty}^2 \text{th}^2(x/L),$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi N_0 e^2}{m}}, \quad \omega_{H_\infty} = \frac{eH_\infty}{mc}.$$

Здесь $L = \frac{c}{V} r_d$ — толщина слоя, $r_d = \sqrt{\frac{kT}{4\pi N_0 e^2}} = \frac{v_T}{\omega_0}$ — дебаевский радиус, V — скорость направленного (вдоль нулевой плоскости) движения частиц, $N_0 = N_{0e} + N_{0i}$, $T = \text{const}$ — температура слоя. Условие равновесия (стационарности) слоя

$$H_\infty^2 / 8\pi = 2N_0 kT \quad (2)$$

дает $\left(\frac{\omega_{H_\infty}}{\omega_0}\right)^2 = \frac{4kT}{mc^2} \approx \beta_T \ll 1$, т. е. $\omega_H < \omega_{H_\infty} \ll \omega_0$, если рассматривать нерелятивистскую плазму.

В дальнейшем влияние магнитного поля на излучение учитывать не будем, т. е. ограничимся рассмотрением тормозного излучения слоя

в диапазоне частот $\omega \gg \omega_{H\infty} > \omega_H$. В этом случае мы имеем дело с тормозным излучением изотропного «симметричного» слоя плазмы ($N = N_0/\text{ch}^2(x/L)$). Распределение частиц в слое можно считать максвелловским и пользоваться для расчета излучения обычным выражением для коэффициента поглощения μ [10]:

$$\mu(x) = \frac{4\pi\sigma(x)}{c\sqrt{\varepsilon(x)}} = \frac{V_0}{\lambda_s} \frac{1}{\text{ch}^4(x/L)\sqrt{1-V_0/\text{ch}^2(x/L)}}, \quad (3)$$

$$V_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \lambda_s = \frac{c}{\nu_0}, \quad \nu_0 \approx \frac{5,5 N_0}{T^{3/2}} \ln\left(\frac{4,6 \cdot 10^5 T}{\omega^{2/3}}\right).$$

Это справедливо, однако, только в предположении, что скорость направленного движения V мала по сравнению с тепловой скоростью v_T , т. е. $V \ll v_T$. Это условие всегда выполняется, если рассматривать слой толстые по сравнению с λ_0 ($L \gg \lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$), так как $L = \frac{c}{V} r_d = \frac{v_T}{V} \times \frac{c}{v_T} \frac{v_T}{\omega_0} = \frac{v_T}{2\pi V} \lambda_0$ и $L \gg \lambda_0$, если $v_T \gg 2\pi V$. Толщина токового слоя в условиях солнечной атмосферы может быть весьма малой: $L \gg \gg 20$ см [11]. Условие $L \gg \lambda_0$ может нарушаться тогда лишь для не очень плотных слоев $N_0 \leq \frac{\pi m c^2}{e^2 L^2} \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для расчета тормозного излучения слоя плазмы удобно воспользоваться коэффициентами отражения R^2 и прохождения D^2 волн через слой с учетом их поглощения за счет соударений. Будем считать, что волна падает вдоль градиента концентрации, т. е. $\mathbf{k} \parallel \nabla N$, а $\mathbf{E} \perp \nabla N$. Особый интерес представляет расчет коэффициентов R^2 и D^2 для частоты $\omega = \omega_0$, соответствующей критической для центра слоя, когда наряду с поглощением необходимо учитывать просачивание через максимум слоя. Зная R^2 и D^2 , из закона сохранения энергии определим коэффициент поглощения слоя $A^2 = 1 - R^2 - D^2$. Воспользовавшись теоремой Кирхгофа $\frac{I_\omega}{A^2} = \frac{kT}{8\pi^3 c^2}$ ($\hbar\omega \ll kT$, для одной поляризации), найдем полное излучение слоя. Оптическую толщину слоя можно определить по формуле

$$1 - e^{-\tau_c} = A^2 = 1 - R^2 - D^2. \quad (4)$$

Общий метод нахождения R^2 и D^2 состоит в том, что необходимо решить волновое уравнение с комплексной диэлектрической проницаемостью:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'(x) E = 0, \quad (5)$$

$$\varepsilon' = \varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} = (n - i\kappa)^2,$$

$E = E_{y,z} = E(x) e^{i\omega t}$ — электрическое поле волны, $E_x = 0$. Зная решение $E(x)$ этого уравнения и его асимптотику на бесконечности, можно найти R^2 и D^2 . В общем случае для $\varepsilon'(x)$ имеем довольно сложное выражение

$$\epsilon'(x) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{\text{эфф}}^2} \left(1 + i \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega} \right) \approx 1 - \frac{V_0}{\text{ch}^2(x/L)} \left(1 + i \frac{\nu_0/\omega}{\text{ch}^2(x/L)} \right), \quad (6)$$

поэтому обобщить известное решение для «симметричного» слоя на случай поглощения не удастся. В работе [12] такое обобщение предпринято в предположении $\epsilon' = 1 - \frac{V_0(1 + i(\nu_0/\omega))}{\text{ch}^2(x/L)}$, т. е. $\nu = \text{const}$ по слою, в то время как реально $\nu = \nu_0/\text{ch}^2(x/L)$.

Для решения задачи используем метод сшивания точного решения волнового уравнения (5) вблизи максимума слоя с решением в приближении геометрической оптики вдали от центра слоя. Применимость приближения геометрической оптики определяется условием [10]

$$\frac{\lambda}{2\pi} \left| \frac{dn}{dx} \right| \ll 1. \quad (7)$$

Подставляя сюда $n = \sqrt{1 - \frac{V_0}{\text{ch}^2(x/L)}}$, можно легко видеть, что для $\omega < \omega_0$ приближение геометрической оптики выполняется лишь для части слоя $|x| \gg x_1 \approx L \text{Arch} \sqrt{V_0}$. Считая $\omega < \omega_0 - \frac{3\omega_L}{2\pi}$ ($\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \gg \omega_L = \frac{2\pi c}{L}$), просачиванием волн через максимум можно пренебречь [10], и в точке x_1 слой можно аппроксимировать линейным. Сшивание решения волнового уравнения для линейного слоя с решением геометрической оптики приводит в этом случае [10] к

$$\tau_c = 2 \int_{x_1}^{\infty} \mu(x) dx + \Delta\tau = \frac{V_0 L}{\lambda_s} \frac{1}{V_0} \left\{ \frac{1}{2} \left(\sqrt{V_0} + \frac{1}{\sqrt{V_0}} \right) \ln \frac{\sqrt{V_0} + 1}{\sqrt{V_0} - 1} - 1 \right\} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{L}{\lambda_s} \sqrt{\frac{\nu_0/\omega_0}{V_0^{5/2}}} \approx \frac{4L}{3\lambda_s V_0} \left(1 + \sqrt{\frac{\nu_0/\omega_0}{2V_0}} \right) \approx \frac{4L}{3\lambda_s V_0}. \quad (8)$$

При $\omega \gg \omega_0$ (практически уже при $\omega > \omega_0 + \omega_L$) приближение геометрической оптики выполняется для всего слоя, поэтому в этом случае

$$\tau_c = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x) dx = \frac{4V_0 L}{3\lambda_s}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) видно следующее. Для того, чтобы на частотах $\omega \ll \omega_0$ ($\omega \gg \omega_0$) было $\tau_c \gg 1$, необходимо, чтобы толщина слоя L удовлетворяла условию $L \gtrsim \frac{3}{4} \lambda_s V_0 \gg \lambda_s$ ($L \gtrsim \frac{3}{4} \frac{\lambda_s}{V_0} \gg \lambda_s$), т. е. необходимы геометрические толстые слои. Для $N_0 = 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $T = 8 \cdot 10^4 \text{ К}$ имеем $\nu_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ Гц}$, $\lambda_s = c/\nu_0 = 100 \text{ см}$, $\lambda_0 = 2,4 \text{ мм}$, и слой будет оптически толстым на $\lambda = 2,4 \text{ см}$, если $L \gtrsim \lambda_s (\lambda/\lambda_0)^2 = 100 \lambda_s = 10^4 \text{ см}$. Такую же толщину L нужно взять, чтобы слой был оптически толстым на $\lambda = 0,24 \text{ мм} = 240 \text{ мкм}$. Как видно из (8) и (9), на волнах λ_1 и λ_2 , таких, что $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_0^2$, слой имеет одну и ту же оптическую толщину:

$$\tau_c = \frac{4L}{3\lambda_s} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^2 = \frac{4L}{3\lambda_s} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^2.$$

При $\omega \approx \omega_0$ ($\omega_0 - \omega_L \leq \omega \leq \omega_0 + \omega_L$) существенным становится просачивание волн через максимум слоя. Приближение геометрической оптики нарушается в окрестности максимума $|x| \leq \sqrt{\frac{\lambda_0 L}{2\pi}}$ (см. (7)),

где слой нужно аппроксимировать параболой, считая $\text{ch}^2 \frac{x}{L} \approx 1 + \frac{x^2}{L^2}$,

$|x| \leq L$. В области $|x| \ll L$ из (5) мы получаем волновое уравнение для параболического слоя, решение которого известно [10]. В области

же $|x| \gg \sqrt{\frac{\lambda_0 L}{2\pi}}$ можно использовать приближение геометрической

оптики. Поскольку $\lambda_0 \ll L$, то существует область $\sqrt{\frac{\lambda_0 L}{2\pi}} \ll |x| \ll L$,

где оба решения перекрываются. Сшивая эти решения в некоторой точке

x_0 ($\sqrt{\frac{\lambda_0 L}{2\pi}} \ll |x_0| \ll L$), мы сможем найти коэффициенты R^2 и D^2 ,

причем они будут слабо зависеть от выбора самой точки x_0 , поскольку оба решения в данной точке являются хорошим приближением к точному решению.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение уравнения (5) в приближении геометрической оптики имеет вид [10]

$$E(x) = \frac{C_+}{\sqrt[4]{\varepsilon'(x)}} \exp\left(+i \frac{\omega}{c} \int_{x_0+}^x \sqrt{\varepsilon'(z)} dz\right) + \frac{C_-}{\sqrt[4]{\varepsilon'(x)}} \times \exp\left(-i \frac{\omega}{c} \int_{x_0-}^x \sqrt{\varepsilon'(z)} dz\right). \quad (10)$$

В области I (см. рис. 1) при $x \ll -\sqrt{\frac{\lambda_0 L}{2\pi}}$ зададим решение в виде суммы падающей и отраженной волн:

$$E_I(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon'(x)}} \left[\exp\left(-ik \int_{-x_0}^x \sqrt{\varepsilon'(z)} dz\right) + R_- \exp\left(ik \int_{-x_0}^x \sqrt{\varepsilon'(z)} dz\right) \right]. \quad (11)$$

В области III, $x \gg \sqrt{\frac{\lambda_0 L}{2\pi}}$, зададим только прошедшую волну:

$$E_{III}(x) = \frac{D_+}{\sqrt[4]{\varepsilon'(x)}} \exp\left(-ik \int_{x_0}^x \sqrt{\varepsilon'(z)} dz\right) \quad (k = \omega/c). \quad (12)$$

Здесь $\pm x_0$ — точки, в которых решения (11), (12) будут сшиваться с решением волнового уравнения для параболического слоя. При $x >$

$> x_0 \gg \sqrt{\frac{\lambda_0 L}{2\pi}}$ для μ можно использовать формулу (3), так что при

$x \rightarrow -\infty$ с точностью до несущественных для нас фазовых множителей будем иметь

$$E_I(x \rightarrow -\infty) = e^{-ikx} e^{+\tau_1} + R_- e^{-\tau_1} e^{ikx}. \quad (13)$$

При $x \rightarrow \infty$ получим

$$E_{III}(x \rightarrow \infty) = D_+ e^{-\tau_1} e^{-ikx}. \quad (14)$$

Здесь

$$\tau_1 = k \int_{x_0}^{\infty} \kappa(x) dx \approx \frac{L}{4\lambda_s} \left[\ln \left(\frac{L^2}{x_0^2} \right) - 1 \right]. \quad (15)$$

Из (13) и (14) для коэффициентов R^2 и D^2 получаем

$$R^2 = |R_-|^2 e^{-4\tau_1} = |R_-|^2 \exp \left\{ -\frac{L}{\lambda_s} \left[\ln \left(\frac{L^2}{x_0^2} \right) - 1 \right] \right\}; \quad (16)$$

$$D^2 = |D_+|^2 e^{-4\tau_1} = |D_+|^2 \exp \left\{ -\frac{L}{\lambda_s} \left[\ln \left(\frac{L^2}{x_0^2} \right) - 1 \right] \right\}. \quad (17)$$

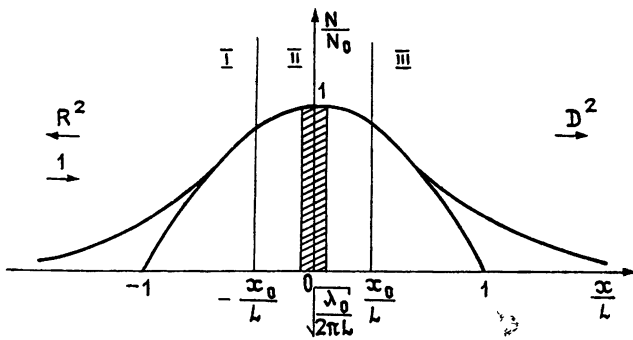


Рис. 1.

Раскладывая теперь $\epsilon'(x)$ (см. (6)) в ряд по степеням x/L и делая замену

$$z = e^{i\pi/4} \left(1 + 2i \frac{v_0}{\omega} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{4\pi L}{\lambda_0}} \frac{x}{L} = u_0 x, \quad (18)$$

из (5) получим после преобразования уравнение

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \left(p + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) E = 0, \quad (19)$$

где

$$p = i\rho - \frac{1}{2}, \quad \rho = \rho_0 + i\rho_1, \quad \rho_0 = \frac{\pi L}{\lambda_0} \left(1 - \frac{1}{V_0} \right), \quad (20)$$

$$\rho_1 = \frac{\pi L}{\lambda_0} \frac{v_0/\omega}{V_0} = \frac{L}{2\lambda_s \sqrt{V_0}}.$$

Решениями уравнения (19) являются функции параболического цилиндра $D_p(z)$, $D_p(-z)$, $D_{-p-1}(iz)$, $D_{-p-1}(-iz)$. Общее решение в области II, $|x| \ll L$, запишем в виде

$$E_{II}(x) = AD_p(z) + BD_{-p-1}(-iz). \quad (21)$$

Нужные нам коэффициенты R_- и D_+ находятся из условия непрерывности поля $E(x)$ и его производных в точках $x = \pm x_0$, т. е. из системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} E_I(-x_0) = E_{II}(-x_0) \\ \left. \frac{dE_I}{dx} \right|_{-x_0} = \left. \frac{dE_{II}}{dx} \right|_{-x_0} \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{II}(x_0) = E_{III}(x_0) \\ \left. \frac{dE_{II}}{dx} \right|_{x_0} = \left. \frac{dE_{III}}{dx} \right|_{x_0} \end{array} \right\}. \quad (22)$$

Подставив в (22) решения (13), (14) и (21), используя при этом приближение геометрической оптики (7) и удерживая в разложении функций параболического цилиндра члены первого порядка малости по $\left| \frac{p}{z_0} \right|$ (см. [13]), после довольно громоздких преобразований получим

$$R^2 = \frac{e^{\pi\rho_0}}{2\pi} \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - \rho_1 + i\rho_0\right) \right|^2 \exp\left\{-\frac{L}{\lambda_s} \left[\ln\left(\frac{4\pi L}{\lambda_0}\right) - 1 \right]\right\}; \quad (23)$$

$$D^2 = \frac{1}{2\pi} \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - \rho_1 + i\rho_0\right) \right|^2 \exp\left\{-\frac{L}{\lambda_s} \left[\ln\left(\frac{4\pi L}{\lambda_0}\right) - 1 \right]\right\}. \quad (24)$$

Без поглощения ($\rho_1 = 0$, $\lambda_s = \infty$) из (23) и (24) получаются хорошо известные коэффициенты для «симметричного» слоя при условии $L \gg \lambda^0$ (см. [10]).

Коэффициент поглощения слоя (доля поглощенной слоем энергии) тогда равен

$$A^2 = 1 - R^2 - D^2 = 1 - \frac{1 + e^{\pi\rho_0}}{2\pi} \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} - \rho_1 + i\rho_0\right) \right|^2 \times \\ \times \exp\left\{-\frac{L}{\lambda_s} \left[\ln\left(\frac{4\pi L}{\lambda_0}\right) - 1 \right]\right\}. \quad (25)$$

При $\omega \approx \omega_0$, $\rho_0 \approx 0$, $\rho_1 \approx L/2\lambda_s$, и для оптической толщи слоя будем приближенно иметь

$$\tau_c \approx \frac{L}{\lambda_s} \left[\ln\left(\frac{4\pi L}{\lambda_0}\right) - 1 \right]. \quad (26)$$

Чтобы слой был оптически толстым, на этой частоте необходимо выполнение неравенства

$$\frac{L}{\lambda_s} \left[\ln\left(\frac{4\pi L}{\lambda_0}\right) - 1 \right] \gg 1, \quad \text{или} \quad \frac{\lambda_s}{L} + \ln \frac{\lambda_s}{L} \leq \ln\left(\frac{4\pi \lambda_s}{\lambda_0}\right) - 1. \quad (27)$$

Если y_0 есть корень уравнения

$$y + \ln y = \ln\left(\frac{4\pi \lambda_s}{\lambda_0}\right) - 1 = \ln\left(\frac{4\pi \omega_0}{\nu_0}\right) - 1, \quad (28)$$

то для выполнения неравенства (27) необходимо $L \gg \lambda_s/y_0$. Величина, стоящая под знаком логарифма, меняется незначительно при изменении параметров N_0 и T , поэтому, если в среднем считать, что $\ln\left(\frac{4\pi \omega_0}{\nu_0}\right) - 1 \approx \approx 10$, то $y_0 \approx 8$, и тогда при $L \gg \lambda_s/8$ слой будет оптически толстым. Например, для $N_0 = 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $T = 8 \cdot 10^4 \text{ К}$ $\ln\left(\frac{4\pi \lambda_s}{\lambda_0}\right) - 1 \approx 7,7$, $y_0 = 5,9$ и $L \gg 20 \text{ см}$.

Следует заметить, что формулы (23), (24), как и (26), справедливы, вообще говоря, при $\rho_1 < 1$ ($\lambda_0 \ll L < \lambda_s$), что связано с применимостью разложений параболических функций. Ясно, однако, что при $L \gtrsim \lambda_s$ слой будет оптически толстым, хотя формулы для R^2 и D^2 будут несколько иными. Таким образом, условие $L \gtrsim \lambda_s$ является достаточным для того, чтобы на частоте $\omega = \omega_0$ слой был оптически толстым. Это обстоятельство дает основание считать, что токовые слои, образующиеся в солнечной атмосфере и имеющие малую толщину L , могут все же давать на критической длине волны λ_0 заметное излучение, отвечающее их кинетической температуре. Это излучение имеет, очевидно, крайне малую степень поляризации*: $p \approx \left(\frac{\omega_{H\infty}}{\omega_0} \right)^2 \approx \frac{kT}{mc^2} \ll 1$.

Настоящая работа выполнена под руководством С. И. Сыроватского.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейтральные токовые слои в плазме, Труды ФИАН, 74, 1974.
2. С. И. Сыроватский, Вестник АН СССР, 10, 33 (1977).
3. S. I. Syrovatskii, Comments on Astrophys. and Space Science, 4, 65 (1972).
4. E. R. Priest, Sol. Phys., 47, 41 (1976).
5. С. Акософу, Полярные и магнитосферные суббури, изд. Мир, М., 1971.
6. В. В. Железняков, ЖЭТФ, 73, 560 (1977).
7. С. И. Сыроватский, в сб. Проблемы солнечной активности и космическая система «Прогноз», изд. Наука, М., 1977.
8. С. И. Сыроватский, Письма в Астрон. ж., 3, 133 (1977).
9. E. G. Harris, Nuovo Cimento, 23, 115 (1962).
10. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
11. С. И. Сыроватский, Письма в Астрон. ж., 2, 35 (1976).
12. K. Rawer, Ann. Phys., 35, 385 (1939); 42, 294 (1942).
13. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, М., 1951.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
3 мая 1979 г.

ON THE EMISSION OF THE CURRENT SHEET

V. D. Kuznetsov

The bremsstrahlung radioemission of the current sheet is considered. It is shown that the sheet is optical thick ($\tau_c \gtrsim 1$) at the frequency corresponding to the plasma frequency at the centre of the layer ($\omega = \omega_0$) if its thickness L satisfies the condition

$$L \gtrsim \lambda_s = \frac{c}{\nu_0}.$$

* Интенсивность излучения в обе нормальные волны равна $I_{1,2} = \frac{1}{2} I_0 (1 - e^{-\tau_{1,2}})$.

Тогда степень поляризации $p = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = \frac{e^{-\tau_2} - e^{-\tau_1}}{2 - e^{-\tau_1} - e^{-\tau_2}}$. Так как $\tau_1 \approx \tau_2 \approx \tau_c$ ($\tau_1 = \tau_c$,

$\tau_2 = \tau_c + \Delta\tau$), $\tau_c \gtrsim 1$, то $p = \frac{1}{2} e^{-\tau_c} \Delta\tau$ в силу того, что $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \int (\mu_1 - \mu_2) dl \approx$

$$\approx \frac{\omega_H^2}{\omega_0^2}. \text{ Отсюда и получаем } p = \frac{1}{2} e^{-\tau_c} \frac{\omega_H^2}{\omega_0^2} \lesssim \frac{\omega_{H\infty}^2}{\omega_0^2} \approx \frac{4kT}{mc^2} \ll 1.$$