8. В. М. Плечков, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 4, № 2, 182 (1968).
9. А. Г. Кисляков, Изв. вузов — Радиофизика, 9, № 3, 451 (1966).
10. В. М. Артемов, Е. М. Артемов, Н. Д. Балясный, А. В. Горелик, И. М Назаров, Л. И. Соловьева, Ш. Д. Фридман, В. И. Черненький, Метеорология и гидрология, № 7, 103 (1977).
11. А. П. Наумов, Изв. АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 4, № 2, 170 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию 14 июня 1979 г.

УДК 538.3

О СЛЕДУЮЩИХ ИЗ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЕЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

В. П. Казанцев

Тензор поляризуемости $\hat{\alpha}$ связывает линейным соотношением вектор дипольного момента частицы, находящейся в однородном электрическом поле, с вектором напряженности этого поля $\boldsymbol{E}_0$ [1]·

$$\boldsymbol{p} = \hat{\alpha}\boldsymbol{E}_0. \tag{1}$$

В общем случае $\hat{\alpha}$ — тензор второго ранга, расчет которого требует решения соответствующей задачи электростатики и для тела произвольной формы очень сложен Точное значение тензора поляризуемости известно лишь для тел правильной формы: шара, цилиндра, эллипсоида Однако на практике, например в задачах о прохождении электромагнитных волн через среду мелких диэлектрических частиц, таких, как частицы пыли, снежинки и т. д, необходимо уметь оценивать значения их поляризуемостей. Ясно, что из-за случайной ориентации частиц в макроскопические характеристики среды должна входить средняя по всем направлениям поляризуемость, величина которой равна третьей части следа тензора $\hat{\alpha}$ Будем обозначать ее буквой α.

Для оценки снизу величины α для некоторой частицы, занимающей область пространства V, воспользуемся тем фактом, что решение уравнения

$$\operatorname{rot}\left[\frac{1}{\varepsilon(\boldsymbol{r})}(\boldsymbol{E}_0 + \operatorname{rot}\boldsymbol{A})\right] = 0 \tag{2}$$

относительно векторного потенциала $\boldsymbol{A}$, связанного с вектором плотности поляризации $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ объема частицы соотношением

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int\limits_V \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\,\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\,|^3}\, dV', \tag{3}$$

дает максимум функционалу

$$W(\boldsymbol{A}) = \int \frac{1}{\varepsilon(\boldsymbol{r})}\left[(\varepsilon(\boldsymbol{r}) - 1)\boldsymbol{E}_0 - \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\right]\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\, dV. \tag{4}$$

Интегрирование в формуле (3) проводится по области пространства, занимаемого частицей, а в (4) — по всему пространству Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\boldsymbol{r})$ в объеме частицы принимает постоянное значение $\varepsilon > 1$, а вне его равна единице В том, что $W(\boldsymbol{A})$ максимально для $\boldsymbol{A}$, являющегося решением уравнения (2) в классе векторных потенциалов, представимых в виде (3), можно убедиться, если заметить, что правая часть непосредственно проверяемого тождества

$$W(\boldsymbol{A}) - W(\boldsymbol{A}_0) = \int\left[\boldsymbol{E}_0 - \frac{1}{\varepsilon(\boldsymbol{r})}(\boldsymbol{E}_0 + \operatorname{rot}\boldsymbol{A}_0)\right]\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_1 dV - \frac{1}{2}\int\frac{1}{\varepsilon(\boldsymbol{r})}(\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_1)^2 dV, \tag{5}$$

в котором положено $A_1 = A - A_0$, отрицательна, когда A_0 — решение уравнения (2). С помощью соотношений (1)—(4) нетрудно найти, что

$$W(A_0) = 2\pi E_0 \hat{\alpha} E_0 - \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon} E_0^2 V,$$

и получить следующее из тождества (5) в случае, когда A_0 есть решение (2), неравенство

$$2\pi E_0 \hat{\alpha} E_0 \geqslant W(A) + \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon} E_0^2 V \tag{6}$$

справедливое для любых A, представимых в форме (3).

Выберем, в частности, в качестве пробного векторный потенциал равномерно поляризованной по объему частицы с постоянным вектором плотности поляризации P. В этом случае из (3) и (4) найдем

$$\frac{1}{2\pi V} W(A) \geqslant 2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} P(\hat{e} - \hat{N}) E_0 - \frac{4\pi}{\varepsilon} P(\hat{e} - \hat{N}) [\hat{e} + (\varepsilon - 1)\hat{N}] P. \tag{7}$$

При выводе (7) использовано очевидное неравенство

$$\frac{1}{V} \int\limits_V (\operatorname{rot} A)^2 dV \geqslant \left(\frac{1}{V} \int\limits_V \operatorname{rot} A \, dV \right)^2,$$

единичный тензор обозначен $\hat{e}$, а тензор $\hat{N}$ определен с помощью интеграла

$$\hat{N} = \frac{1}{4\pi V} \int \frac{dS \cdot dS'^*}{| r - r' |}, \tag{8}$$

в котором интегрирование проводится по всей поверхности частицы, dS и dS' — векторные элементы площади поверхности в точках r и r', совпадающие по направлению с внешней нормалью. Заметим, что по формуле (8) $\hat{N}$ можно найти для любого тела, он положительно определен, симметричен, а след его равен единице, т. е. $\hat{N}$ обладает свойствами тензора деполяризации, определенного для эллипсоида в [1]. Мы будем рассматривать соотношение (8) как распространение понятия тензора деполяризации на случай произвольного тела.

Подставляя в правую часть (6) вместо $(2\pi V)^{-1} W(A)$ максимальное значение правой части (7), будем иметь неравенство

$$E_0 \left[\hat{\alpha} - \frac{V}{4\pi} \left(\hat{N} + \frac{1}{\varepsilon - 1} \hat{e} \right)^{-1} \right] E_0 \geqslant 0, \tag{9}$$

справедливое для любых E_0, показывающее, что из всех диэлектрических частиц с одинаковыми значениями $\hat{N}$, V и ε наименьший тензор поляризуемости (тензорное неравенство $\hat{a} > \hat{b}$ означает, что тензор $\hat{a} - \hat{b}$ положительно определен) имеет эллипсоид, поскольку $\frac{V}{4\pi} (\hat{N} + (\varepsilon - 1)^{-1} \hat{e})^{-1}$ — точное значение его тензора поляризуемости.

Нетрудно убедиться, что след тензора $(\hat{N} + (\varepsilon - 1)^{-1} \hat{e})^{-1}$ как функция главных значений тензора деполяризации имеет минимум, когда $3\hat{N} = \hat{e}$, что указывает на минимальность средней поляризуемости на множестве тел с постоянными ε и V для шара. В частном случае металлических частиц ($\varepsilon = \infty$) это утверждение известно как гипотеза Полиа [2], доказательство ее было получено сравнительно недавно [3].

Аналогично доказывается, что максимальная средняя поляризуемость на множестве тел с одинаковыми ε и V, содержащихся внутри некоторой сферы, достигается на сферическом слое, внешний радиус которого совпадает с радиусом сферы.

Таким образом, для средней поляризуемости любого тела с диэлектрической проницаемостью ε и объемом V, содержащегося внутри некоторого шара, справедливы неравенства

$$1 \leqslant \frac{4\pi}{3} \frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon - 1} \frac{\alpha}{V} \leqslant \left[1 - \frac{2(\varepsilon - 1)^2 (1 - f)}{(\varepsilon + 2)(2\varepsilon + 1)} \right]^{-1}, \tag{10}$$

где f обозначает величину относительного объема, занимаемого телом внутри шара,

---

* Здесь $dS \cdot dS'$ обозначает прямое произведение векторов dS и dS'.

Рассмотрим численный пример. Для метрового диапазона радиоволн диэлектрическая проницаемость льда равна 1,7 [4]. Подставляя это значение в (10) и пренебрегая в правой части этих неравенств f, что лишь ослабляет неравенства, найдем для средней поляризуемости снежинки $1 < \frac{4\pi}{3} \frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon - 1} \frac{\alpha}{V} < 1{,}06$. Отсюда видно, что в этом случае погрешность оценок (10) не превышает 3%, а этот результат следует признать довольно хорошим, если учесть сложность задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1 Л. Д. Ландау, Е. М Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
2. Г. Полиа, Г Сегё, Изопериметрические неравенства в математической физике, Физматгиз, М., 1962.
3. А. Л. Бердичевский, В. Л. Бердичевский, ДАН СССР, 224, № 2, 313 (1975).
4 В. И. Розенберг, Рассеяние и ослабление электромагнитного излучения атмосферными частицами, Гидрометеоиздат, Л., 1972.

Красноярский государственный университет

Поступила в редакцию 13 июня 1979 г.

УДК 538.561

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕШЕТКИ ИЗ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ

А. И. Глушцов

В [1] методом разделения переменных с использованием теорем сложения для цилиндрических волновых функций рассмотрена задача электромагнитного возбуждения решетки из конечного числа параллельных круговых металлических цилиндров продольным дипольным источником. В настоящей заметке приводятся некоторые из результатов расчета, иллюстрирующие возможности алгоритма численного решения, разработанного на основе [1].

В случае продольного электрического диполя суммарное поле в волновой зоне в экваториальной плоскости определяется выражением

$$E_\theta = -k^2 \rho^{-1} \exp\left[ik\rho - ik\rho^0 \cos(\varphi - \varphi^0)\right] S(\varphi),$$

где множитель ослабления

$$S(\varphi) = 1 + \exp\left[ik\rho^0 \cos(\varphi - \varphi^0)\right] \sum_{j=1}^{N} \exp\left[ik\rho_{j,0} \cos(\varphi - \varphi_{j,0})\right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n X_n^j J_n(ka_j) \exp(in\varphi),$$

ρ, φ и ρ^0, φ^0 — полярные координаты (с центром O) точек наблюдения и расположения источника соответственно, $\rho_{j,0}$, $\varphi_{j,0}$ — полярные координаты точки O в j-й локальной системе координат с центром O_j, связанным с j-м цилиндром, a_j — радиус j-го цилиндра, N — число цилиндров в решетке, k — волновое число. Величины X_n^j находятся из бесконечной системы линейных уравнений

$$X_n^j + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_{nm}^{sj} X_m^s = f_n^j$$

$$(j = 1, \ldots, N, \quad n = 0, \pm 1, \ldots)$$

с матричными элементами

$$\alpha_{nm}^{sj} = \frac{J_m(ka_s) H_{m-n}^{(1)}(kl_{sj}) \exp\left[i(m-n)\varphi_{sj}\right]}{H_n^{(1)}(ka_j)}$$