ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 5 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 621.317.353

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ ВВЕРХ В СВЕРХРЕШЕТКАХ

Ю. А. Романов

Исследованы вырожденное параметрическое усиление четной гармоники и параметрическая генерация нечетной гармоники в сверхрешетке в условиях сильной нелинейности.

Полупроводниковые сверхрешетки (СР) являются нелинейными средами даже в сравнительно слабых электрических полях [1, 2]. С другой стороны, в СР, помещенной в сильное переменное электрическое поле, возникают области отрицательной проводимости [3, 4]. Следовательно, в условиях сильной нелинейности СР обычно является активной нелинейной средой. Важно отметить, что одно и то же переменное поле может переводить СР в активную среду, изменять фазовые скорости взаимодействующих волн и быть полем накачки в параметрических процессах. Все это должно приводить к специфическим особенностям нелинейных и параметрических эффектов в СР.

В настоящей работе исследованы вырожденное параметрическое усиление четной гармоники и параметрическая генерация нечетной гармоники в СР с сильной нечетной нелинейностью.

Параметрическое усиление четной гармоники определяется распадной неустойчивостью $2n_0$-порядка, соответствующей виртуальному слиянию $2n_0$ квантов накачки и последующему их распаду на два кванта с частотой $n_0\omega_1$ каждый (ω_1 — частота накачки, n_0 — номер усиливаемой гармоники). Аналогом в сосредоточенных системах является параметрический резонанс $2n_0$-порядка. Параметрическая генерация нечетной гармоники носит гибридный характер. Она включает обычную генерацию гармоники и ее последующее параметрическое усиление указанного выше типа.

Рассмотренные в работе параметрические явления могут существовать не только в СР, но и в других сильно нелинейных средах.

1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть СР находится под воздействием заданной сильной гармонической волны, распространяющейся поперек ее периода (направление z) с вектором электрического поля, параллельным периоду

$$E_1(z, t) = E_{10} \exp\left[-i(\omega_1 t - k_1' z - \delta_1(0))\right], \tag{1}$$

где E_{10} — вещественная амплитуда, $k_1 = k_1' + ik_1''$ — волновой вектор, $\delta_1(0)$ — начальная фаза в точке $z = 0$. Приближение заданного поля возможно для СР с малой плотностью электронов, для частот волны вдали от собственных плазменных колебаний и в областях самоиндуцированной прозрачности [5]. Ниже, по крайней мере одно из этих условий предполагается выполненным. Исследуем возбуждение и распространение в этой системе слабой электромагнитной волны с частотой $\omega_2 = n_0\omega_1$ (n_0 — целое число) и — для простоты записи — с той же поляризацией электрического поля $E_2(z, t)$.

Согласно [3] электрический ток на частоте ω_2, возбуждаемый в СР под воздействием суммарного поля E_1+E_2, определяется выражением

$$j_{\omega_2}=\sigma_1(\omega_2,\ |E_1|)E_2+\sigma_2(\omega_2,\ |E_1|,\ n_0)\left(\frac{E_1}{|E_1|}\right)^{2n_0}E_2^*+ \\ +\sigma_3(\omega_2,\ |E_1|,\ n_0)\left(\frac{E_1}{|E_1|}\right)^{n_0}\equiv j_1+j_2+j_3, \tag{2}$$

где

$$\sigma_1(\omega_2,\ |E_1|)=\sigma_2(-\omega_2,\ |E_1|,\ n_0=0),$$

$$\sigma_2(\omega_2,\ |E_1|,\ n_0)=-i\frac{\omega_0^2}{4\pi}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\frac{J_\mu(\Omega_1/\omega_1)\,J_{\mu+2n_0}(\Omega_1/\omega_1)}{(1+i\mu\omega_1\tau)(\omega_2+\mu\omega_1-i\tau^{-1})}, \tag{3}$$

$$\sigma_3(\omega_2,\ |E_1|,\ n_0)=\frac{i}{2}j_0[1-(-1)^{n_0}]\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\frac{J_\mu(\Omega_1/\omega_1)\,J_{\mu+n_0}(\Omega_1/\omega_1)}{1+i\mu\omega_1\tau},$$

$$\Omega_1=\frac{eE_{10}d}{\hbar},\qquad j_0=\frac{\hbar\sigma_0}{e\tau d},\qquad \omega_0=\left(\frac{4\pi\sigma_0}{\tau}\right)^{1/2}$$

— плазменная частота свободной СР, d — период, σ_0 — линейная статическая проводимость вдоль периода, τ — время релаксации функции распределения, J_μ — функции Бесселя.

Входящие в ток (2) слагаемые играют различную роль в процессах возбуждения и распространения волны E_2. Первое слагаемое, являющееся единственным при $\omega_2\neq n_0\omega_1$, описывает несинхронные взаимодействия волн и определяет их «линейное» (не параметрическое) усиление (затухание) и изменение фазовых скоростей полем накачки. Второе слагаемое описывает синхронное взаимодействие волн и определяет распадную неустойчивость $2n_0$-порядка поля накачки через распадную неустойчивость низшего порядка нелинейного бестокового колебания функции распределения с частотой $2n_0\omega_1$ на два токовых колебания с частотой $n_0\omega_1$ каждый. Очевидно, что этот процесс, являясь многоквантовым, возможен лишь при условиях сильной нелинейности. Третье слагаемое имеет вид стороннего тока и описывает генерацию нечетных гармоник $n_0\omega_1$ в соответствии с нечетной нелинейностью СР.

Введем медленно меняющуюся комплексную амплитуду $a(z)$ соотношением

$$E_2(z,\ t)=a(z)\exp[-i(\omega_2t-k_2z-\delta_2(0))], \tag{4}$$

где $\delta_2(0)$ — начальная фаза волны при $z=0$, $k_2=k_2'+ik_2''$ определяется дисперсионным уравнением

$$k_2=\frac{\omega_2}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega_2,\ |E_1|)},\qquad \varepsilon(\omega_2,\ |E_1|)=\varepsilon_0+i\frac{4\pi}{\omega_2}\sigma_1(\omega_2,\ |E_1|), \tag{5}$$

ε_0 — диэлектрическая проницаемость СР без учета ее электронной поляризуемости. Усиление (затухание) волны, определяемое k_2'', будем называть «линейным». Соответствующие инкременты могут быть найдены из результатов работ [3, 4]. Используя обычную процедуру, получим укороченное уравнение для $a(z)$:

$$\frac{da}{dz}=\gamma\exp[i2(\alpha z-\varphi_0)]\,a^*+\beta\exp[k_2''z+i(\alpha z-\varphi_0)], \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered}\alpha = n_0 k_1' - k_2', \qquad \varphi_0 = \delta_2(0) - n_0\delta_1(0),\\ \gamma = \gamma' + i\gamma'' = -2\pi\frac{\omega_2}{c^2k_2}\sigma_2,\\ \beta = -2\pi\frac{\omega_2}{c^2k_2}\sigma_3.\end{gathered} \tag{7}$$

Величины α, β, γ через зависимость от $|E_1|$ являются медленными функциями координаты z. При решении уравнения (6) этой зависимостью мы будем пренебрегать. В этом случае, исключая a^*, уравнение (6) можно привести к уравнению второго порядка

$$\begin{gathered}\frac{d^2a}{dz^2} - i2\alpha\frac{da}{dz} - |\gamma|^2 a = [\beta^*\gamma + \beta(k_2'' - i\alpha)] \times\\ \times \exp[k_2''z + i(\alpha z - \varphi_0)].\end{gathered} \tag{8}$$

Из (6), (8) следует, что параметрическое усиление гармоники имеет экспоненциальный характер при $\mathrm{Re}\sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2} - k_2'' > 0$.

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ ЧЕТНОЙ ГАРМОНИКИ

Этот процесс определяется указанной выше распадной неустойчивостью порядка $2n_0$. Он описывается током j_2, ток $j_3 = 0$. Соответствующее уравнение (6) подобно уравнению для основной гармоники вырожденного параметрического усиления низшего порядка. Его спецификой, связанной с сильной нелинейностью системы, являются существенная зависимость величин α, γ, k_2 от амплитуды волны накачки и возможность «линейного» усиления гармоники. Для удобства исследования пространственного поведения гармоники введем вещественные амплитуду $u(z)$ и фазу $\varphi(z)$:

$$a(z) = u(z)\exp[i(\alpha z + \varphi - \varphi_0)]. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (6), получим систему двух уравнений для u, φ:

$$\begin{gathered}\frac{du}{dz} = (\gamma'\cos 2\varphi + \gamma''\sin 2\varphi)u,\\ \frac{d\varphi}{dz} = \gamma''\cos 2\varphi - \gamma'\sin 2\varphi - \alpha,\\ u(0) = E_2(0) \equiv E_0, \qquad \varphi(0) = \varphi_0.\end{gathered} \tag{10}$$

Для первого интеграла движения имеем

$$u = E_0\left[\frac{(d\varphi/dz)_0}{d\varphi/dz}\right]^{1/2}. \tag{11}$$

В области $|\alpha| > |\gamma|$, соответствующей большим рассогласованиям фазовых скоростей накачки и ее гармоники, координатная зависимость фазы определяется соотношением

$$z = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - |\gamma|^2}}\left\{\operatorname{arctg}\frac{(\alpha - \gamma'')\operatorname{tg}\varphi + \gamma'}{\sqrt{\alpha^2 - |\gamma|^2}} - \operatorname{arctg}\frac{(\alpha - \gamma'')\operatorname{tg}\varphi_0 + \gamma'}{\sqrt{\alpha^2 - |\gamma|^2}} + \right.$$

$$+\pi A\left(\frac{|\varphi|}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\operatorname{sgn}\left[(\alpha-\gamma'')(\varphi-\varphi_0)\right]\Bigg\},$$
$$-\frac{\pi}{2}<\varphi_0<\frac{\pi}{2}, \tag{12}$$

где $A(x)$ — целая часть x; z периодична по φ_0 с периодом π. В этом случае согласно (11), (12) амплитуда u — осциллирующая функция z с периодом

$$\Delta z=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-|\gamma|^2}}, \tag{13}$$

играющим роль эффективной когерентной длины.

В более интересной области параметров $|\alpha|<|\gamma|$, соответствующей малым рассогласованиям фазовых скоростей, имеем

$$z=\frac{1}{2}\left(|\gamma|^2-\alpha^2\right)^{-1/2}\left[\Phi(\varphi)-\Phi(\varphi_0)\right],$$
$$\Phi(\varphi)=\ln\left|\frac{\sqrt{|\gamma|^2-\alpha^2}+\gamma'+(\alpha+\gamma'')\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{|\gamma|^2-\alpha^2}-\gamma'-(\alpha+\gamma'')\operatorname{tg}\varphi}\right|. \tag{14}$$

Координата z является разрывной периодической функцией φ с периодом π. Качественный вид этой зависимости в переменных $\varphi-\bar{\varphi}$ и $x=2\sqrt{|\gamma|^2-\alpha^2}\,z+\Phi(\varphi_0)$ приведен на рис. 1. (Приведенные кривые количественно соответствуют одному частному случаю, рассмотренному ниже.) Указанные на рис. 1 асимптоты определяются значениями

$$\varphi_{1,2}=\operatorname{arctg}\left(\frac{-\gamma'\pm\sqrt{|\gamma|^2-\alpha^2}}{\gamma''+\alpha}\right)-\bar{\varphi},$$
$$\bar{\varphi}=-\operatorname{arctg}\frac{\gamma'}{\gamma''+\alpha}. \tag{15}$$

Амплитуда гармоники нарастает (затухает) экспоненциально с инкрементом

$$\lambda=\sqrt{|\gamma|^2-\alpha^2}-k_2''. \tag{16}$$

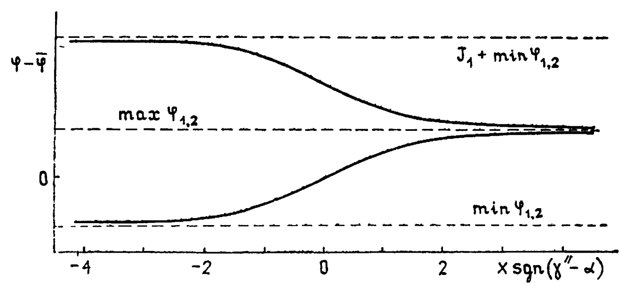

Рис. 1. Зависимость фазы четной гармоники от расстояния (верхняя штриховая линия соответствует значению $\varphi-\bar{\varphi}$, равному $\pi+\min\varphi_{1,2}$).

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. $\alpha=\gamma'=0$. Эта ситуация реализуется при согласованных фазовых скоростях в СР с $\tau \to \infty$. При этом, как правило, $k_2'' = 0$. Из (11), (14) имеем для этого случая

$$E_2 = E_0 \left\{ \frac{\cos 2\varphi_0}{2\operatorname{tg}(\varphi_0 + \pi/4)} \left[\exp(2\gamma'' z) \operatorname{tg}^2(\varphi_0 + \pi/4) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \exp(-2\gamma'' z) \right] \right\}^{1/2} \exp\left[-i(\omega_2 t - k_2 z - \varphi(z) - n_0 \delta_1(0)) \right], \tag{17}$$

$$z = \frac{1}{2\gamma''} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(\varphi + \pi/4)}{\operatorname{tg}(\varphi_0 + \pi/4)} \right|.$$

Кривая $\varphi(z)$ приведена на рис. 1, здесь

$$\begin{gathered} x = 2\gamma'' z + \ln |\operatorname{tg}(\varphi_0 + \pi/4)|, \\ \varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \qquad \varphi_2 = -\frac{\pi}{4}, \qquad \bar{\varphi} = 0. \end{gathered} \tag{18}$$

В частности, для $\varphi_0 = 0$

$$\begin{gathered} |E_2| = E_0 \sqrt{\operatorname{ch} 2\gamma'' z} \exp(-k_2'' z), \\ \varphi(z) = \frac{1}{2} \arcsin \operatorname{th}(2\gamma'' z). \end{gathered} \tag{19}$$

Для начальной разности фаз $\varphi_0 \neq \pi/4$ волна на больших расстояниях имеет вид

$$|E_2| \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \operatorname{sgn}(\gamma'') \sin 2\varphi_0} \exp\left[(|\gamma| - k_2'') z \right]. \tag{20}$$

Нарастание сразу становится экспоненциальным и имеет наибольшую амплитуду при $\varphi_0 = \pi/4$, $\gamma'' > 0$ и $\varphi_0 = -\pi/4$, $\gamma'' < 0$. В этих случаях $\varphi(z) = \text{const}$. (Здесь и ниже, говоря о затухании или усилении волн, мы для краткости, как правило, не будем учитывать очевидного влияния k_2''.) При начальной разности фаз $\varphi_0 = -\pi/4$, $\gamma'' > 0$ или $\varphi_0 = \pi/4$, $\gamma'' < 0$ волна экспоненциально затухает во всем пространстве с инкрементом, равным $|\gamma''| + k_2''$. Вблизи этих значений волна сначала затухает, а затем, с расстояний $z = \pm \frac{1}{2\gamma''} \ln |\operatorname{tg}(\varphi_0 + \pi/4)|$, начинает быстро нарастать.

2. $\varphi_0 = 0$, $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Поскольку характер поведения волны E_2 существенно зависит от начальной разности фаз φ_0 лишь на малых расстояниях, случай $\varphi_0 = 0$ обладает всеми характерными особенностями поведения поля E_2 на больших расстояниях для произвольных α, γ. Из (11), (14) имеем для этого случая

$$\begin{gathered} E_2 = E_0 \left[\frac{(|\gamma|^2 - \alpha\gamma'') \operatorname{ch} 2y + \gamma' \sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2} \operatorname{sh} 2y + \alpha(\gamma'' - \alpha)}{|\gamma|^2 - \alpha^2} \right]^{1/2} \times \\ \times \exp\left[-k_2'' z - i(\omega_2 t - n_0 k_1' z - \varphi(z) - \delta_2(0)) \right], \end{gathered} \tag{21}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma'' - \alpha}{\sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2} \operatorname{cth} y + \gamma'}, \qquad y = \sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2}\, z .$$

При фазовом рассогласовании, определяемом равенством $|\alpha| = |\gamma|$, имеем

$$|E_2| = E_0 [1 + 2\gamma' z + 4(|\gamma|^2 - \alpha\gamma'') z^2]^{1/2} \exp(-k_2'' z),$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(\gamma'' - \alpha) z}{1 + \gamma' z}. \tag{22}$$

Из (22) видно, что при $\gamma' = 0$, $\alpha = \gamma''$ усиление отсутствует, $\varphi = \varphi_0 = 0$. Поведение волны полностью определяется дисперсионным уравнением (5). При $|\alpha| = |\gamma|$, $\alpha\gamma'' \neq |\gamma|^2$ усиление волны слабое. На больших расстояниях оно пропорционально z, как и в случае генерации волн на комбинационных частотах при полном фазовом синхронизме. Подчеркнем, что в рассматриваемом нами случае синхронизм отсутствует.

3. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ НЕЧЕТНОЙ ГАРМОНИКИ

Этот процесс существует для нечетных n_0 и описывается одновременно токами j_2 и j_3.

Из уравнения (8) находим

$$E_2 = \Big\{ \delta + (E_0 e^{i\varphi_0} - \delta) \operatorname{ch}\left(\sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2}\, z\right) e^{-k_2'' z} + \\ + [\beta - k_2'' \delta + (\gamma e^{-i\varphi_0} - i\alpha e^{i\varphi_0}) E_0] \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2}\, z\right)}{\sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2}} \times \\ \times e^{-k_2'' z} \Big\} \exp[-i(\omega_2 t - n_0 k_1' z - n_0 \delta_1(0))], \tag{23}$$

где

$$\delta = \frac{\beta^* \gamma + \beta (k_2'' - i\alpha)}{(k_2'')^2 + \alpha^2 - |\gamma|^2}. \tag{24}$$

При $\gamma = 0$ формула (23) описывает обычную генерацию нечетной гармоники. При нулевых граничных условиях $E_0 = 0$ и $\gamma \neq 0$ она описывает генерацию нечетной гармоники и последующее ее параметрическое усиление. Этот случай представляет наибольший интерес. Естественно, что начальная разность фаз при этом не играет роли.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. $\beta' = \gamma' = k_2'' = 0$. Эта ситуация реализуется в СР с $\omega_{1,2}\tau \to \infty$. Из (23) имеем

$$E_2 = \Big\{ \frac{\beta''}{\alpha - \gamma''} \left[1 - \operatorname{ch}\left(\sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2}\, z\right)\right] + i \frac{\beta''}{\sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2}\, z\right) + \\ + \Big[e^{i\varphi_0} \operatorname{ch}\left(\sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2}\, z\right) + \frac{i}{\sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2}} (\gamma'' e^{-i\varphi_0} - \alpha e^{i\varphi_0}) \times \\ \times \operatorname{sh}\left(\sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2}\, z\right) \Big] E_0 \Big\} \exp[-i(\omega_2 t - n_0 k_1' z - n_0 \delta_1(0))]. \tag{25}$$

Параметрическая генерация преобладает над параметрическим усилением для любых φ_0 при

$$|\beta''| > |\alpha - \gamma''| \left|\frac{\alpha + \gamma''}{2\gamma''}\right|^{1/2} E_0, \qquad |\gamma| > |\alpha|; \tag{26}$$

$$|\beta''| > \frac{1}{2} |\alpha - \gamma''| \left(\frac{|\alpha| + |\gamma''|}{|\alpha| - |\gamma''|}\right)^{1/2} E_0, \qquad |\gamma| < |\alpha|. \tag{27}$$

При $\gamma'' = \alpha$

$$|E_2| = |\alpha\beta'' z^2 + i\beta'' z + E_0 [e^{i\varphi_0} + 2\alpha z \sin\varphi_0]|, \tag{28}$$

т. е. в этом случае за счет параметрической генерации амплитуда гармоники на больших расстояниях растет квадратично. Параметрическое усиление при этом роли не играет. При $\varphi_0 = 0$ оно вообще отсутствует.

При $\gamma'' = -\alpha$

$$|E_2| = |(\beta'' + 2\gamma'' \cos\varphi_0 E_0) z - ie^{i\varphi_0} E_0|, \tag{29}$$

т. е. амплитуда гармоники линейно нарастает с расстоянием. Параметрическая генерация превышает параметрическое усиление при

$$|\beta''| > |2\gamma'' \cos\varphi_0| E_0. \tag{30}$$

2. $k_2'' > 0$ (наличие «линейного» затухания). Если $\mathrm{Re}\sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2} > k_2''$, амплитуда гармоники экспоненциально нарастает с расстоянием, если $\mathrm{Re}\sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2} < k_2''$, то на больших расстояниях она стремится к постоянному значению

$$|E_2|_\infty = |\delta|, \tag{31}$$

соответствующему вынужденной волне. При $k_2'' = \mathrm{Re}\sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2}$ и $k_2'' z \gg 1$

$$E_2 \approx \frac{1}{2k_2''} [\beta^* \gamma + \beta(k_2'' - i\alpha)] z \exp[-i(\omega_2 t - n_0 k_1' z)]. \tag{32}$$

Выражения (31) и (32) полностью обусловлены параметрической генерацией. Собственно параметрическое усиление роли не играет.

3. $k_2'' < 0$ (наличие «линейного» усиления). При любых значениях остальных параметров амплитуда гармоники экспоненциально нарастает в пространстве. При $|\gamma| > |\alpha|$ параметрическая генерация превосходит параметрическое усиление для любых φ_0, если выполнено неравенство

$$\left|\delta + \frac{k_2''\delta - \beta}{\sqrt{|\gamma|^2 - \alpha^2}}\right| > E_0. \tag{33}$$

Приведем некоторые количественные оценки для СР с пренебрежимо малым поглощением. В этом случае согласно (3) и [3] имеем

$$\varepsilon(\omega_2, |E_1|) = \varepsilon_0 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2^2}\left[J_0^2\left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right) - J_{n_0}^2\left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right)\right],$$

$$\sigma_2(\omega_2, |E_1|) = -i\,\frac{\omega_0^2}{4\pi\omega_2}\left[J_0\left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right) J_{2n_0}\left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right) - (-1)^{n_0} J_{n_0}^2\left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right)\right], \tag{34}$$

$$\sigma_3(\omega_2, |E_1|) = i j_0 J_0\left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right) J_{n_0}\left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right),$$

$$k_1 \approx \frac{\omega_1}{c}\sqrt{\varepsilon_0 - \frac{2\omega_0^2}{\Omega_1\omega_1} J_0\left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right) J_1\left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right)}.$$

Выражение для k_1 написано с учетом эффекта самовоздействия и в пренебрежении влиянием гармоник. В соответствии с приближением заданного поля второе слагаемое подкорневого выражения должно быть малым по сравнению с первым. Ниже будем считать $\varepsilon(\omega_2, |E_1|) > 0$, что соответствует $k_2'' = 0$. Случай $\varepsilon(\omega_2, |E_1|) < 0$ соответствует области непрозрачности для волны и поэтому менее интересен. Рассмотрим два примера.

1. $J_0(\Omega_1/\omega_1) = 0$ $(\Omega_1/\omega_1 = 2{,}41;\ 5{,}52;\ 8{,}65;\ \ldots)$. Это область самопрозрачности. Для СР с периодом $d = 200$ Å при длине волны сигнала $\lambda_2 = 2$ *мм* это условие реализуется при полях

$$E_{10} \approx (740;\ 1700;\ 2680;\ \ldots)\, n_0^{-1}\ В/см,$$

т. е. довольно слабых. В этом случае генерируемые при $E_2 = 0$ полем E_1 токи на всех гармониках отсутствуют [5]. Поэтому приближение заданного однородного поля выполняется с большой точностью. Для величин α, β, γ имеем

$$\alpha = \frac{\omega_2\sqrt{\varepsilon_0}}{c}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\varepsilon_0\,\omega_2^2} J_{n_0}^2\left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right)}\right], \qquad \beta = 0,$$
$$\gamma = (-1)^{n_0+1}\frac{i\,\omega_0^2}{2c\omega_2}\,\frac{J_{n_0}^2(\Omega_1/\omega_1)}{\sqrt{\varepsilon_0 + (\omega_0^2/\omega_2^2)\, J_{n_0}^2(\Omega_1/\omega_1)}}. \tag{35}$$

Легко видеть, что в этом случае всегда $|\gamma| < |\alpha|$ и амплитуда волны E_2 периодична по z. Существует только параметрическое усиление четных и нечетных гармоник. Параметрическая генерация нечетных гармоник отсутствует $(\beta = 0)$. Если

$$\left[\frac{\omega_0}{\omega_2} J_{n_0}\left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right)\right]^2 \ll \varepsilon_0, \tag{36}$$

то

$$\sqrt{\alpha^2 - |\gamma|^2} \approx \frac{1}{\sqrt{8}}\left|\frac{\omega_0 J_{n_0}(\Omega_1/\omega_1)}{\omega_2\,\varepsilon_0^{1/2}}\right|^3 k_2 \ll k_2. \tag{37}$$

Рассогласование фазовых скоростей при этом мало, эффективная когерентная длина большая. Поэтому параметрическое преобразование поля E_1 в свои гармоники значительное, хотя и происходит медленно. При выполнении противоположного (36) неравенства $\alpha \sim 2i\gamma \sim k_2$, т. е. рассогласование фазовых скоростей значительное и параметрическое усиление гармоник практически отсутствует.

2. Полный синхронизм $(\alpha = 0)$. Согласно (34) этот случай реализуется при выполнении равенства

$$2n_0^2\frac{\omega_1}{\Omega_1} J_0\left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right) J_1\left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right) = J_0^2\left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right) - J_{n_0}^2\left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right). \tag{38}$$

При $n_0 = 2$ решениями уравнения (38) являются $\Omega_1/\omega_1 = 2{,}74$; 5,7. Для приведенных выше параметров им соответствуют поля $E_{10} \approx \approx 425$ и 880 *В/см*. При $n_0 = 3$ соответственно имеем $\Omega_1/\omega_1 \approx 2{,}43$; 5,65 и $E_{10} \approx 250$ и 580 *В/см*.

Рассмотрим параметрическое усиление второй гармоники при $\Omega_1 = 2{,}74\ \omega_1$. Из (8), (34) имеем

$$\gamma \approx -i \frac{0{,}1\, k_2}{\varepsilon_0 (\omega_2/\omega_0)^2 + 0{,}2}, \qquad k_2'' = 0. \tag{39}$$

Следовательно, усиление второй гармоники имеет быстрый экспоненциальный характер. Приближение заданного поля требует выполнения неравенства $\varepsilon_0 (\omega_2/\omega_0)^2 \gg 0{,}2$.

Рассмотрим теперь параметрическую генерацию третьей гармоники при $\Omega_1 \approx 2{,}43\, \omega_1$. В этом случае поле описывается формулой (25) с

$$\gamma \approx i \frac{\omega_0^2}{c\, \omega_2} \frac{0{,}02}{\sqrt{\varepsilon_0 + 0{,}04 (\omega_0/\omega_2)^2}}, \qquad \beta \approx 0{,}064 \frac{\hbar \omega_2}{ed} \gamma. \tag{40}$$

Параметрическая генерация третьей гармоники в этом случае также имеет экспонециальный характер. Для приведенных выше параметров $\beta/\gamma \approx 19$ *В/см*. Следовательно, в этом случае параметрическая генерация превышает параметрическое усиление третьей гармоники при граничных полях $E_0 < 27$ *В/см*, а обычную генерацию — с расстояний $z \gtrsim 5 \sqrt{\varepsilon_0} \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2 \lambda_2$.

В заключение выражаю благодарность А. М. Белянцеву и Л. А. Островскому за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Tsu, L. Esaki, Appl. Phys. Lett., 19, 246 (1971).
2. Ю. А. Романов, Оптика и спектроскопия, 33, 917 (1972).
3. Л. К. Орлов, Ю. А. Романов, ФТТ, 19, 726 (1977).
4. В. В. Павлович, ФТТ, 19, 97 (1977).
5. А. А. Игнатов, Ю. А. Романов, ФТТ, 17, 3388 (1975).
6. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.

Научно-исследовательский
физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
23 апреля 1979 г.

UPWARDS PARAMETRIC FREQUENCY TRANSFORMATION IN SUPERLATTICES

Yu. A. Romanov

Degenerate parametric amplification of even harmonic and parametric generation of uneven harmonic in a superlattice are considered under the condition of a strong nonlinearity.