

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДАЙСОНА ПРИ ИЗУЧЕНИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОРОТКИХ ВОЛН В ГАУССОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

Н. А. Арманд, В. Н. Секистов

На основе нелинейного приближения Крейчнана для уравнения Дайсона исследуется распространение когерентных коротких волн в гауссовой турбулентной среде, в случае, когда методы параболического уравнения и приближения Бурре непригодны. Получены асимптотические выражения для функции Грина рассматриваемого уравнения в нулевом и первом приближениях итераций для одно- и трехмерных неоднородностей среды. На их основе установлено явление «разбухания» поля вблизи источника (в одномерном случае), возможность «турбулентного просветления» среды, имеющей отрицательное среднее значение диэлектрической проницаемости, а также наличие обратных волн, идущих к источнику. На примере задачи, имеющей точное решение, показана эффективность развитого метода.

Метод параболического уравнения, эффективно применяемый для изучения задач распространения коротких волн в турбулентных средах [1-4], как и уравнение Дайсона в приближении Бурре для массового оператора [5-8] применимы для слаботурбулентной среды — при [8, 9]

$$(p\sigma)^2 \ll 1 \quad (1)$$

($p = k_0 l \gg 1$; $k_0 = 2\pi/\lambda$ — волновое число в вакууме, l — радиус корреляции, σ^2 — дисперсия неоднородностей диэлектрической проницаемости среды).

Ввиду того, что в ряде экспериментальных задач (см., например, [10]) рассеяние волн в стороны и назад играет важную роль, в настоящей работе предлагается для его учета использовать уравнение Дайсона в нелинейном приближении Крейчнана для массового оператора [4, 7, 11-13]. Такое приближение суммирует большую подпоследовательность диаграмм, чем приближение Бурре [4, 7, 12]. В [12, 13] нелинейное приближение было использовано для изучения уравнения первого порядка в частном случае, допускающем точное решение; при этом удалось получить приближенное решение задачи, приближение Бурре для которой совершенно непригодно. Это позволяет надеяться, что применение нелинейного приближения в уравнении Дайсона к задаче распространения коротких волн в турбулентной среде даст возможность ослабить ограничение (1) и учесть эффекты многократного рассеяния в стороны и назад.

Нахождению функций Грина для нелинейного уравнения Дайсона, в случае, когда (1) не выполняется, посвящена настоящая работа, являющаяся продолжением и развитием [14-16].

1. ОДНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ. НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Уравнение Дайсона в нелинейном приближении для массового оператора для функции Грина G имеет в одномерном случае вид [11]

$$G''(x, x_0) + k_0^2 \epsilon_0 G(x, x_0) = \delta(x - x_0) + \quad (2)$$

$$+ k_0^4 \int_{-\infty}^{\infty} B(x', x) G(x', x) G(x', x_0) dx'$$

($\epsilon_0 = \text{const}$ — регулярная часть; $B(x', x) = \langle \epsilon_1(x') \epsilon_1(x) \rangle$ — функция корреляции случайной части диэлектрической проницаемости гауссовой среды $\epsilon(x) = \epsilon_0 + \epsilon_1(x)$).

Считая среду безграничной и однородной, поступим аналогично [11, 14–16], применяя для его решения преобразование Фурье, записанное в виде

$$G(\rho) = \frac{1}{4\pi k_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i q \tau} d\tau, \quad (3)$$

$$q = k_0 \rho, \quad \rho = x - x_0.$$

Используя (3) в (2), перейдем к уравнению для спектра функции Грина $f(\tau)$:

$$k_0^2 f(\tau) J(\tau) - (\epsilon_0 - \tau^2) f(\tau) + 2 = 0, \quad (4)$$

где

$$J(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\rho) G(\rho) \exp(i k_0 \rho \tau) d\rho \quad (5)$$

(для статистически однородной среды $B(x', x) = B(|x' - x|)$).

Выражение (5) можно переписать также в виде

$$J(\tau) = \frac{\sigma^2}{2k_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) f\left(-\tau + \frac{t}{p}\right) dt,$$

где

$$\sigma = \sqrt{B(0)}, \quad \Phi(t) = \frac{1}{2\pi l \sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} B(\rho) \exp(-it\rho/l) d\rho$$

— безразмерный спектр неоднородностей диэлектрической проницаемости среды.

Это позволяет записать нелинейное уравнение Дайсона для спектра функции Грина (4) в виде

$$\sigma^2 f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) f\left(-\tau + \frac{t}{p}\right) dt - 2(\epsilon_0 - \tau^2) f(\tau) + 4 = 0. \quad (6)$$

Если $\sigma \ll 1$, решение этого уравнения можно искать итерациями, считая первый член в левой части (6) малым. При этом приходим к приближению Бурре, область применимости которого определяется при $p \gg 1$ неравенством (1).

Однако в интересующем нас случае $p \gg 1$ можно провести итерации в (6) по-другому, без использования условия $\sigma \ll 1$ (хотя условие $\sigma^4 \ll 1$ является ограничением самого нелинейного приближения в уравнении Дайсона [17]). Это, как уже отмечалось выше, позволяет надеяться на ослабление неравенства (1).

Для этого заметим, что, в силу наличия в интеграле в (6) спектра неоднородностей среды $\Phi(t)$, существенной областью интегрирования является интервал $(-1, 1)$. Поэтому функцию $f(-\tau + t/p)$ можно при $p \gg 1$ разложить в ряд Тейлора по степеням t/p :

$$f\left(-\tau + \frac{t}{p}\right) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(\tau)}{n!} \left(\frac{t}{p}\right)^n \quad (7)$$

(для однородной среды $f(-\tau) = f(\tau)$). Подставляя (7) в уравнение (6), можно после преобразований переписать его в виде

$$f(\tau) \doteq \frac{\varepsilon_0 - \tau^2 + \sqrt{(\varepsilon_0 - \tau^2)^2 - 4\sigma^2 A(\tau)}}{\sigma^2 A(\tau)}, \quad (8)$$

удобном для итераций. Здесь

$$A(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(2m)}(\tau)}{f(\tau)} \frac{y_{2m}}{p^{2m}} = 1 + \frac{f''(\tau)}{f(\tau)} \frac{y_2}{p^2} + \dots \quad (9)$$

Числа y_{2m} — члены разложения в ряд Тейлора функции корреляции неоднородностей в окрестности нуля:

$$B(-il) = \sigma^2 \sum_{m=0}^{\infty} y_{2m} \quad (y_{2m+1} \equiv 0),$$

$$y_{2m} = \frac{1}{(2m)!} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) t^{2m} dt = \frac{(-1)^m}{\sigma^2} \frac{B^{(2m)}(0)}{(2m)!} t^{2m}. \quad (10)$$

Выражения (8), (9) удобны для нахождения спектра функции Грина итерациями в предположении $p \gg 1$. Отметим, что при их выводе не было использовано предположение о малости дисперсии неоднородностей среды σ^2 .

Полагая в нулевом приближении итераций $p \rightarrow \infty$ и $A(\tau) \approx A_0(\tau) = 1$, получим спектр функции Грина нулевого приближения:

$$f_0(\tau) = \frac{\varepsilon_0 - \tau^2 + \sqrt{(\varepsilon_0 - \tau^2)^2 - 4\sigma^2}}{\sigma^2}. \quad (11)$$

Приблизненно вычисляя (9) с помощью (11) (удерживая первые два члена асимптотического разложения для функции $A(\tau)$) и используя его в (8), получим спектр функции Грина первого приближения в виде (8), где

$$A(\tau) \approx A_1(\tau) = 1 - \frac{4\tau^2(\varepsilon_0 - \tau^2)y_2}{p^2 Z^3} \left[1 - \frac{Z}{\varepsilon_0 - \tau^2} + \frac{Z^2}{2\tau^2(\varepsilon_0 - \tau^2)} \right], \quad (12)$$

$$Z = \sqrt{(\varepsilon_0 - \tau^2)^2 - 4\sigma^2}.$$

Перейдем к вычислению функции Грина.

В нулевом приближении итераций используем (11) в (3) и замыкаем контур интегрирования C при $\rho > 0$ в верхней полуплоскости комплексного переменного τ :

$$G_0(\rho) = \frac{1}{4\pi k_0 \sigma^2} \oint_C \sqrt{(\varepsilon_0 - \tau^2)^2 - 4\sigma^2} e^{iq\tau} d\tau. \quad (13)$$

Подынтегральное выражение имеет четыре точки ветвления:

$$\tau_{1-4} = \pm \sqrt{\varepsilon_0 \pm 2\sigma}, \quad (14)$$

Для вычисления (13) вблизи источника — при $q \mid \tau_1 - \tau_2 \mid \ll 1$ проведем разрезы комплексной плоскости между точками τ_1 и τ_2 ; τ_3 и τ_4 (см. рис. 1а, б; считаем, что ε_0 имеет исчезающе малую мнимую часть) и перейдем к интегрированию вдоль берегов правого разреза. Разлагая экспоненту в (13) в ряд, получим

$$G_0(\rho) = - \frac{i}{2\pi k_0 \sigma^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iq)^n}{n!} I_n, \quad (15)$$

$$I_n = \int_{\tau_2}^{\tau_1} \sqrt{4\sigma^2 - (\varepsilon_0 - \tau^2)^2} \tau^n d\tau.$$

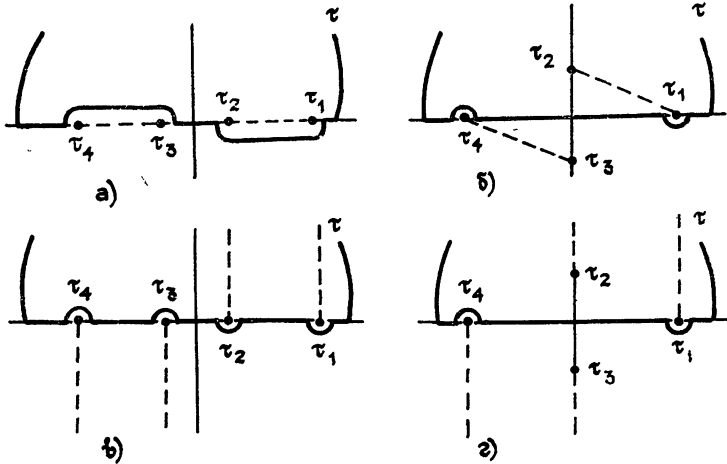


Рис. 1. а), в) $\varepsilon_0 > 2\sigma$, б), г) $\varepsilon_0 < 2\sigma$.

Интегралы I_0 и I_1 могут быть вычислены: I_0 — в полных эллиптических интегралах K и E по формулам [18] (стр. 262), I_1 — в элементарных функциях. В результате для (15) получим

$$G_0(\rho) \sim - \frac{i}{2k_0 \sqrt{\varepsilon_0}} [V(s) + iq \sqrt{\varepsilon_0} + O(q^2 \mid \tau_1 - \tau_2 \mid^2)]. \quad (16)$$

Здесь функция $V(s)$ имеет смысл отношения найденной функции Грина к функции Грина пространства без неоднородностей:

$$V(s) = \frac{8\sqrt{s+1}}{3\pi s^2} \left[E\left(\sqrt{\frac{2s}{s+1}}\right) - (1-s)K\left(\sqrt{\frac{2s}{s+1}}\right) \right] \quad (17)$$

$$\left(s = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0} \leq 1 \right);$$

$$V(s) = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi s^{3/2}} \left\{ (s-1)K\left(\sqrt{\frac{s+1}{2s}}\right) + 2E\left(\sqrt{\frac{s+1}{2s}}\right) \right\} - \quad (18)$$

$$- i \left[(s+1)K\left(\sqrt{\frac{s-1}{2s}}\right) - 2E\left(\sqrt{\frac{s-1}{2s}}\right) \right] \quad (s \geq 1).$$

При $s \rightarrow 0$, используя представления эллиптических интегралов в виде рядов [19], получим

$$V(s) \rightarrow 1 + \frac{3}{32} s^2 + O(s^4). \quad (19)$$

В обратном случае $q | \tau_1 - \tau_2 | \gg 1$ проведем разрезы комплексной плоскости τ от точек ветвления на $\pm i\infty$ (см. рис. 1в, г). Переходя к интегрированию вокруг разрезов, лежащих в верхней полуплоскости, получим, что $G_0(p) = g_1(p) + \frac{1}{2}g_2(p)$, где

$$g_j(p) = \frac{1}{4\pi k_0} \oint_{C_j} \frac{V(\varepsilon_0 - \tau^2)^2 - 4\sigma^2}{\sigma^2} e^{iq\tau} d\tau. \quad (20)$$

Контур C_j охватывает разрез, проведенный из точки ветвления τ_j ($j = 1, 2$) на $i\infty$.

Сделаем в (20) замену $\tau = \tau_j + it$ и перейдем к интегрированию вдоль берегов разреза. При этом существенной для интегрирования будет область, примыкающая к точке ветвления τ_j , поэтому разложим подынтегральный корень по степеням t . Используя [18] (стр. 331), получим

$$\begin{aligned} g_j(p) &= \frac{i\sqrt{2\tau_j}}{\pi k_0 \sigma^{3/2}} \exp(iq\tau_j + i\varphi_j) \int_0^\infty \sqrt{t} [1 + O(t)] e^{-qt} dt \sim \\ &\sim \frac{i}{\sqrt{2\pi} k_0} \frac{\sqrt{\tau_j} \exp(iq\tau_j + i\varphi_j)}{(q\sigma)^{3/2}} \left[1 + O\left(\frac{1}{q|\tau_1 - \tau_2|}\right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь φ_j — аргумент корня в (20) на правом берегу разреза C_j . В результате для функции Грина нулевого приближения будем иметь

$$G_0(p) \sim \frac{V\sqrt{\tau_1} \exp\left(iq\tau_1 + \frac{i3\pi}{4}\right) - V\sqrt{\tau_2} \exp\left(iq\tau_2 - \frac{i3\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi} k_0 (q\sigma)^{3/2}}. \quad (22)$$

В частном случае $\sigma \ll 1$ при $q | \tau_1 - \tau_2 | \approx q\sigma/\sqrt{\varepsilon_0} \gg 1$ выражение (22) совпадает с полученным в [11].

Вычислим теперь функцию Грина в первом приближении итераций. Точки ветвления спектра первого приближения $f_1(\tau)$ найдем, приравняв нулю подкоренное выражение в (8) при учете (12). В результате придем к алгебраическому уравнению

$$Z^5 = \frac{16\sigma^2 \tau^2 (\tau^2 - \varepsilon_0) y_2}{p^2} \left[1 + \frac{Z}{\tau^2 - \varepsilon_0} + \frac{Z^2}{2\tau^2 (\varepsilon_0 - \tau^2)} \right], \quad (23)$$

которое будем решать итерациями. Полагая при $p \rightarrow \infty$ $Z_0 = 0$ и используя это выражение в правой части (23), получим после вычислений, что каждая точка ветвления нулевого приближения τ_{1-4} при переходе к первой итерации расщепляется на пять. Всего двадцать точек ветвления:

$$\begin{aligned} \tau_{5-24} &= \pm \left[\varepsilon_0 \pm 2\sigma \sqrt{1 + \left(\frac{V|\varepsilon_0 \pm 2\sigma|}{p\sigma}\right)^{4/5} y_2^{2/5} \exp\left(i\frac{2\pi m}{5}\right)} \right]^{1/2} \\ &(m = 0, 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (24)$$

(Здесь берутся одинаковые знаки перед 2σ в двух местах формулы.)
Расположение точек ветвления спектра функции Грина первого

приближения (24) на комплексной плоскости τ показано на рис. 2 их номерами:

а) для случая

$$\epsilon_0 > 2\sigma \left[1 + \left(\frac{\sqrt{|\epsilon_0 - 2\sigma|}}{p\sigma} \right)^{4/5} y_2^{2/5} \right]^{1/2},$$

б) для случая

$$\epsilon_0 < 2\sigma \left[1 - \left(\frac{\sqrt{|\epsilon_0 - 2\sigma|}}{p\sigma} \right)^{4/5} y_2^{2/5} \right]^{1/2}.$$

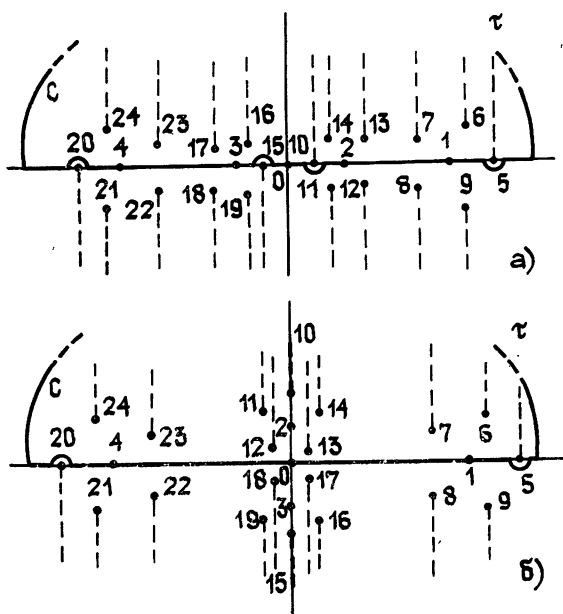


Рис. 2.

Таким образом, спектр функции Грина первого приближения $f_1(\tau)$ является регулярной функцией на комплексной плоскости τ с разрезами, которые в данном случае удобно провести из точек ветвления τ_j ($j=5-24$) на $\pm i\infty$. Подставляя этот спектр в (3) и замыкая контур интегрирования при $\rho > 0$ в верхней полуплоскости, перейдем к интегрированию вокруг разрезов. В результате будем иметь

$$G_1(\rho) = \sum_j g_j(\rho). \quad (25)$$

В этом случае $g_j(\rho)$ определяется из (20) с заменой σ^2 на $\sigma^2 A(\tau)$. Суммирование в (25) проводится по тем номерам точек ветвления из (24), которые лежат в верхней полуплоскости $\text{Im } \tau > 0$. Заменяя приближенно функцию $A_1(\tau)$ в выражении $g_j(\rho)$ на ее значение в самой точке ветвления τ_j (возможность этого будет обсуждена ниже) и полагая

$$\sigma_j^2 = \sigma^2 A_1(\tau_j) = \sigma^2 \left[1 + \left(\frac{\sqrt{|\epsilon_0 \pm 2\sigma|}}{p\sigma} \right)^{4/5} y_2^{2/5} \exp\left(i \frac{2\pi m}{5}\right) \right]^2; \quad (26)$$

получим, используя (21),

$$g_j(\rho) \approx \frac{i}{\sqrt{2\pi} k_0} \frac{\sqrt{\tau_j} \exp(iq\tau_j + i\varphi_j)}{(q\sigma_j)^{3/2}} \left[1 + O\left(\frac{1}{|q|\tau_2 - \tau_1|}\right) \right]. \quad (27)$$

Используя (27) в (25), получим асимптотическое представление для функции Грина первого приближения:

$$G_1(\rho) \sim \frac{i}{\sqrt{2\pi} k_0} \sum_j \frac{\sqrt{\tau_j} \exp(iq \tau_j + i\varphi_j)}{(q \sigma_j)^{3/2}}. \quad (28)$$

Аргументы φ_j определяются для различных j из числа входящих в сумму (28) из табл. 1.

Таблица 1

$$a) \varepsilon_0 > 2\sigma \left[1 + \left(\frac{\sqrt{|\varepsilon_0 - 2\sigma|}}{\rho\sigma} \right)^{4/5} y_2^{2/5} \right]^{1/2}$$

j	5	6	7	10	13	14	16	17	23	24
φ_j/π	1/4	-3/4	1/4	-1/4	-1/4	3/4	-3/4	1/4	-1/4	3/4

$$б) \varepsilon_0 < 2\sigma \left[1 - \left(\frac{\sqrt{|\varepsilon_0 - 2\sigma|}}{\rho\sigma} \right)^{4/5} y_2^{2/5} \right]^{1/2}$$

j	5	6	7	10	11	12	13	14	23	24
φ_j/π	1/4	-3/4	1/4	0	0	1	1	0	-1/4	3/4

2. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНИМОСТИ

Проанализируем выражения для функций Грина, полученные в предыдущем разделе.

Вблизи источника можно ограничиться формулами (16) — (18) нулевого приближения итераций. На рис. 3 штрихпунктирной линией показана зависимость модуля нормированной функции Грина $|V(s)|$, определяющая величину поля при $\rho = 0$, от степени турбулентности среды $s = 2\sigma/\varepsilon_0$. Видно, что при $0 < s \leq 3$ наблюдается эффект «разбухания» поля вблизи источника, так как модуль функции Грина в турбулентной среде превосходит ее значение, наблюдаемое для свободного пространства.

Анализ выражений (22) и (28), справедливых в дальней зоне, позволяет установить еще две особенности.

Это, во-первых, эффект «турбулентного просветления среды», заключающийся в том, что в непрозрачной среде (имеющей $\varepsilon_0 < 0$, например, в плазме при частоте поля, меньшей критической) при достаточно большой величине дисперсии неоднородностей среды σ , а именно при

$$\varepsilon_0 + 2\sigma_j > 0, \quad (29)$$

кроме экспоненциально затухающей волны появляется также и распространяющаяся, что может привести к значительному усилению когерентного поля, распространяющегося в среде вдали от источника. Это иллюстрирует рис. 4, где штрихпунктирной линией показана зависимость модуля функции Грина (22) в нулевом приближении итераций, нормированного на функцию Грина пространства без неоднородностей, в децибелах от логарифма дисперсии неоднородностей среды σ при $\varepsilon_0 = -0,5$,

$q=20$. Из анализа выражений (24), (28) видно, что этот эффект сохраняется и при переходе к первому приближению.

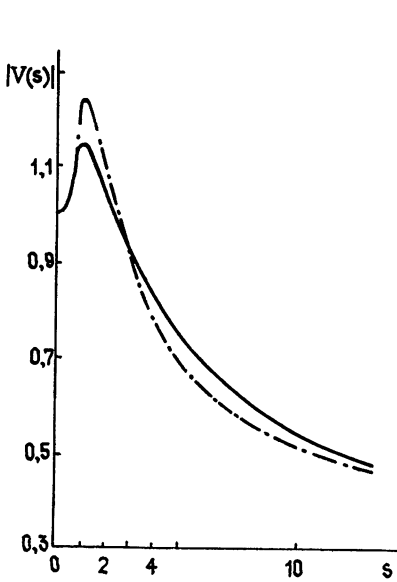


Рис. 3.

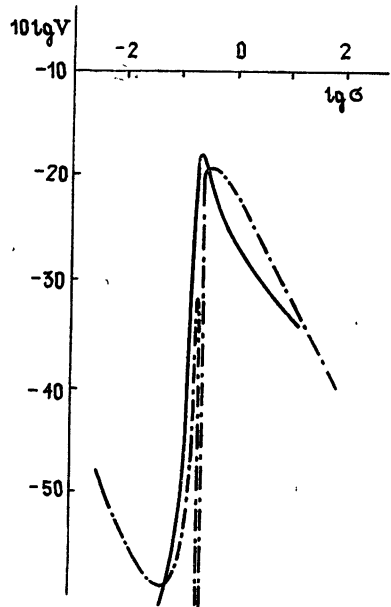


Рис. 4.

Во-вторых, это появляющиеся в первом приближении итераций обратные волны, идущие к источнику. Они отвечают тем точкам ветвления из (24), которые лежат во втором квадранте комплексной плоскости τ

(см. рис. 2). Обратные волны возникают из-за отражения от случайных неоднородностей среды. При этом чем меньше радиус ее корреляции, тем больше амплитуда обратных волн (условие $p \gg 1$ должно при этом сохраняться). В обратном случае $p \rightarrow \infty$, когда радиус корреляции в среде бесконечно возрастает и отражения от границ неоднородностей нет, то нет и обратных волн. Математически при этом точки ветвления, соответствующие обратным волнам, входящие в сумму (28), сливаются, а интегралы вокруг разрезов, проведенных из τ_j на $i\infty$, «гасят» друг друга. Выражение (28) при этом переходит в нулевое приближение (22). На рис. 5 показаны зависимости отношения W модуля обратной волны, порождаемой точками ветвления $\tau_{23} - \tau_{24}$,

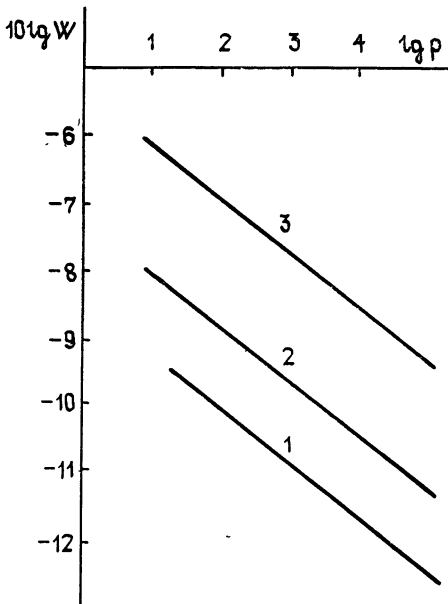


Рис. 5.

к модулю прямой $\tau_5 - \tau_{10}$ в децибелах в зависимости от логарифма параметра $p = k_0 l$ при $\epsilon_0 = 1$ и различных значениях s : $s = 0,2$ (линия 1), $s = 0,8$ (2), $s = 4,0$ (3). Видно, что обратные волны могут со-

ставлять значительную долю когерентного поля — проценты и десятки процентов от величин прямых волн. Эта доля увеличивается также с уменьшением внутреннего масштаба турбулентности среды (ростом y_2 и, следовательно, $B''(0)$).

Перейдем к анализу области применимости развитого метода решения нелинейного уравнения Дайсона. Она определяется из условия сходимости процесса итераций в (8), (9) при нахождении спектра функции Грина. Для этого точки ветвления спектра функции Грина нулевого приближения должны сдвигаться в первом приближении слабо, для чего необходимо, чтобы второй член суммы (9) был мал по сравнению с единицей в существенной для интегрирования области — в окрестности точек ветвления. Отсюда приходим к условию

$$\left(\frac{p\sigma}{\sqrt{|\epsilon_0 \pm 2\sigma|}} \right)^{4/5} \gg y_2^{2/5}. \quad (30)$$

При малых значениях σ выражение (30) переходит в $p\sigma/\sqrt{\epsilon_0} \gg \sqrt{y_2} \sim 1$, что обратно условиям применимости приближения Бурре в случае коротких волн (1). Полученные формулы, таким образом, применимы в области, где нельзя использовать приближение Бурре.

Выражения (16)—(18), (22) для функции Грина в нулевом приближении итераций применимы до расстояний, на которых сдвиг и расщепление точек ветвления τ_{1-4} , возникающее в первом приближении, не дает существенного вклада в фазу поля, т. е.

$$q \left| \left[\epsilon_0 \pm 2\sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{|\epsilon_0 \pm 2\sigma|}}{p\sigma} \right)^{4/5} y_2^{2/5}} \right]^{1/2} - \sqrt{\epsilon_0 \pm 2\sigma} \right| \ll 1, \quad (31a)$$

если же

$$q_0 = 2 \left(\frac{p \sqrt[4]{|\epsilon_0 \pm 2\sigma|}}{\sigma y_2^{1/5}} \right)^{1/5} \gg \frac{2}{\sqrt{|\epsilon_0 \pm 2\sigma|}},$$

то (31a) можно упростить:

$$q \ll q_0. \quad (31b)$$

Как правило, при $\epsilon_0 \sim 1, \frac{p\sigma}{\sqrt{\epsilon_0}} \leq 1$ формулы для функции Грина нулевого приближения применимы до расстояний в 1—2 радиуса корреляции среды.

Выражение (28) для функции Грина первого приближения применимо до расстояний, на которых дальнейший сдвиг точек ветвления спектра (24) еще не существен. Оценка этого сдвига, проводимая с учетом третьего члена в сумме (9) (с y_4), приводит после выкладок к следующему ограничению:

$$q \left| \sqrt{\epsilon_0 \pm 2\sigma_j \left(1 - \frac{1}{v}\right)} - \sqrt{\epsilon_0 \pm 2\sigma_j} \right| \ll 1, \quad (32a)$$

где

$$v = \frac{y_2^{9/5}}{6y_4} \left(\frac{p\sigma}{\sqrt{|\epsilon_0 \pm 2\sigma|}} \right)^{2/5}.$$

(Можно убедиться, что это ограничение более жесткое, чем накладываемое приближенным методом решения уравнения (12).)

Если

$$q_1 = q_0 v \gg \frac{2}{|\epsilon_0 \pm 2\sigma|^{0.3}},$$

то (32а) можно упростить:

$$q \ll q_1. \quad (32б)$$

Видно, что при выполнении условия (30) область применимости формул первого приближения шире, чем нулевого, в ν раз.

Замена $\sigma^2 A_1(\tau)$ на σ_j^2 при вычислении асимптотического выражения для функции Грина первого приближения приводит к асимптотически малой погрешности в амплитуде поля (28). Действительно, подстановка $\tau = \tau_j + it$ в выражение для $g_j(\rho)$, записанное в первом приближении итераций, и линеаризация подынтегрального выражения по t при $q \gg 1$ позволяет показать, что при

$$\frac{1}{6} \left(\frac{p^4 \sqrt{|\varepsilon_0 \pm 2\sigma|}}{y_2^2 \sigma^6} \right)^{1/5} \gg 1 \quad (33)$$

такая замена возможна.

Отметим, что в данном методе можно использовать не любую модель функции корреляции, а лишь такую, которая имеет в нуле конечные производные всех порядков, что в силу (9), (10) необходимо для сходимости процесса итераций. Этому условию не удовлетворяет, в частности, экспоненциальная функция корреляции.

Как отмечалось в работах [4, 20], область применимости нелинейного приближения Крейчнана для уравнения Дайсона в настоящее время не исследована ввиду значительных математических затруднений. Однако в нашем случае все же имеется возможность оценить область применимости уравнения на примере простой задачи, имеющей точное решение.

Рассмотрим турбулентную среду с бесконечным радиусом корреляции. Такая среда является мгновеннооднородной, флуктуирующей как целое. Применение нелинейного уравнения Дайсона к такой задаче соответствует использованию нулевого приближения итераций. Однако для задачи о распространении волн в такой среде может быть записано точное решение. Действительно, функция Грина одномерного уравнения Гельмгольца для данной реализации диэлектрической проницаемости среды ε имеет вид

$$G_\varepsilon(\rho) = - \frac{i}{2k_0 \sqrt{\varepsilon}} \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon} |\rho|). \quad (34)$$

Для гауссовой функции распределения ε точное когерентное поле $G_\tau(\rho)$ может быть найдено стандартным образом:

$$G_\tau(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2}{2\sigma^2}\right] \left(-\frac{i}{2k_0 \sqrt{\varepsilon}}\right) \times \\ \times \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon} \rho) \quad (\rho > 0). \quad (35)$$

Если приемник находится вблизи источника, то интеграл (35) может приближенно быть вычислен аналитически. Для этого разложим экспоненту в (35) в ряд при $\rho \rightarrow 0$ и запишем это выражение в виде

$$G_\tau(\rho) = - \frac{i}{2k_0 \sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \exp\left[-\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2}{2\sigma^2}\right] \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + ik_0 \rho + \dots\right).$$

Интегралы от первых двух членов суммы известны [18] (стр. 351), в результате после вычислений получим

$$G_T(\rho) = - \frac{i}{2k_0 \sqrt{\epsilon_0}} [V_T(s) + ik_0 \rho + \dots], \quad (36)$$

где

$$V_T(s) = \frac{e^{-1/s^2}}{\sqrt{s}} \left[D_{-1/2} \left(-\frac{2}{s} \right) - i D_{-1/2} \left(\frac{2}{s} \right) \right] \quad (37)$$

— точная нормированная функция Грина при $\rho = 0$ ($D_\nu(z)$ — функция Вебера).

Зависимость $|V_T(s)|$ показана на рис. 3 сплошной линией. Ее сравнение с зависимостью (17), (18) показывает, что при $s \leq 1$ погрешность нелинейного приближения не превышает 5%. В случае $s \rightarrow 0$ в (37) можно взять асимптотики функций Вебера [18] (стр. 1080), в результате чего получим, с точностью до членов $\sim S^4$, (19), что находится в согласии с исследованием [17]. Однако нелинейное приближение позволяет списывать поле вблизи источника и при больших значениях s , по крайней мере качественно. Действительно, из рис. 3 видно, что с точностью 10% нелинейное приближение применимо для значений s от 1 до 15. Кроме того, при еще больших значениях s точность, не являясь асимптотической, даже улучшается. Действительно, для нормированной функции Грина в нуле при $s \rightarrow \infty$ из точного решения (37) имеем (используем представление функций Вебера в виде рядов [21])

$$V_T(s) \sim 2^{-1/4} \pi^{-1/2} \Gamma(0,25) s^{-1/2} \exp \left(-\frac{i\pi}{4} \right)$$

(Γ — гамма-функция), а из полученного по нелинейному приближению (18) —

$$V(s) \sim \left(\frac{3}{8\pi} \right) K \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) s^{-1/2} \exp \left(-\frac{i\pi}{4} \right).$$

Отсюда видно, что, во-первых, нелинейное приближение дает при $s \rightarrow \infty$ функционально такую же зависимость, как и точное решение, и, во-вторых, погрешность определяется величиной $V_T(s)/V(s) \approx 0,9716 \dots$, что составляет величину менее 3%.

Обратимся теперь к определению области применимости выражений для функции Грина нелинейного уравнения Дайсона. Для этого для той же модели с $l \rightarrow \infty$ построим зависимости $V(q)$ функций Грина, нормированных на функцию Грина пространства без неоднородностей при $\epsilon_0 = 1$ для различных значений $s = 2\sigma/\epsilon_0 = 0,4$ (рис. 6а), 0,8 (6б), 1,8 (6в). Результаты численного расчета по формуле (35) (точное решение) представлены сплошными линиями, по формуле (13) (точные функции Грина нелинейного приближения) — штрихпунктирными линиями и по формуле (22) (асимптотики нелинейного приближения) — штриховыми. Из анализа рисунков видно, что вблизи источника совпадение может считаться удовлетворительным, причем радиус применимости для небольших s может составить значительную величину.

Модель мгновеннооднородной среды, флуктуирующей как целое, позволяет рассмотреть и эффект турбулентного просветления, описанный также и для среды с конечным радиусом корреляции. На рис. 4 сплошной линией представлена точная зависимость, найденная из (35) при $\epsilon_0 = -0,5$, $q = 20$. Из ее сравнения с полученной в рамках нелинейного приближения видно, что это явление может быть описано с помощью асимптотики (22).

Таким образом, на основании вышеизложенного можно заключить, что уравнение Дайсона в нелинейном приближении для массового опе-

ратора позволяет дать не только качественное, но и удовлетворительное количественное описание задачи распространения когерентных коротких волн в мгновеннооднородной гауссовой среде, флуктуирующей как целое ($\rho \sigma \rightarrow \infty$), приближение Бурре для которой совершенно непригодно.

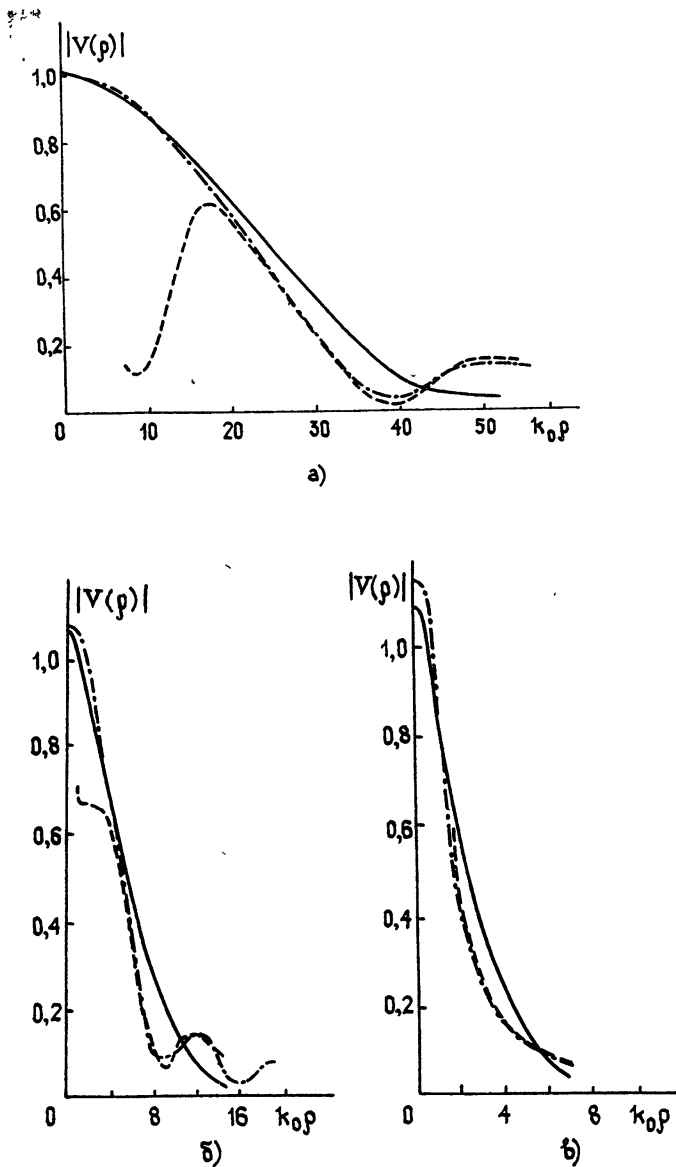


Рис. 6.

Это дает основания предполагать, что нелинейное приближение может быть применено и для решения задач распространения коротких волн в среде с большим, но конечным значением радиуса корреляции неоднородностей среды.

В заключение заметим, что явления наличия в среде пространственных биений поля, возникающих ввиду его описания (22), (28) несколькими типами волн с различными постоянными распространения

(24), и явления алгебраического затухания, отмеченного в работах [11, 14–16], быть не должно, так как они проявляются за пределами применимости нелинейного приближения для массового оператора в уравнении Дайсона (см. рис. 6) — там, где отклонение приближенного решения от точного становится значительным.

3. ФУНКЦИИ ГРИНА ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ

В трехмерном случае уравнение, аналогичное (2), имеет вид [4, 11]

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + k_0^2 \varepsilon_0 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + k_0^4 \iiint_{-\infty}^{\infty} B(\mathbf{r}', \mathbf{r}) G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0) d^3 \mathbf{r}'. \quad (38)$$

(Все обозначения аналогичны введенным ранее.)

Применим для его решения метод, аналогичный развитому в разд. 1. Для этого, считая среду изотропной, ищем решение (38) в виде

$$G(\mathbf{R}) = \frac{k_0}{2(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{\tau}) \exp(i\mathbf{q}\boldsymbol{\tau}) d^3 \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{8\pi^2 iR} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(iq\tau) \tau d\tau, \quad (39)$$

$$q = k_0 R, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \quad R = |\mathbf{R}|, \quad \tau = |\boldsymbol{\tau}|, \quad f(\boldsymbol{\tau}) = f(\tau).$$

Используя (39) в (38), после преобразований приходим к спектральному уравнению

$$\sigma^2 f(\tau) \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) f\left(-\boldsymbol{\tau} + \frac{t}{p}\right) d^3 t - 2(\varepsilon_0 - \tau^2) f(\tau) + 4 = 0, \quad (40)$$

аналогичному (6). Здесь

$$\Phi(t) = \frac{1}{(2\pi l)^3 \sigma^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} B(\mathbf{R}) e^{-itR/l} d^3 \mathbf{R}.$$

— безразмерный спектр трехмерных неоднородностей среды.

Разлагая спектр поля, стоящий в (40) под знаком интеграла, в ряд Тейлора по обратным степеням p и преобразуя это уравнение, придем к (8), хотя

$$A(\tau) = 1 + \frac{y_2}{p^2} \frac{\frac{d}{d\tau} \left[\tau^2 \frac{df(\tau)}{d\tau} \right]}{\tau^2 f(\tau)} + O\left(\frac{1}{p^4}\right) \quad (41)$$

отличается от выражения (9).

Полагая в (8) $p \rightarrow \infty$ (нулевое приближение итераций), получим, что в этом случае спектр трехмерной функции Грина совпадает с одномерным (11).

Вычисляя с его помощью (41), получим в первом приближении итераций

$$A_1(\tau) = 1 - \frac{4\tau^2(\varepsilon_0 - \tau^2)y_2}{p^2 Z^3} \left[1 - \frac{Z}{\varepsilon_0 - \tau^2} + 3 \frac{Z^2}{2\tau^2(\varepsilon_0 - \tau^2)} \right], \quad (42)$$

где $y_2 = \frac{1}{2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) t^2 d^3 t$ не зависит от $j = 1, 2, 3$.

Существенно, что одномерная функция (12) отличается от (42) лишь множителем в последнем слагаемом в квадратных скобках, что не оказывает в первом приближении итераций влияния на практически используемое выражение для спектра функции Грина, а также на его точки ветвления (24). Поэтому в нулевом и первом приближениях итераций (при учете членов не старше $O(p^{-2})$) спектры функций Грина одно- и трехмерной задач совпадают, в силу чего сами одно- и трехмерная функции Грина G_I и G_{III} соответственно оказываются связанными формулой

$$G_{III}(R) = - \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial}{\partial R} G_I(R), \quad (43)$$

характерной для пространства без неоднородностей. На применимость этой формулы при $\sigma \ll 1$ указано в [11].

Формула (43) позволяет получить выражения для трехмерной функции Грина в нулевом и первом приближениях итераций с помощью операции дифференцирования. В результате, применяя (43) и (16), (22), (28), получим в нулевом приближении итераций

$$G_0(R) \sim - \frac{1}{4\pi R} [1 + O(q^2 |\tau_1 - \tau_2|^2)] \quad (44)$$

при $q |\tau_1 - \tau_2| \ll 1$;

$$G_0(R) \sim \frac{\tau_1^{3/2} \exp\left(iq\tau_1 + \frac{i\pi}{4}\right) + \tau_2^{3/2} \exp\left(iq\tau_2 - \frac{i\pi}{4}\right)}{(2\pi q\sigma)^{3/2} R} \quad (45)$$

при $q |\tau_1 - \tau_2| \gg 1$. Это выражение получено ранее в [16]. В первом приближении итераций

$$G_1(R) \sim \frac{1}{(2\pi q\sigma)^{3/2} R} \sum_j \tau_j^{3/2} \exp(iq\tau_j + i\varphi_j) \times \left[1 + O\left(\frac{1}{q |\tau_1 - \tau_2|}\right) \right] \quad \text{при } q |\tau_1 - \tau_2| \gg 1; \quad (46)$$

суммирование в (46) производится по точкам ветвления τ_j из (24) с фазами φ_j , указанными в табл. 1.

Видно, что в трехмерном случае эффекта «разбухания» поля вблизи источника не наблюдается, однако возможность «турбулентного просветления среды» и наличие обратных волн сохраняются.

Формула (43) позволяет также полагать, что область применимости метода решения, а также самого трехмерного уравнения (38) аналогична полученной для одномерного (2) в разд. 2.

Таким образом, в работе получены асимптотические выражения для функций Грина уравнения Дайсона в нелинейном приближении Крейчнана для массового оператора для случая распространения коротких волн в гауссовой турбулентной среде в одно- и трехмерном случаях, справедливые в области, где приближение Бурре неприменимо. Возможность использования нелинейного приближения в такой задаче подтверждается конкретным примером. Полученные результаты могут быть

использованы для анализа задач распространения коротких волн в сильнотурбулентных средах.

Авторы выражают благодарность С. М. Рытову, В. И. Татарскому, Ф. Г. Бассу и всем участникам руководимых ими семинаров за обсуждение результатов работы и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, ЖЭТФ, № 6, 2106 (1969).
2. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
3. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, УФН, № 4, 499 (1973).
4. В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 4, 570 (1974)
5. R. C. Bougget, Nuovo Cim, № 1, 1 (1962).
6. В. И. Татарский, М. Б. Герценштейн, ЖЭТФ, № 2, 676 (1963)
7. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
8. A. D. Vargatsis, M. J. Santer, Radio Sci., № 1, 87 (1971).
9. О. В. Музычук, Изв. вузов — Радиофизика, 19, № 8, 1192 (1976).
10. Н. А. Арманд, Н. А. Кошелев, С. И. Тихомирнов, М. П. Пархоменко, Ю. Г. Яременко, Радиотехника и электроника, № 9, 1941 (1975).
11. Sh. Rosenbaum, Radio Sci., № 3, 379 (1971).
12. Л. А. Апресян, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 2, 165 (1974).
13. R. H. Kraichnan, J. Math. Phys., № 1, 124 (1961)
14. Н. А. Арманд, В. Н. Секистов, Препринт № 5 (247) ИРЭ АН СССР, М., 1978.
15. Н. А. Арманд, В. Н. Секистов, в сб. XII Всесоюзная конференция по распространению радиоволн (Томск, 1978), Тезисы докладов, ч. 2, изд. Наука, М., 1978, с. 272
16. Н. А. Арманд, В. Н. Секистов, Радиотехника и электроника, № 3, 615 (1979).
17. О. Г. Налбандян, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 4, 549 (1977)
18. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. Наука, М., 1971.
19. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, Специальные функции, изд. Наука, М., 1977, с. 107.
20. В. И. Кляцкин, Изв. вузов — Радиофизика, 20, № 11, 1698 (1977).
21. К. А. Карпов, Э. А. Чистова, Таблицы функций Вебера, 3, ВЦ АН СССР, М., 1968, с. 5.

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
23 апреля 1979 г.

APPLICATION OF NONLINEAR DYSON EQUATION FOR THE INVESTIGATION OF PROPAGATION OF SHORT WAVES IN GAUSSIAN TURBULENT MEDIUM

N. A. Armand, V. N. Sekeestov

On the basis of nonlinear Kraichnan approximation for Dyson equation propagation of coherent short waves in Gaussian medium is investigated for the case when methods of parabolic equation and Bougret approximation are not valid. Asymptotic expression have been derived for the Green function of the equation considered in zero and first approximations of iterations for one and three-dimensional inhomogeneities of the medium. Phenomena of the field «swelling» close to the source (in one dimensional case), the possibility of «turbulent enlightenment» of the medium having a negative mean value of the dielectric permittivity as well as the presence of backward waves coming to the source are stated on these equations basis. By the example of the problem having an exact solution the efficiency of the method developed is shown.