

УДК 538.56 : 519.25

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ВОЛН В ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Б. С. Абрамович, С. Н. Гурбатов

Изучаются статистические характеристики квазимонохроматических сигналов, отраженных от слоя с одномерными мелкомасштабными случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости. В диффузионном приближении найдена функция корреляции коэффициента отражения на двух частотах, необходимая для определения энергетических характеристик отраженной волны. Показано, что многократное рассеяние волн на неоднородностях среды приводит к экспоненциальному росту временных моментов интенсивности отраженного импульса с увеличением оптической толщины слоя. Обсуждаются особенности отражения модулированных сигналов от протяженных рассеивающих сред.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема многократного рассеяния волн в одномерных неупорядоченных системах вызывает интерес прежде всего возможностью получения ряда точных результатов.

Одномерное стохастическое уравнение рассматривалось многими авторами. При этом нетривиальные результаты были получены при изучении статистических свойств коэффициента отражения от оптически толстого слоя [1–4] и распределения среднего поля и средней интенсивности поля внутри рассеивающей среды при нормальном падении плоской монохроматической волны [1, 5–7]. В этих работах, посвященных стационарной задаче, было обнаружено, что многократное одномерное рассеяние в оптически толстом слое приводит к полному отражению плоской монохроматической волны в виде рассеянного поля (когерентная составляющая отсутствует) [3] и к гигантским флуктуациям интенсивности внутри неоднородной среды [6, 7]. Причем последний эффект легко обнаружить при решении задачи об отражении плоской волны от нерегулярного слоя, ограниченного идеально отражающей поверхностью — зеркалом [6].

Несомненный интерес представляет решение нестационарных задач (многократное рассеяние импульсов, модулированных сигналов и пр.), поскольку помимо самостоятельного интереса лишь решение нестационарной задачи может ответить на вопросы, связанные с характером установления вероятностных характеристик поля при рассеянии монохроматического излучения.

Настоящая работа посвящена изучению статистических свойств сигналов, отраженных от одномерного слоя с мелкомасштабными случайными неоднородностями диэлектрической проницаемости. Показано, что для нахождения средней формы отраженного импульса достаточно знание среднего коэффициента отражения лишь на одной частоте, и поэтому исследование средних, линейных по полю, характеристик отраженного сигнала сводится по существу к решению стационарной задачи. Иначе обстоит дело при нахождении энергетических характеристик от-

раженной волны. В этом случае уже недостаточно знать статистические свойства коэффициента отражения на одной частоте, а необходимо решить самостоятельную задачу об определении корреляционной функции коэффициента отражения на разных частотах. Далее решение этой задачи используется для определения средней интенсивности и моментов интенсивности квазимонохроматического сигнала, отраженного от неоднородного слоя с зеркалом на дальней границе. Рассмотрены также особенности отражения модулированных сигналов от оптически длинных слоев. В этом случае частотная корреляционная функция представлена в виде бесконечной цепной дроби, а модуляция выходящего из слоя излучения целиком определяется статистическими свойствами среды.

Все рассмотрение проводится в диффузационном приближении для локального коэффициента отражения [6].

2. ВЫВОД ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Пусть на слой $(0, L')$ со случайными одномерными неоднородностями справа нормально падает плоская волна с временной зависимостью $E_0(t)$. Предположим, что внутри слоя диэлектрическая проницаемость $\epsilon(z') = 1 + \Delta\epsilon(z')$, причем $\Delta\epsilon(z')$ является нормальным случайным процессом с нулевым средним значением ($\langle \Delta\epsilon \rangle = 0$) и функцией корреляции $B_{\Delta\epsilon} = \sigma_\epsilon^2 l \delta(z'_1 - z'_2)$, где l — характерный размер неоднородностей, $\delta(z)$ — дельта-функция, $\sigma_\epsilon^2 = \langle (\Delta\epsilon)^2 \rangle$. При этом диэлектрическая проницаемость окружающей среды предполагается равной единице.

Для определения характеристик отраженного сигнала удобно представить поле в виде суперпозиции гармонических волн*:

$$E(t, z') = \int d\omega E_\omega(z') e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Внутри слоя для каждой гармонической составляющей имеем стохастическое волновое уравнение

$$\frac{d^2 E_\omega}{dz'^2} + \omega^2 \epsilon(z) E_\omega = 0, \quad (2)$$

где введена координата $z = z'/c$ (c — скорость света), имеющая размерность времени. Вводя в рассмотрение коэффициент отражения от слоя $R_\omega(L) = r_\omega(L) \exp[i\phi_\omega(L)]$ и исключая регулярный набег фазы [3, 6], легко представить отраженное поле в виде

$$E(t, L) = \int d\omega E_{0\omega} R_\omega(L) e^{-i\omega(t-2L)}. \quad (3)$$

Таким образом, статистические характеристики отраженного сигнала определяются статистикой коэффициента отражения $R_\omega(L)$, который в среде со случайными неоднородностями является случайной функцией частоты и длины рассеивающего слоя $L = L'/c$.

Из формулы (3) следует, что для определения среднего поля $\langle E(t, L) \rangle$ достаточно знать средний коэффициент отражения $\langle R_\omega(L) \rangle$ на одной частоте, что является предметом исследования работ [2–4]. При этом, если в среде отсутствует регулярное отражение на границах слоя, $\langle R_\omega(L) \rangle = 0$ [3] и, следовательно, в отраженном сигнале отсутствует регулярная компонента. Наличие отражения на дальней границе слоя ($z = 0$) приводит к появлению среднего отраженного поля. В част-

* В дальнейшем там, где это не должно вызвать недоразумений, мы будем опускать индекс ω .

ности, при идеальном отражении модуль коэффициента отражения $\rho_\omega(L) = 1$, а фаза распределена по нормальному закону [6] с дисперсией, пропорциональной толщине слоя L , что приводит к экспоненциальному убыванию регулярной составляющей отраженного сигнала при увеличении толщины нерегулярного слоя.

Наибольший интерес представляют средние энергетические характеристики отраженной волны (временная функция корреляции, средняя интенсивность и т. п.). При этом уже недостаточно знание статистических свойств коэффициента отражения на одной частоте, так как из (3) следует

$$\begin{aligned} \langle E(t_1, L) E^*(t_2, L) \rangle &= \int d\omega_1 d\omega_2 \langle E_{0\omega_1}(L) E_{0\omega_2}^*(L) \rangle \times \\ &\times \langle R_{\omega_1}(L) R_{\omega_2}^*(L) \rangle \exp[2i(\omega_1 - \omega_2)L - i\omega_1 t_1 + i\omega_2 t_2], \end{aligned} \quad (4)$$

и, следовательно, необходимо знать корреляционную функцию коэффициента отражения на двух частотах

$$K(\omega_1, \omega_2, L) = \langle R_{\omega_1}(L) R_{\omega_2}^*(L) \rangle, \quad (5)$$

которая определяется вероятностным распределением $W(\rho_1, \rho_2, \varphi_1, \varphi_2, L)$, где $\rho_i = \rho_{\omega_i}$, $\varphi_i = \varphi_{\omega_i}$ ($i = 1, 2$)*.

В общем случае решение поставленной задачи чрезвычайно сложно, поэтому в дальнейшем мы рассмотрим рассеяние детерминированных квазимохроматических сигналов, спектр которых сосредоточен около некоторой частоты ω_0 . Тогда переходя в (4) к интегрированию по разностной частоте $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ и используя предположение об узости спектра падающего излучения, запишем выражение для средней интенсивности отраженной волны $I(t, L) = \langle E(t, L) E^*(t, L) \rangle$ в виде однократного интеграла:

$$I(t, L) = \int d\Omega S_0(\Omega) K(\Omega, L) e^{-i\Omega(t-2L)}. \quad (6)$$

Здесь $S_0(\Omega)$ — спектр интенсивности падающего сигнала:

$$S_0(\Omega) = \int d\omega E_0(\omega) E_0^*(\omega - \Omega). \quad (7)$$

Будем считать, что неоднородный слой при $z=0$ ограничен идеально отражающей поверхностью — зеркалом. В этом случае задача существенно упрощается, так как при этом $\rho_i = 1$ и статистика коэффициентов отражения $R_{\omega_i}(L)$ определяется только фазовыми флуктуациями. Для определения среднего коэффициента отражения по интенсивности $K(\Omega)$ необходимо найти вероятностное распределение разности фаз $\psi(\Omega, L) = \varphi(\omega_1, L) - \varphi(\omega_2, L)$. Тогда

$$K(\Omega, L) = \langle \exp[i\psi(\Omega, L)] \rangle. \quad (8)$$

Фаза коэффициента отражения φ_i в этом случае удовлетворяет уравнению [6]

$$\frac{d\varphi_i}{dL} = \omega_i \Delta\epsilon(L) [1 + \cos(\varphi_i - 2\omega_i L)]. \quad (9)$$

Переходя от (9) к системе уравнений для φ_1, φ_2 , можно, используя стандартную процедуру (см., например, [3, 6]), вывести уравнение ЭФП для

* Заметим, что лишь для стационарного шума, когда спектральные компоненты $E_{0\omega}$ дельта-коррелированы, для определения корреляционной функции энергетического спектра отраженной волны достаточно знать $\langle \rho_\omega^2 \rangle$.

плотности вероятности $W(\varphi_1, \psi, L)$. Для выполнения условий применимости этого уравнения необходимо, чтобы радиус корреляции неоднородностей l был много меньше длины волны λ_0 и характерного масштаба изменения фазы, для чего необходимо выполнение условия $\sigma_e^2 k_0 l \ll 1$. Заменяя в этом случае реальную корреляционную функцию на δ -коррелированную и предполагая, что $\Delta \varepsilon(L)$ — нормальный процесс, нетрудно получить точное уравнение для плотности вероятности. Коэффициент диффузии в этом уравнении равен

$$D = \frac{\sigma_e^2 \omega_0^2 l}{2c}. \quad (10)$$

В уравнении для $W(\varphi_1, \psi, L)$ содержатся быстро осциллирующие по частоте ω_0 члены. Предполагая, что на длине волны распределение не успевает существенно изменяться, т. е. считая, что $D \ll \omega_0 (\sigma_e^2 k_0 l \ll \ll 1)$, целесообразно провести усреднение уравнения по высокочастотному периоду. Используя также условие $\Omega/\omega_0 \ll 1$, окончательно для вероятностного распределения разности фаз $W(\psi, L)$ получим

$$\frac{\partial W}{\partial L} = D \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \{ [1 - \cos(\psi - 2\Omega L)] \} W. \quad (11)$$

Диффузионное уравнение (11) является основным для изучения статистических характеристик отраженного квазимохроматического сигнала.

3. РЕШЕНИЕ ДИФФУЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Введем в рассмотрение характеристическую функцию разности фаз

$$\theta(u, L) = \langle \exp[iu\phi(L)] \rangle. \quad (12)$$

При этом интересующий нас средний коэффициент отражения по интенсивности

$$K(\Omega, L) = \theta(1, L). \quad (13)$$

Из (11) легко получить дифференциально-разностное уравнение для характеристической функции

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(u, L)}{\partial L} &= -Du^2 \left\{ \theta(u, L) - \frac{1}{2} [\theta(u+1, L) e^{-2i\Omega L} + \theta(u-1, L) e^{2i\Omega L}] \right\}, \\ \theta(u, 0) &= 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Прежде чем исследовать уравнение (14) в общем случае, построим решение при условии $DL \ll 1$, что соответствует слабому рассеянию в оптически тонком слое. Полагая $\theta = 1 + D\theta_1 + D^2\theta_2 + \dots$ и ограничиваясь первым членом разложения по параметру D , получаем

$$K(\Omega, L) = 1 - DL + D \frac{\sin 2\Omega L}{2\Omega}. \quad (15)$$

В (15) первое слагаемое соответствует ослаблению регулярной компоненты, а последнее описывает рассеяние на случайных неоднородностях. Считая $I_0(t) = \delta(t)$, мы можем найти усредненную функцию Грина по интенсивности:

$$G(t, L) = (1 - DL) \delta(t - 2L) + \begin{cases} D/4 & (0 < t < 4L) \\ 0 & (t < 0, t > 4L) \end{cases}. \quad (16)$$

Как и следовало ожидать, (16) соответствует борновскому приближению, т. е. рассеяние начинается в момент входа импульса в неоднородную среду, причем интенсивность импульса не меняется. Время, в течение которого происходит рассеяние, равно $4L$, что связано с рассеянием на пути к отражающей границе и с рассеянием уже идеально отраженного импульса. Следует, однако, заметить, что в отличие от борновского приближения в (15) учтено ослабление регулярной компоненты поля, что обеспечивает выполнение закона сохранения энергии.

Обратимся к анализу уравнения (14) в общем случае. Одним из естественных подходов к решению уравнения (14) является представление характеристической функции $\theta(u, L)$ в виде ряда по степеням параметра $\alpha = \Omega/D$, второй подход, как будет показано ниже, связан с представлением $\theta(u, L)$ бесконечной цепной дробью. При этом первое представление удобно для изучения временных моментов отраженного сигнала, а второе — для более детального описания отраженного поля, особенно в случае очень длинного рассеивающего слоя.

Итак, будем искать решение уравнения (14) в следующем виде:

$$\theta(u, L) = \sum_{n=0}^{\infty} (i\Omega)^n g_n(u, L). \quad (17)$$

Тогда, подставляя (17) в (14) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях Ω , получаем рекуррентную систему дифференциально-разностных уравнений для $g_n(u, L)$

$$\frac{\partial g_n(u, L)}{\partial L} = Du^2 \left[\hat{L}_* g_n(u, L) + \sum_{p=1}^n \frac{(2L)^p}{p!} \hat{L}_p g_{n-p}(u, L) \right], \quad (18)$$

$$g_0(u, 0) = 1, \quad g_n(u, 0) = 0, \quad n \geq 1,$$

где введены разностные операторы \hat{L}_* и L_p :

$$\hat{L}_* g(u, L) = \frac{1}{2} [g(u-1, L) + g(u+1, L) - 2g(u, L)], \quad (19)$$

$$\hat{L}_p g(u, L) = \frac{1}{2} [g(u-1, L) + (-1)^p g(u+1, L)].$$

Далее, используя очевидное свойство операторов \hat{L}_* и \hat{L}_p (C_m^l — биномиальные коэффициенты),

$$\hat{L}_* u^m = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m-2} u^j C_m^j [1 + (-1)^{m-j}], \quad (20)$$

$$\hat{L}_p u^m = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m u^j C_m^j [(-1)^p + (-1)^{m-j}],$$

можно показать, что для любого $n \geq 2$ функция $g_n(u, L)$ представима в виде полинома по степеням u :

$$g_n(u, L) = \sum_{k=2}^n f_n^k(L) u^k. \quad (21)$$

При этом из (18) с учетом (20) можно получить замкнутую систему линейных уравнений для функций $f_n^k(L)$ при произвольных n и k , что, в свою очередь, позволяет однозначно определить функции $g_n(u, L)$, а следовательно, и характеристическую функцию $\theta(u, L)$.

Поступая вышеописанным способом, находим с учетом начальных условий для первых функций $g_n(u, L)$

$$g_0(u, L) = 1; \quad (22)$$

$$g_1(u, L) = 0; \quad (23)$$

$$g_2(u, L) = u^2 f_2^2 = \frac{u^2 L}{D^2} \left(e^{DL} - 1 - DL - \frac{D^2 L^2}{2} \right); \quad (24)$$

$$g_3(u, L) = u^3 f_3^3, \quad \frac{df_3^3}{dL} = 3Df_3^3 - 4DLf_2^2. \quad (25)$$

Результаты (22)–(25) будут нами использованы при изучении моментов отраженного сигнала.

Однако наибольший интерес представляет иной подход к решению уравнения (14), позволяющий получить удобное представление непосредственно для $K(\Omega, L) = \theta(1, L)$. Перейдем от $\theta(u, L)$ к характеристической функции $\eta(u, L) = \theta(u, L) \exp(-2iu\Omega L)$ полной фазы $\psi - 2\Omega L$. Из (14) следует бесконечная система зацепляющихся уравнений для величин $\eta_n(L) = \eta(n, L)$, $n = 0, 1, 2$,

$$\frac{d\eta_n}{dL} = -2i\Omega n \eta_n(L) - Dn^2 \left\{ \eta_n(L) - \frac{1}{2} [\eta_{n+1}(L) + \eta_{n-1}(L)] \right\}, \quad (26)$$

$$\eta_n(0) = 1.$$

Нас интересует решение системы (26) при $n = 1$, так как согласно (6) средняя интенсивность отраженного сигнала есть

$$I(t, L) = \int d\Omega \eta_1(\Omega, L) S_0(\Omega) e^{-i\Omega t}. \quad (27)$$

Для решения системы (26) перейдем от $\eta_n(L)$ к преобразованию Лапласа $\eta_n(p)$. Тогда из (26) получаем бесконечную систему алгебраических уравнений, решая которую, получаем:

$$\eta_1(p) = -\frac{d^{(2)}(p)}{pd^{(1)}(p)} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \beta_k \frac{d^{(k+1)}(p)}{d^{(2)}(p)}. \quad (28)$$

Здесь $d^{(n)}$ — определители бесконечных трехдиагональных матриц,

$$d^{(n)} = \begin{vmatrix} a_n & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & a_{n+1} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & a_{n+2} & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \quad (29)$$

$$a_n(p) = -2 \left(\frac{p}{n^2} + 1 + \frac{2i\Omega}{Dn} \right), \quad \beta_n = -\frac{2}{Dn^2}.$$

Определители $d^{(n)}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$d^{(n)} = a_n d^{(n+1)} - d^{(n+2)}, \quad (30)$$

что позволяет представить $\eta_1(p)$ в виде суммы бесконечных цепных дробей. В частности, для бесконечно толстого рассеивающего слоя ($L = \infty$) нетрудно, используя соотношения (28)–(30), получить выражение для стационарного коэффициента отражения $K_\infty(\Omega) = \eta_1(L = \infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \eta_1(p)$ в виде бесконечной цепной дроби:

$$K_{\infty}(\Omega) = \frac{1}{2\left(1+i\frac{2\Omega}{D}\right)} - \frac{1}{2\left(1+i\frac{2\Omega}{2D}\right)} - \frac{1}{2\left(1+i\frac{2\Omega}{3D}\right)} - \dots \quad (31)$$

Легко видеть, что при $\Omega=0$ эта цепная дробь суммируется $K_{\infty}(0)=1$, т. е. для сигналов с конечной энергией ($|S_0(0)|<\infty$) энергия отраженного импульса равна энергии падающего импульса, а для неограниченных сигналов равенство $K_{\infty}(0)=1$ означает сохранение средней интенсивности отраженного сигнала.

Сходимость цепной дроби (31) проверялась численно. Графики модуля, действительной и мнимой частей $K_{\infty}(\Omega)$ приведены на рис. 1. При этом следует отметить, что с увеличением Ω/D сходимость дроби (31) существенно улучшается. Так, уже при $\Omega/D \geq 2$ можно ограничиться первым членом

$$K_{\infty}(\Omega) \approx \frac{D}{4i\Omega}. \quad (32)$$

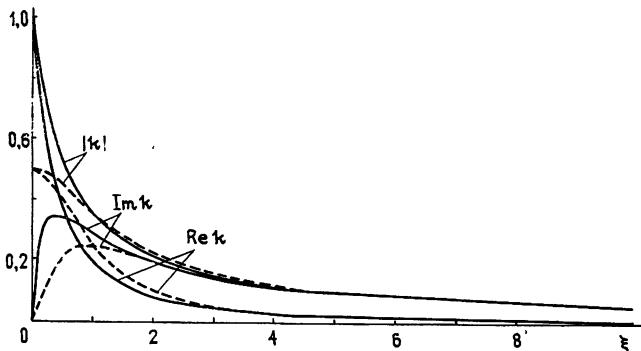


Рис. 1. Графики $|k_{\infty}|$, $\operatorname{Re} k_{\infty}$, $\operatorname{Im} k_{\infty}$ коэффициента отражения по интенсивности $k_{\infty}(\Omega)$ (формула (31)) в зависимости от параметра $\xi=2\Omega/D$. Пунктиром изображено первое приближение цепной дроби.

При $\Omega \rightarrow 0$ дробь $K_{\infty}(\Omega)$ есть недифференцируемая функция частоты. Действительно, ограничиваясь в (31) конечным числом членов N и предполагая $\Omega \rightarrow 0$, получаем:

$$K_{\infty}(\Omega) = 1 - \frac{2i\Omega}{D} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}. \quad (33)$$

Устремляя N к бесконечности, получаем в (33) расходящийся ряд. Физические причины недифференцируемости $K_{\infty}(\Omega)$ при малых Ω будут выяснены ниже при рассмотрении моментов интенсивности сигнала, отраженного от данного слоя.

4. ВРЕМЕННЫЕ МОМЕНТЫ И СРЕДНЯЯ ИНТЕНСИВНОСТЬ ОТРАЖЕННОГО СИГНАЛА

Если считать, что падающий на слой сигнал имеет конечную энергию $|S_0(0)| < \infty$, то можно интересоваться интегральными характеристиками отраженного сигнала. Наибольший интерес представляют временные моменты средней интенсивности

$$M_n(L) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - 2L)^n I(t) dt. \quad (34)$$

Легко видеть, что $M_n(L)$ определяются производными в нуле от спектра падающего излучения $S_0(\Omega)$ и энергетического коэффициента отражения, а следовательно, через функции $g_n(1, L)$:

$$\begin{aligned} M_n(L) &= i^n \frac{d^n}{d\Omega^n} [S_0(\Omega) K(\Omega, L)]_{\Omega=0}, \\ K^{(n)}(\Omega, L)|_{\Omega=0} &= i^n n! g_n(1, L). \end{aligned} \quad (35)$$

В частном случае, когда рассеивается дельта-импульс $I_0(t) = \delta(t)$, из (35) следует:

$$M_n(L) = (-1)^n n! g_n(1, L). \quad (36)$$

В определении (34) моменты берутся относительно времени $t^* = 2L$ выхода импульса из однородного слоя.

Проанализируем характер поведения моментов в зависимости от толщины рассеивающего слоя. Из (22) следует, что энергия отраженного сигнала равна энергии падающего:

$$M_0(L) = 1.$$

Центр тяжести импульса, отраженного от случайно-неоднородного слоя, совпадает с центром тяжести импульса, отраженного от зеркала в однородной среде, так как из (23) получаем:

$$M_1(L) = 0.$$

Последнее является весьма нетривиальным фактом, если сравнить полученный результат с простейшей оценкой длительности отраженного импульса, получаемой из модифицированного борновского приближения. Действительно, из (16) видно, что начальная часть отраженного сигнала имеет интенсивность $D/4$. В то же время из закона сохранения энергии можно оценить характерную длительность импульса T^* в оптически толстом слое ($DL \gg 1$): $T^* \sim D^{-1}$. Следовательно, и центр тяжести T_c должен быть порядка $T_c \sim T^*$, в то время как мы получили $T_c = 2L$. Такое поведение центра тяжести обусловлено медленным спаданием интенсивности отраженного импульса при $t \rightarrow \infty$. Для второго момента, характеризующего эффективную ширину (длительность) отраженного импульса, из (24) и (36) имеем:

$$M_2(L) = \frac{8}{D^2} \left(e^{DL} - 1 - DL - \frac{D^2 L^2}{2} \right). \quad (37)$$

При $DL \ll 1$ из (37) следует $M_2(L) \approx \frac{4}{3} DL^3$, что совпадает с длительностью импульса, отраженного от слабо рассеивающего слоя (борновское приближение). Для оптически толстого слоя $DL \gg 1$ ширина импульса экспоненциально возрастает, что также обусловлено медленным спаданием $I(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Аналогичным образом ведут себя и высшие моменты $M_n(t)$. Так, например, для третьего момента из (25) получаем:

$$M_3(L) \approx \begin{cases} -\frac{16}{5} D^2 L^5 & (DL \ll 1) \\ -\frac{8}{3} \frac{e^{3DL}}{D^3} & (DL \gg 1) \end{cases}. \quad (38)$$

При слабом рассеянии третий момент (38) описывает малую асимметрию отраженного сигнала, обусловленную затягиванием заднего фронта отраженного импульса, а при сильном рассеянии в оптически толстом слое $M_3(L)$, так же как и все высшие моменты, экспоненциально растет, что обусловлено многократным рассеянием импульсов в хаотически-неоднородной среде. Заметим, что и отмеченная выше недифференцируемость (33) $K_\infty(\Omega)$ при $\Omega \sim 0$ также связана с расходностью моментов интенсивности при $L \rightarrow \infty$.

Обсудим, наконец, особенность отражения периодических модулированных сигналов от бесконечного рассеивающего слоя. Пусть, например, падающий сигнал имеет амплитудную модуляцию

$$I_0(t) = \bar{I} + \tilde{I}(t), \quad (39)$$

где $\bar{I} = \text{const}$ — средняя по времени интенсивность падающей волны, а $\tilde{I}(t)$ — функция, описывающая модуляцию интенсивности с характерной частотой $\Omega = \Omega_0$. Как следует из (31), характеристики отраженного сигнала существенно зависят от величины параметра $\alpha = \Omega_0/2D \sim T_p/T_0$, где $T_p \sim D^{-1}$ есть характерное время многократного рассеяния, а $T_0 \sim \Omega_0^{-1}$ — период модуляции. При $\alpha \ll 1$ ($T_p \ll T_0$) из (6) и (31) следует, что модуляция отраженного сигнала повторяет модуляцию падающего, т. е. процесс рассеяния можно описывать в квазистатическом приближении. В обратном случае $\alpha \gg 1$ ($T_p \gg T_0$), когда существенно многократное рассеяние в слое, из (6) и (32) получаем:

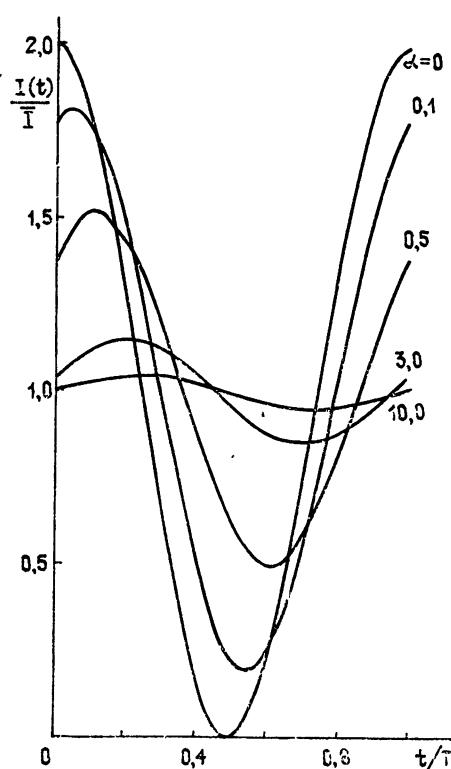


Рис. 2. Эволюция временного профиля отраженного сигнала в зависимости от параметра $\alpha = 2\Omega_0/D$ (формула (42)).

$$I(t) = \bar{I} + \frac{D}{4} \int_0^t \tilde{I}(t') dt'. \quad (40)$$

Рассмотрим частный случай гармонической модуляции падающего сигнала

$$I_0(t) = \bar{I}(1 + \cos \Omega_0 t). \quad (41)$$

В этом случае для отраженной волны имеем

$$I(t) = \bar{I}[1 + \operatorname{Re} K_\infty(\Omega_0) \cos \Omega_0 t - \operatorname{Im} K_\infty(\Omega_0) \sin \Omega_0 t]. \quad (42)$$

В частности, при сильном рассеянии ($\alpha \gg 1$) из (32) и (42) имеем

$$I(t) \approx \bar{I} \left(1 + \frac{D}{4\Omega_0} \sin \Omega_0 t \right). \quad (43)$$

Таким образом, из (43) следует, что многократное рассеяние сигнала (41) приводит к сильному уменьшению в $D/4\Omega_0$ раз коэффициента модуляции и к запаздыванию модулированной компоненты выходного сигнала на четверть периода относительно падающего сигнала. Эволюция временного поведения отраженной волны для различных значений параметра $\alpha = 2\Omega_0/D$ приведена на рис. 2.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматривались некоторые вопросы, связанные с характером многократного рассеяния нестационарных сигналов в хаотически-неоднородной среде. При этом рассмотрение проводилось для слоя, ограниченного идеально отражающей поверхностью. Следует, однако, отметить, что наличие идеального зеркала на дальней границе в случае достаточно длинных слоев, по-видимому, не является существенным. Действительно, роль зеркала сводится к тому, что модуль коэффициента отражения на данной частоте всегда равен единице. В то же время известно [1, 2, 4], что при отсутствии отражения на дальней границе модуль коэффициента отражения от оптически толстого слоя такжелизок к единице. Поскольку в силу принципа причинности отраженный сигнал в интервале $0 < t < L$ не зависит от наличия или отсутствия зеркала на задней границе, при $L \rightarrow \infty$ форма отраженной волны в обоих случаях совпадает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Л. Газарян, ЖЭТФ, 56, 1856 (1969).
2. G. Raapicolaou, SIAM J. Appl. Math., 21, 13 (1971).
3. Yu. A. Ruzhov, Rad. Sci., 11, 121 (1976).
4. Б. С. Абрамович, А. А. Дятлов, Изв. вузов — Радиофизика, 18, 1122 (1975).
5. R. H. Lang, J. Math. Phys., 14, 1921 (1973).
6. Б. С. Абрамович, С. Н. Гурбатов, Ю. А. Рыжов, Препринт НИРФИ № 119, 1978; Изв. вузов — Радиофизика, 22, 566 (1979).
7. В. И. Кляцкин, Изв. вузов — Радиофизика, 22, 180 (1979).

Научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступила в редакцию
26 марта 1979 г.

NONSTATIONARY PROBLEMS OF MULTIPLE SCATTERING OF WAVES IN ONE-DIMENSIONAL RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

B. S. Abramovich, S. N. Gurbatov

Statistical characteristics of quasi-monochromatic signals reflected from the layer with one-dimensional small-scale randomly inhomogeneous dielectric permittivities are studied. In a diffuse approximation the correlation function of the reflection coefficient has been found at two frequencies, which is necessary to define the energetic characteristics of a reflected wave. It is shown that a multiple scattering of waves by the medium inhomogeneities leads to the exponential growth of time intensity moments of a reflected pulse with the increase of the layer optical depth. Reflection peculiarities of modulated signals from extended scattering media are discussed.