

УДК 551.521.3 : 551.576

## УРАВНЕНИЯ МОМЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ В РАЗОРВАННОЙ ОБЛАЧНОСТИ В МАРКОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

*Г. Н. Глазов, Г. А. Титов*

Исходя из стохастического уравнения переноса, получены системы уравнений для моментов интенсивности в специальной модели разорванной облачности как стохастической среды. Рекуррентное решение этих уравнений позволяет рассчитать моменты любого порядка.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время возрос интерес к проблеме переноса излучения в стохастических макронеоднородных средах с размерами неоднородности порядка длины свободного пробега кванта и большими, таких, как разорванная облачность [1], защита ядерного реактора [2], взволнованная поверхность моря [3] и др. В частности, изучение переноса солнечного и лазерного излучения в разорванной облачности стимулируется потребностями актинометрии, теории циркуляции и энергетики атмосферы, лазерной локации и др. Большие значения оптической толщины в облаках исключают когерентные эффекты и требуют учета многократного рассеяния.

Поскольку описание интенсивности излучения в разорванной облачности на уровне функций распределения в настоящее время недоступно, наибольший интерес представляют моменты интенсивности. Для описанной ниже специальной модели среды, хорошо отвечающей структуре разорванной облачности, и некоторых других сред удается вывести уравнения для моментов, отталкиваясь от стохастического уравнения переноса. Путем усреднения по пространству были получены уравнения для первого момента [4] и корреляционной функции [5] интенсивности. Этот способ вывода имеет ограниченные возможности: из-за специфики усреднения охватывается только случай статистически плоскооднородной среды и однородных граничных условий, громоздкость вывода быстро нарастает с увеличением порядка момента, наконец, в процессе вывода используются предположения, физический и статистический смысл которых не вполне ясен, например, предположение 3 в [4] и [5].

В данной работе изложен способ вывода уравнений моментов интенсивности любого порядка в марковском приближении, свободный от этих недостатков.

### 2. МОДЕЛЬ РАЗОРВАННОЙ ОБЛАЧНОСТИ

Рассмотрим модель стохастической среды в виде слоя  $M$  ( $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $0 \leq z \leq H$ ) в декартовой системе  $XYZ$ , в точке  $r$  которого облачное вещество или присутствует (с вероятностью  $p(r)$ ), или отсутствует. В слое  $M$  заданы случайные скалярные поля коэффициента ослабления  $\kappa(r)$ , альбедо однократного рассеяния  $\lambda(r)$  и индикатрисы рассеяния  $g(r, \omega, \omega')$ , где

$$x(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{r} \in Y) \\ 0 & (\mathbf{r} \text{ не принадлежит } Y) \end{cases}, \quad (1)$$

$Y$  — случайное множество точек слоя  $M$ , в которых присутствует облачное вещество.

Применительно к облачности данная модель является обобщением наиболее распространенных моделей со случайной оптической толщиной [1] и со случайным распределением в пространстве облаков заданной формы (см., например, [6]). Модель апробирована в расчетах средних интенсивностей и потоков солнечной радиации [7, 8].

### 3. МАРКОВСКОЕ ДОПУЩЕНИЕ

Введем обозначение для многоточечной вероятности случайной величины  $x$ :

$$P\{x(\mathbf{r}_1) = i_1, x(\mathbf{r}_2) = i_2, \dots, x(\mathbf{r}_n) = i_n\} = P_{i_1, \dots, i_n}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$$

( $i_k = 0$  или 1). Пусть  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{m+1}$  — последовательность точек на траектории фотона, пронумерованных в порядке следования. Ниже используется допущение, что

$$P_{i_1, \dots, i_{m-1}, 11}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{m-1}, \mathbf{r}_m, \mathbf{r}_{m+1}) = V(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_{m+1}) \times \\ \times P_{i_1, \dots, i_{m-1}, 1}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{m-1}, \mathbf{r}_m), \quad (2)$$

где

$$V(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}_{m+1}) = P\{x(\mathbf{r}_{m+1}) = 1/x(\mathbf{r}_m) = 1\} \quad (3)$$

— условная вероятность присутствия вещества в точке  $\mathbf{r}_{m+1}$ . Для точек  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{m+1}$  на прямой (2) при некоторых дополнительных условиях означало бы, что  $x(\mathbf{r})$  — марковский дискретный случайный процесс [9] с двумя состояниями. Для произвольных конфигураций точек (2) может оказаться в противоречии с условием самосогласованности поля  $x(\mathbf{r})$ . Однако вытянутость индикатрисы рассеяния коротковолнового оптического излучения в облаках [10] обуславливает близость подавляющего большинства рассеяний фотонов к направлению «вперед» и близость, в определенном смысле, большинства траекторий фотонов к прямой линии. Это в сочетании с принципом причинности [11] делает допущение (2) приемлемым. Аналогичным образом аргументируется марковское свойство непрерывного поля  $\epsilon(\mathbf{r})$  диэлектрической проницаемости воздуха (см., например, [11]), широко используемое в теории распространения излучения в турбулентной атмосфере.

Кроме того, независимо от требующей экспериментальной проверки физической реализации (2) в разорванной облачности, аксиоматическое использование (2) как приближения дает ту же степень точности, что и указанный во Введении подход, расширяя его возможности.

### 4. ИСХОДНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Случайное поле интенсивности  $I(\mathbf{r}, \omega)$  в слое  $M$  при действии внешних источников удовлетворяет стохастическому уравнению переноса

$$\omega \nabla I(\mathbf{r}, \omega) = x(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) \int_{4\pi} R(\mathbf{r}, \omega, \omega') I(\mathbf{r}, \omega') d\omega' \quad (4)$$

с соответствующими граничными условиями. Здесь

$$R(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') = \lambda(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') - \delta(\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}), \quad (5)$$

$\boldsymbol{\omega} = (a, b, c)$  — единичный вектор направления.

Интегрируя (4) по направлениям [4], получаем систему стохастических интегральных уравнений

$$I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \int_{4\pi} R(\mathbf{r}', \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') \kappa(\mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') I(\mathbf{r}', \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' d\xi + I_*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}), \quad (6)$$

где  $I_*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$  — интенсивность внешних источников на границах,  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{\xi - z}{c} \boldsymbol{\omega}$ ,

$$E_z = \begin{cases} (0, z), & c > 0 \\ (z, H), & c < 0 \end{cases}.$$

### 5. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТОВ

Уравнение (6) незамкнуто относительно усреднения по ансамблю полей  $\kappa(\mathbf{r})$ . Действительно, усредняя (6), получаем

$$\overline{I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})} = \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \int_{4\pi} R(\mathbf{r}', \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') \sigma(\mathbf{r}') W_1(\mathbf{r}', \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' d\xi + I_*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}), \quad (7)$$

здесь и далее используется обозначение

$$W_k(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1, \dots, \mathbf{r}_k, \boldsymbol{\omega}_k) = \overline{\kappa(\mathbf{r}_1) I(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1) \dots I(\mathbf{r}_k, \boldsymbol{\omega}_k)},$$

черта сверху означает усреднение по ансамблю реализаций полей  $\kappa(\mathbf{r})$ . Далее, умножая (6) на  $\kappa(\mathbf{r})$  и усредняя, получаем

$$W_1(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \int_{4\pi} R(\mathbf{r}', \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') \sigma(\mathbf{r}') \overline{\kappa(\mathbf{r}) \kappa(\mathbf{r}') I(\mathbf{r}', \boldsymbol{\omega}')} \times \\ \times d\boldsymbol{\omega}' d\xi + I_*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) p(\mathbf{r}). \quad (8)$$

Таким образом, момент  $\bar{I}$  выражается через момент вида  $\overline{\kappa \bar{I}}$ , тот, в свою очередь, — через момент вида  $\overline{\kappa_1 \kappa_2 \bar{I}}$  и т. д. Аналогичным образом бесконечные цепочки уравнений получаются при попытке определить моменты второго и более высокого порядка.

Для замыкания уравнений воспользуемся соотношением

$$\overline{\kappa(\mathbf{r}') \kappa(\mathbf{r}_1) I(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1) \dots I(\mathbf{r}_k, \boldsymbol{\omega}_k)} = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') W_k(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1, \dots, \mathbf{r}_k, \boldsymbol{\omega}_k) \quad (9)$$

( $k = 1, 2, \dots$ ), вытекающим из (2) (см. Приложение). Положив в (9)  $k = 1$  и подставив его в (8), получаем систему уравнений

$$W_1(\mathbf{r}', \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \int_{4\pi} R(\mathbf{r}', \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') \sigma(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \times \\ \times W_1(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' d\xi + p(\mathbf{r}) I_*(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) \quad (10)$$

для вспомогательной функции  $\overline{W_1(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})}$ , входящей в (7).

Таким образом, расчет  $\overline{I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})}$  сводится к решению (10) и вычислению функционала (7).

В частном случае статистически однородного поля  $\kappa(\mathbf{r})$ , зависящих от вертикальной координаты  $z$  оптических характеристик  $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(z)$ ,

$\lambda(\mathbf{r}) = \lambda(z)$ ,  $g(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') = g(z, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')$  и однородных граничных условий

$$\begin{aligned} I_*(x, y, 0, \boldsymbol{\omega}) &= I_0(\boldsymbol{\omega}) & (c > 0), \\ I_*(x, y, H, \boldsymbol{\omega}) &= I_H(\boldsymbol{\omega}) & (c < 0), \end{aligned} \quad (11)$$

уравнения (7) и (10) переходят в уравнения, полученные в работе [4].

Получим уравнения для моментов интенсивности второго порядка. Умножив систему равенств (6) на  $I(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2)$  и усреднив, получаем

$$\begin{aligned} \overline{I(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1) I(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2)} &= \frac{1}{|c_1|} \int_{E_{z_1}} \int_{4\pi} R(\mathbf{r}'_1, \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}') \sigma(\mathbf{r}'_1) \times \\ &\times W_2(\mathbf{r}'_1, \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2) d\boldsymbol{\omega}' d\xi + I_*(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1) \overline{I(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь и далее

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_k &= (a_k, b_k, c_k), \quad \mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k), \quad \mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k + \frac{\xi - z_k}{c_k} \boldsymbol{\omega}_k, \\ E_{z_k} &= \begin{cases} (0, z_k) & (c_k > 0) \\ (z_k, H) & (c_k < 0) \end{cases}. \end{aligned}$$

Умножив (6) на  $\kappa(\mathbf{r}_1) I(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2)$ , усреднив и воспользовавшись равенством (9) при  $k=2$ , найдем систему уравнений для вспомогательной функции  $W_2$ :

$$\begin{aligned} W_2(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1, \mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2) &= \frac{1}{|c_1|} \int_{E_{z_1}} \int_{4\pi} R(\mathbf{r}'_1, \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}') \sigma(\mathbf{r}'_1) V(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_1) \times \\ &\times W_2(\mathbf{r}'_1, \boldsymbol{\omega}', \mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2) d\boldsymbol{\omega}' d\xi + I_*(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1) \kappa(\mathbf{r}_1) \overline{I(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2)}. \end{aligned} \quad (13)$$

В правую часть (13) входит неизвестная функция  $\kappa(\mathbf{r}_1) \overline{I(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2)}$ . Заменив в (6)  $\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}$  на  $\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2$ , умножив на  $\kappa(\mathbf{r}_1)$  и усреднив, получим для этой функции систему уравнений

$$\begin{aligned} \overline{\kappa(\mathbf{r}_1) I(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2)} &= \frac{1}{|c_2|} \int_{E_{z_2}} \int_{4\pi} R(\mathbf{r}'_2, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}') \sigma(\mathbf{r}'_2) V(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}_1) \times \\ &\times W_1(\mathbf{r}'_2, \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' d\xi + p(\mathbf{r}_1) I_*(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, расчет момента  $\overline{I(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1) I(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2)}$  сводится к следующей последовательности действий:

- как показано выше, находим  $W_1$  и  $\overline{I}$ ;
- интегрированием в (14) находим  $\kappa(\mathbf{r}_1) \overline{I(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2)}$ ;
- решая (13), находим  $W_2$ ;
- интегрированием в (12) находим искомый момент.

В частном случае статистически однородного поля  $\kappa(\mathbf{r})$ , зависящих от вертикальной координаты оптических характеристик и однородных граничных условий (11), уравнения (12), (13) и (14) переходят в уравнения, полученные в [5].

Аналогичным образом можно получить уравнения для моментов более высокого порядка. Дадим без вывода уравнения, необходимые для расчета момента третьего порядка:

$$\overline{I(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\omega}_1) I(\mathbf{r}_2, \boldsymbol{\omega}_2) I(\mathbf{r}_3, \boldsymbol{\omega}_3)} = \frac{1}{|c_1|} \int_{E_{z_1}} \int_{4\pi} R(\mathbf{r}'_1, \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}') \sigma(\mathbf{r}'_1) \times \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \times W_3(r'_1, \omega', r_2, \omega_2, r_3, \omega_3) d\omega' d\xi + I_*(r_1, \omega_1) \overline{I(r_2, \omega_2) I(r_3, \omega_3)}; \\ W_3(r_1, \omega_1, r_2, \omega_2, r_3, \omega_3) &= \frac{1}{|c_1|} \int_{E_{z_1}} \int_{4\pi} R(r'_1, \omega_1, \omega') \sigma(r'_1) V(r'_1, r_1) \times \\ & \times W_3(r'_1, \omega', r_2, \omega_2, r_3, \omega_3) d\omega' d\xi + I_*(r_1, \omega_1) \overline{x(r_1) I(r_2, \omega_2) I(r_3, \omega_3)}; \\ \overline{x(r_1) I(r_2, \omega_2) I(r_3, \omega_3)} &= \frac{1}{|c_2|} \int_{E_{z_2}} \int_{4\pi} R(r'_2, \omega_2, \omega') \sigma(r'_2) V(r'_2, r_1) \times \\ & \times W_2(r'_2, \omega', r_3, \omega_3) d\omega' d\xi + I_*(r_2, \omega_2) \overline{x(r_1) I(r_3, \omega_3)}. \end{aligned} \quad (16)$$

$$(17)$$

## 6. РЕКУРРЕНТНЫЙ РАСЧЕТ МОМЕНТОВ

Нетрудно видеть, что расчет момента  $n$ -го порядка требует предварительного расчета моментов порядка до  $n-1$  включительно вместе с соответствующими вспомогательными функциями. На рис. 1 с помощью очевидным образом упрощенных обозначений иллюстрируется последовательность расчета моментов и вспомогательных функций как рекуррентная процедура.

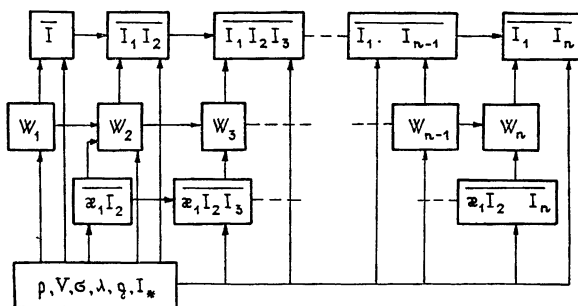


Рис. 1.

Очевидно, что, если момент  $\overline{I_1, \dots, I_{n-1}}$   $n-1$  порядка и вспомогательные функции вида  $W_{n-1}$  и  $\overline{x_1 I_2, \dots, I_{n-1}}$  рассчитаны, для расчета момента  $\overline{I_1, \dots, I_n}$   $n$ -го порядка необходимо:

— найти вспомогательную функцию вида  $\overline{x_1 I_2, \dots, I_n}$  из выражения

$$\begin{aligned} \overline{x(r_1) I(r_2, \omega_2) \dots I(r_n, \omega_n)} &= \frac{1}{|c_2|} \int_{E_{z_2}} \int_{4\pi} R(r'_2, \omega_2, \omega') \sigma(r'_2) V(r'_2, r_1) \times \\ & \times W_{n-1}(r'_2, \omega', r_3, \omega_3, \dots, r_n, \omega_n) d\omega' d\xi + \\ & + I_*(r_2, \omega_2) \overline{x(r_1) I(r_3, \omega_3) \dots I(r_n, \omega_n)} \quad (n = 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

— найти вспомогательную функцию  $W_n$ , решив систему уравнений

$$\begin{aligned} W_n(r_1, \omega_1, \dots, r_n, \omega_n) &= \frac{1}{|c_1|} \int_{E_{z_1}} \int_{4\pi} R(r'_1, \omega_1, \omega') \sigma(r'_1) V(r'_1, r_1) \times \\ & \times W_n(r'_1, \omega', r_2, \omega_2, \dots, r_n, \omega_n) d\omega' d\xi + \\ & + I_*(r_1, \omega_1) \overline{x(r_1) I(r_2, \omega_2) \dots I(r_n, \omega_n)} \quad (n = 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

— найти искомый момент из выражения

$$\overline{I(r_1, \omega_1) \dots I(r_n, \omega_n)} = \frac{1}{|c_1|} \int_{E_1} \int_{4\pi} R(r'_1, \omega_1, \omega') \sigma(r'_1) \times \\ \times W_n(r'_1, \omega', r_2, \omega_2, \dots, r_n, \omega_n) d\omega' d\xi + I_*(r_1, \omega_1) \overline{I(r_2, \omega_2) \dots I(r_n, \omega_n)} \\ (n = 2, 3, \dots).$$

Таким образом может быть рассчитан момент любого заданного порядка.

### 7. ФУНКЦИЯ $V(r_1, r_2)$

Входящая в уравнения для моментов функция  $V(r_1, r_2)$  может быть определена как экспериментально, так и, в некоторых простых случаях, выведена как следствие предположения (2).

Действительно, используя (1) и (3), запишем среднее значение  $\overline{x(r)}$  и корреляционную функцию  $K_x(r_1, r_2)$  поля  $x(r)$  в виде

$$\overline{x(r)} = p(r);$$

$$K_x(r_1, r_2) = p(r_1) [V(r_1, r_2) - p(r_2)],$$

откуда получаем равенство

$$V(r_1, r_2) = \frac{K_x(r_1, r_2)}{\overline{x(r_1)}} + \overline{x(r_2)},$$

дающее способ экспериментального определения функции  $V$ .

Обратимся теперь к выводу  $V$  с использованием (2). Отметим, что, строго говоря, (2) не влечет аналогичного свойства для вероятности вида

$$P_{i_1 \dots i_{n-1} 00}(r_1, \dots, r_{m-1}, r_m, r_{m+1}).$$

Добавив и это свойство, рассмотрим  $x(r) = x(\xi)$  на прямой  $r = r_0 + \xi\omega$  ( $|\omega| = 1$ ) как марковский дискретный случайный процесс с двумя состояниями  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ . В случае, когда процессы  $x(\xi)$  на всех прямых однородны и стационарны, для функции  $V(r', r)$  имеем [12]

$$V(r', r) = p + (1 - p) \exp(-B(\omega) l), \quad (18)$$

$$l = |r - r'|, \quad \omega = \frac{r - r'}{l}.$$

Для корреляционно-изотропной среды  $B(\omega) = \text{const}$ , и написанные выражения упрощаются.

Отметим, что (18) использовалась *ad hoc* как удобная аппроксимация при выводе уравнений для корреляции прямой солнечной компоненты [13], решении уравнений средней интенсивности в транспортном приближении [8, 14] и численных расчетах с реальной индикатрисой рассеяния [7]. Проведенное рассмотрение придает этой аппроксимации некоторое основание. Удовлетворительное совпадение между рассчитанными и измеренными средними потоками солнечной радиации [16] свидетельствует о возможности применения уравнений (7) и (10) и аппроксимации (18) для описания переноса солнечного излучения в разорванной облачности.

Для уточнения полученных выше уравнений полезным может оказаться использование марковского приближения  $n$ -го порядка ( $n \geq 1$ ), для которого (2) запишется в виде

$$P_{i_1 \dots i_{m-1}}(r_1, \dots, r_{m-1}, r_m, r_{m+1}) = P[x(r_{m+1}) = 1/x(r_m) = 1, x(r_{m-1}) = i_{m-1}, \dots, x(r_{m-n+1}) = i_{m-n+1}] P_{i_1 \dots i_{m-1}}(r_1, \dots, r_m).$$

Вывод уравнений моментов интенсивности осуществляется с помощью изложенного выше способа, причем замкнутая система состоит из  $(n+1)$ -го уравнения.

Вопрос о целесообразности и возможности использования этого приближения требует дополнительного изучения.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что свойство (2) влечет соотношение (9). Из последующего вывода очевидно, что, не уменьшая общности, достаточно доказать (9) при  $k=1$ . Воспользуемся методом «максимального сечения» [15]. Выберем такое  $\sigma_m$ , что  $\sigma(r) \leq \sigma_m$  при всех  $r \in M$ , и, используя очевидное тождество

$$[\sigma_m - x(r)\sigma(r)] I(r, \omega) = \int_{4\pi} [\sigma_m - x(r)\sigma(r)] I(r, \omega') \delta(\omega' - \omega) d\omega',$$

представим (4) в виде

$$\omega \nabla I(r, \omega) + \sigma_m I(r, \omega) = \int_{4\pi} \varphi(r, \omega, \omega') I(r, \omega') d\omega', \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(r, \omega, \omega') &= \lambda(r)\sigma(r)x(r)g(r, \omega, \omega') + [\sigma_m - x(r)\sigma(r)] \times \\ &\times \delta(\omega' - \omega) = x(r)\sigma(r)R(r, \omega, \omega') + \sigma_m \delta(\omega' - \omega). \end{aligned}$$

Краевая задача, связанная с (19), эквивалентна интегральному уравнению

$$I(x) = \int_X k(x', x) I(x') dx' + \psi(x) \quad (20)$$

с ядром

$$\begin{aligned} k(x', x) &= \varphi(r', \omega, \omega') f(x', x), \\ f(x', x) &= \frac{\exp[-\sigma_m |r - r'|]}{|r - r'|^2} \delta\left(\omega - \frac{r - r'}{|r - r'|}\right) \end{aligned}$$

и функцией источников  $\psi(x)$ , определяемой граничными условиями. Здесь  $X$  — фазовое пространство координат и направлений,  $x = (r, \omega)$ . Представив формальное решение (20) в виде ряда Неймана, умножим его на  $x(r)x(r')$  и усредним. Имеем

$$\begin{aligned} \overline{x(r)x(r')I(r', \omega')} &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_X \dots \int_X dx_0 \dots dx_{m-1} \psi(x_0) L \times \\ &\times f(x_0, x_1) \dots f(x_{m-1}, r', \omega'), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} L &= \overline{x(r)x(r')} \prod_{k=0}^{m-1} \varphi(r_k, \omega_k, \omega_{k+1}) = \sum_{i_0=0}^1 \dots \sum_{i_{m-1}=0}^1 P_{i_0 \dots i_{m-1}}(r, r', \\ &r_0, \dots, r_{m-1}) \prod_{k=0}^{m-1} [i_k \sigma(r_k) R(r_k, \omega_k, \omega_{k+1}) + \sigma_m \delta(\omega_k - \omega_{k+1})], \end{aligned}$$

$$\omega_m = \omega'.$$

Подставляя сюда (2), получаем

$$L = V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_{i_0=1}^1 \dots \sum_{i_{m-1}=0}^1 P_{i_0 \dots i_{m-1}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_{m-1}) \prod_{k=0}^{m-1} [i_k \sigma(\mathbf{r}_k) \times \\ \times R(\mathbf{r}_k, \omega_k, \omega_{k+1}) + \sigma_m \delta(\omega_k - \omega_{k+1})] = \\ = V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \chi(\mathbf{r}') \prod_{k=0}^{m-1} \varphi(\mathbf{r}_k, \omega_k, \omega_{k+1}).$$

Подставляя полученное выражение в (21), получаем (9) при  $k = 1$ , что и требовалось.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.—А. Р. Мулламаа, М. А. Сулев, В. К. Пылдмаа и др., Стохастическая структура полей облачности и радиации, Валгус, Тарту, 1972.
2. В. Г. Золотухин, В. А. Климанов, О. И. Лейпунский и др., Прохождение излучения через неоднородности в защите, Атомиздат, М., 1969.
3. Ю.—А. Р. Мулламаа, в сб. Облачность и радиация, Тарту, 1975, с. 191.
4. Г. М. Вайникко, в сб. Статистические исследования разорванной облачности, Тр. МГК СССР, Метеорология, № 21, 1973, с. 28.
5. Г. Н. Глазов, Г. А. Титов, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 12, № 9, 963 (1976).
6. Г. Н. Глазов, Г. А. Титов, в сб. Вопросы лазерного зондирования атмосферы, изд. СО Наука, Новосибирск, 1976, с. 126.
7. Г. Н. Глазов, Г. А. Титов, Изв. вузов — Физика, № 9, 103 (1977).
8. О. А. Авасте, Г. М. Вайникко, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 10, № 10, 1054 (1974).
9. В. И. Тихонов, М. А. Миронов, Марковские процессы, изд. Сов. радио, М., 1977.
10. Д. Дейрменджан, Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами, изд. Мир, М., 1971.
11. В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, 17, № 4, 570 (1974).
12. А. Т. Баруча-Рид, Элементы теории марковских процессов и их приложения, изд. Наука, М., 1969.
13. Г. М. Вайникко, в сб. Статистические исследования разорванной облачности, Тр. МГК СССР, Метеорология, № 21, 1973, с. 65.
14. Г. М. Вайникко, в сб. Статистические исследования разорванной облачности, Тр. МГК СССР, Метеорология, № 21, 1973, с. 38.
15. Г. А. Михайлов, Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло, изд. СО Наука, Новосибирск, 1974.
16. Г. Н. Глазов, Г. А. Титов, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 15, № 11, 1151 (1979).

Институт оптики атмосферы  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
2 апреля 1979 г.

#### RADIATION INTENSITY MOMENTAL EQUATIONS IN BROKEN CLOUDINESS IN MARKOV APPROXIMATION

G. N. Glazov, G. A. Titov

Based on the stochastic transfer equation systems of equations have been obtained for intensity moments in a special model of broken cloudiness as a stochastic medium. A recurrence solution of these equations permits to calculate moments of any order.