ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 4 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 533.951

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

В. И. Гришаев, В. В. Демченко

Исследуются нелинейные продольные колебания релятивистской плазмы в области верхнего гибридного резонанса под воздействием монохроматического поля накачки. Показано, что нелинейные слагаемые $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{p}$ в уравнениях движения не ограничивают амплитуду колебаний электронов в резонансной области В то же время нелинейные слагаемые, обусловленные релятивистским характером колебаний, во-первых, ограничивают амплитуду колебаний в резонансной области и, во-вторых, приводят к раскачке неустойчивых колебаний. Выяснен параметрический характер неустойчивости. Получены условия, при которых колебания становятся неустойчивыми, а также найдены выражения для инкрементов неустойчивых колебаний.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросы взаимодействия мощного электромагнитного излучения с плазмой представляют практический интерес как с точки зрения исследования явлений распространения и поглощения электромагнитных волн в ионосфере Земли и плазме космического пространства, так и для развития эффективных методов нагрева плазмы в термоядерных устройствах.

Известно [1], что в холодной изотропной нерелятивистской плазме параметрический резонанс возникает как результат относительного осцилляторного движения электронов и ионов в поле волны накачки. При частотах поля накачки, близких к электронной плазменной частоте, имеет место параметрическое возбуждение низкочастотных колебаний, дисперсия которых полностью определяется характеристиками ВЧ поля. На дисперсию ВЧ плазменных колебаний внешнее ВЧ поле влияет слабо, незначительно изменяя собственную частоту колебаний. Другими словами, нарастающие колебания в нерелятивистской плазме возможны лишь при учете движения как электронной, так и ионной компонент плазмы.

Как впервые было показано в работах [2, 3], релятивистские осцилляции электронной массы в ВЧ поле приводят к параметрической раскачке электронных колебаний. Детальное изложение линейной теории устойчивости релятивистских колебаний плазмы в монохроматических ВЧ полях приведено в работе [4].

Нелинейные продольные колебания релятивистской плазмы в лагранжевых переменных впервые исследовались в [5], где показано, что частота этих колебаний является функцией амплитуды (колебания теряют свой изохронный характер). Обобщение результатов работы [5] на случай колебаний плазмы в магнитном поле произведено в [6].

В работе [7] исследовались нелинейные релятивистские продольные колебания однородной изотропной плазмы в поле внешней монохроматической волны. Показано, что в случае основного резонанса, когда частота собственных колебаний плазмы близка к частоте модулирующего поля, амплитудная характеристика имеет характерный для нелинейных систем гистерезисный (многозначный) характер. Исследование устойчивости установившихся состояний показывает, что в определенной области изменения параметров внешнего поля и плазмы колебания оказываются параметрически неустойчивыми. Отметим, что аналитические результаты работы [7] были повторены в работе [8]. Параметрическое возбуждение продольных колебаний магнитоактивной плазмы при учете релятивистских осцилляций массы электронов изучалось в работе [9]. Однако в отличие от работы [7], где для описания нелинейных колебаний плазмы использовался лагранжев формализм (нелинейные слагаемые в уравнениях движения могут быть порядка линейных), в работе [9] применялся метод линеаризации слабонелинейных уравнений по амплитуде колебаний электронов в рамках эйлерова формализма.

В настоящей работе исследуются нелинейные продольные релятивистские колебания однородной магнитоактивной плазмы, помещенной в монохроматическое электрическое поле. Показано, что учет нелинейных слагаемых в уравнениях движения не приводит к ограничению роста амплитуды колебаний электронов в области верхнего гибридного резонанса, когда частота поля накачки близка к одной из собственных частот продольных колебаний плазмы в магнитном поле. Нелинейные слагаемые в уравнениях движения, обусловленные релятивистским характером колебаний, приводят к ограничению амплитуды колебаний при таких значениях, когда имеет место самопересечение электронных траекторий. Показано также, что при выполнении определенных соотношений между параметрами плазмы и поля накачки имеет место параметрическое возбуждение колебаний. Определены условия возникновения параметрической неустойчивости и инкременты нарастания неустойчивых колебаний.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Колебания плазмы в рассматриваемом случае ($v_ф \gg v_T$) описываются уравнениями гидродинамического приближения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}_0]; \tag{1}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}(n v_\xi) = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = 4\pi e(n - N), \tag{3}$$

где $\mathbf{p}$ — импульс электрона, $\mathbf{B}_0$ — напряженность статического магнитного поля, ось ξ составляет угол θ с осью $z \parallel \mathbf{B}_0$, $x = \xi \sin\theta$, $z = \xi \cos\theta$, n — плотность электронов, N — плотность ионов, $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля колебаний (в рассматриваемом случае $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$).

Ограничимся далее исследованием электронных колебаний в области верхнего гибридного резонанса. В рассматриваемой области частот ионы можно рассматривать как покоящийся положительный фон, необходимый для поддержания квазинейтральности плазмы. В случае почти поперечных ($\cos\theta \ll m_e/m_i$, $\xi \equiv x$) колебаний уравнения движения принимают вид

$$\frac{dp_x}{dt} = eE + \omega_c \frac{p_y}{\sqrt{1 + p^2/m_0^2c^2}}; \tag{4}$$

$$\frac{dp_y}{dt} = -\omega_c \frac{p_x}{\sqrt{1 + p^2/m_0^2 c^2}}, \tag{5}$$

где $|\omega_c| = |e| B_0/m_0 c$, m_0 — масса покоя электрона; выписывая (4), (5), мы воспользовались соотношением $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}/m_0 (1 - p^2/m_0^2 c^2)^{1/2}$. Используя (2), (3), нетрудно получить

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E_{\text{ext}}}{\partial t} - \frac{\omega_p^2}{e} \frac{p_x}{\sqrt{1+p^2/m_0^2 c^2}}, \tag{6}$$

где $E_{\text{ext}} = E_0 \sin \omega_0 t$ — напряженность электрического поля волны накачки, $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m_0$.

Система уравнений (4)—(6) является исходной при исследовании нелинейных релятивистских колебаний магнитоактивной плазмы. Необходимо отметить, что данная система уравнений является нелинейной по двум причинам: во-первых, вследствие явной зависимости частоты колебаний от импульса электронов, во-вторых, ввиду строгого учета нелинейных слагаемых в уравнениях гидродинамики $\left(\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\right)$.

В слаборелятивистском приближении ($\beta^2 = p^2/m_0^2 c^2 \ll 1$) система уравнений (4)—(6) существенно упрощается. Разлагая радикал в ряд по параметру β и ограничиваясь слагаемыми третьего порядка малости, приводим систему уравнений (4), (5) к виду

$$\frac{dp_x}{dt} = eE + \omega_c p_y \left(1 - \frac{p^2}{2m_0^2 c^2}\right); \tag{7}$$

$$\frac{dp_y}{dt} = -\omega_c p_x \left(1 - \frac{p^2}{2m_0^2 c^2}\right). \tag{8}$$

Дифференцируя уравнение (7) по t, используя соотношения (6) и (8), а также соотношение

$$p_y \approx \frac{\omega_c}{\omega_h^2} \frac{dp_x}{dt}, \tag{9}$$

где $\omega_h^2 \equiv \omega_p^2 + \omega_c^2$, получим уравнение, определяющее изменение импульса элемента электронной жидкости:

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \omega_h^2 p = f_0 \cos \omega_0 t + \mu_1 p^3 + \mu_2 p \left(\frac{dp}{dt}\right)^2, \tag{10}$$

где

$$p = p_x, \qquad f_0 = eE_0 \omega_0,$$

$$\mu_1 = \frac{\omega_p^2 + 2\omega_c^2}{2m_0^2 c^2}, \qquad \mu_2 = \frac{2\omega_c^2 - \omega_p^2}{2\omega_h^4 m_0^2 c^2} \omega_c^2.$$

В безразмерных переменных уравнение (10) приобретает вид

$$\frac{d^2 g}{d\tau^2} + \delta \frac{dg}{d\tau} + g = \varepsilon \sin \nu\tau + g^3 + \alpha g \left(\frac{dg}{d\tau}\right)^2, \tag{11}$$

где

$$\tau = \omega_h t, \quad g = \frac{\sqrt{\mu_1}}{\omega_h} p, \quad \delta = \frac{\nu_e}{\omega_h},$$

$$\alpha = \frac{\mu_2}{\mu_1}\omega_h^2, \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{\mu_1}}{\omega_h^3} f_0,$$

ν_e — феноменологически введенный коэффициент диссипации энергии колебаний.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ

В случае малых амплитуд колебаний, когда релятивистскими добавками в уравнении (10) можно пренебречь, получим

$$p_{(c\to\infty)} = \frac{f_0}{\omega_h^2 - \omega_0^2}\cos\omega_0 t. \tag{12}$$

Из соотношения (12) следует, что нелинейные слагаемые в уравнениях гидродинамики не ограничивают рост амплитуды колебаний при приближении частоты ВЧ поля ω_0 к частоте собственных колебаний плазмы ω_h.

Следует ожидать, что рост амплитуды колебаний в резонансной области будет ограничиваться учетом нелинейных слагаемых в уравнении (11), обусловленных релятивистским характером колебаний. Уравнение (11) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка со слабой нелинейностью, для решения которого применим метод Крылова — Боголюбова [10].

Опуская промежуточные вычисления, решение уравнения (11) в первом приближении запишется в виде

$$g = a\cos(\nu\tau + \vartheta), \tag{13}$$

где

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{a\delta}{2} - \frac{\varepsilon}{1+\nu}\cos\vartheta; \tag{14}$$

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = 1 - \nu - \frac{3\alpha'}{8}a^2 + \frac{\varepsilon}{a(1+\nu)}\sin\vartheta, \qquad \alpha' = 3\mu_1 + \mu_2. \tag{15}$$

В установившемся режиме уравнение, определяющее зависимость амплитуды колебаний от частоты поля накачки, удобно записать следующим образом:

$$\varepsilon^2 = a^2\left\{\delta^2 + \left[\left(1 - \frac{3\alpha'}{8}a^2\right)^2 - \nu^2\right]^2\right\}. \tag{16}$$

Схематически частотная характеристика $a^2 = a^2(\nu)$ при фиксированных значениях ε и δ представлена на рис. 1. Пунктирная линия BC соответствует скелетной кривой, определяемой уравнением

$$\nu - 1 = \frac{3\,|\alpha'|}{8}a^2. \tag{17}$$

Как следует из рис. 1, существуют значения частоты поля накачки, при которых зависимость амплитуды от частоты поля носит гистерезисный характер [10]. Как будет показано ниже, часть кривой BC соответствует неустойчивым состояниям равновесия.

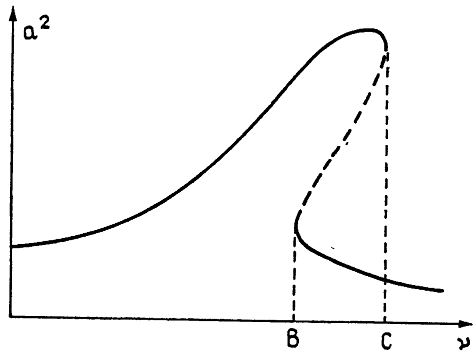

Рис. 1.

Покажем, что в отсутствие диссипации ($\delta = 0$) система уравнений (14), (15) допускает строгое аналитическое решение в терминах эллиптических функций. Как нетрудно убедиться, система уравнений (14), (15) имеет первый интеграл, который удобно представить в виде

$$\sin\vartheta = \frac{C}{\varepsilon a} - \frac{\Delta a}{\varepsilon} + \frac{3\alpha'}{16\varepsilon} a^3, \tag{18}$$

где $\Delta = 1 - \nu$, C — постоянная интегрирования. Исключая с помощью соотношения (18) переменную ϑ из уравнения (14), приводим последнее к виду

$$\frac{dZ}{d\tau} = \frac{2}{1+\nu}\left[\sum_{q=1}^{4} \Lambda_q Z^q - C^2\right]^{1/2} = \sqrt{M(z)}, \tag{19}$$

где

$$Z = a^2, \quad \Lambda_1 = \varepsilon^2 + 2C\Delta, \quad \Lambda_2 = -(\Delta^2 + 2C\gamma),$$

$$\Lambda_3 = 2\Delta\gamma, \quad \Lambda_4 = -\gamma^2, \quad \gamma = \frac{3}{16}\alpha'.$$

Произведя в уравнении (19) замену переменной [11]

$$Z = \frac{z_2 X^2 - \lambda z_1}{X^2 - \lambda}, \qquad \lambda = \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_3}, \tag{20}$$

где z_i — корни уравнения $M(z) = 0$, $z_1 > z_2 > z_3 > z_4$, получаем решение в виде

$$X(\tau) = \mathrm{sn}\,[\nu'(\tau - \tau_0);\ k],$$
$$\nu' = \frac{1}{4}\,\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_3}, \qquad k = \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_1}\,\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}, \tag{21}$$

где τ_0 — постоянная интегрирования. Поскольку $a = \sqrt{Z}$, решение уравнения (11) в явном виде в первом приближении метода Крылова — Боголюбова записывается следующим образом:

$$g = \left\{\frac{z_2\,\mathrm{sn}^2[\nu'(\tau - \tau_0);\ k] - \lambda z_1}{\mathrm{sn}^2[\nu'(\tau - \tau_0);\ k] - \lambda}\right\}^{1/2} \cos(\nu t + \vartheta). \tag{22}$$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ

Как отмечалось выше, при определенных соотношениях между параметрами плазмы и характеристиками внешней возбуждающей силы установившиеся продольные плазменные колебания неустойчивы. В настоящем разделе работы будут получены необходимые условия устойчивости колебаний и дана их физическая интерпретация. Для исследования устойчивости гармонических колебаний ($\nu = 1$) воспользуемся изложенным в [12] методом, основанным на использовании критерия Рауса — Гурвица. Записывая решение уравнения (11) в виде

$$g = x(\tau)\sin\tau + y(\tau)\cos\tau, \tag{23}$$

где $x(\tau)$, $y(\tau)$ — медленно меняющиеся функции, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2\frac{dx}{d\tau} &= -\delta x + \frac{1}{4}(3+\alpha)\,y\Gamma^2, \\ 2\frac{dy}{d\tau} &= -\delta y - \frac{1}{4}(3+\alpha)\,x\Gamma^2 + \varepsilon, \end{aligned} \tag{24}$$

где $\Gamma^2 = x^2 + y^2$. В установившемся состоянии амплитуда Γ_0 удовлетворяет уравнению

$$\Gamma_0^2(\delta^2 + A^2) = \varepsilon^2, \tag{25}$$

где $A^2 = ((3+\alpha)/4)\,\Gamma_0^2$. Значения амплитуд установившихся колебаний x_0 и y_0 определяются соотношениями

$$x_0^2 = \frac{A^2\Gamma_0^2}{\delta^2 + A^2}, \qquad y_0^2 = \frac{\delta^2\Gamma_0^2}{\delta^2 + A^2}. \tag{26}$$

Для исследования устойчивости установившихся гармонических колебаний вводим малые отклонения от состояния равновесия: $\xi_0 = x - x_0$, $\eta_0 = y - y_0$. Уравнения в вариациях имеют в рассматриваемом случае вид

$$\begin{aligned} 2\frac{d\xi_0}{d\tau} &= a_1\xi_0 + a_2\eta_0, \\ 2\frac{d\eta_0}{d\tau} &= b_1\xi_0 + b_2\eta_0, \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$a_1 = \frac{\partial X_0}{\partial x}, \quad a_2 = \frac{\partial X_0}{\partial y}, \quad b_1 = \frac{\partial Y_0}{\partial x}, \quad b_2 = \frac{\partial Y_0}{\partial y},$$

$$2X_0 = -\delta x + \varkappa_0(x^2 y + y^3),$$

$$2Y_0 = -\delta y - \varkappa_0(x^3 + xy^2) + \varepsilon, \quad \varkappa_0 = (3+\alpha)/4.$$

Представляя решение системы уравнений (27) в виде $(\xi_0, \eta_0) \sim e^{\lambda\tau}$, для нахождения характеристического показателя λ получим уравнение

$$\lambda^2 - (b_2 + a_1)\,\lambda + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0. \tag{28}$$

Согласно критерию Рауса — Гурвица, необходимые условия устойчивости системы записываются в виде

$$\begin{aligned} a_1 + b_2 &< 0, \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 &> 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Для придания условиям (29) физического смысла перепишем их в значащих переменных:

$$\delta > 0, \qquad \delta^2 + 3\gamma^2 \Gamma_0^4 > 0. \tag{30}$$

Первое из условий (30) очевидно, а второе совпадает с условием

$$\frac{d(\varepsilon^2)}{d(\Gamma_0^2)} = \delta^2 + 3\gamma^2 \Gamma_0^4 > 0. \tag{31}$$

Следовательно, на участках амплитудных характеристик, для которых удовлетворяется условие (31), колебания плазмы устойчивы.

Для определения инкремента неустойчивых колебаний, соответствующих областям неустойчивости уравнения (11), запишем соответствующее уравнение в вариациях

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \delta \frac{d\xi}{d\tau} + \xi - 3g_0 \xi - \alpha \left[\left(\frac{dg_0}{d\tau} \right)^2 \xi + 2g_0 \frac{dg_0}{d\tau} \frac{d\xi}{d\tau} \right] = 0, \tag{32}$$

где $\xi = g - g_0$, $g_0 = x_0 \sin\tau + y_0 \cos\tau$, x_0 и y_0 определяются формулами (26). Подставляя выражение для g_0 в уравнение (32), приводим последнее к виду обобщенного уравнения Хилла:

$$\begin{gathered} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{d\xi}{d\tau} \left\{ \delta - \alpha \left[(x^2 - y^2) \sin 2\tau + 2xy \cos 2\tau \right] \right\} + \\ + \xi \left[1 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2)(3 + \alpha) + \left(\frac{3+\alpha}{2} x^2 - \frac{3-\alpha}{2} y^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \cos 2\tau - xy(3 - \alpha) \sin 2\tau \right] = 0. \end{gathered} \tag{33}$$

Получим решение уравнения (33), используя изложенный в монографии [13] метод возмущений. Как известно из теории уравнений с периодическими коэффициентами, инкременты нарастания колебаний и размеры областей неустойчивости уменьшаются с возрастанием номера резонансной гармоники n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. По этой причине в дальнейшем ограничим рассмотрение случаем основного субгармонического резонанса $(n = 1)$, которому соответствует наибольший инкремент нарастания колебаний. Введением вектора $\boldsymbol{x}$, матриц C и ΔB (τ),

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \xi \\ \dfrac{d\xi}{d\tau} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta B(\tau) = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ \Delta_{01} + \Delta_{02} \sin 2\tau + \Delta_{03} \cos 2\tau, & \Delta_{11} + \Delta_{12} \sin 2\tau + \Delta_{13} \cos 2\tau \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$$\Delta_{01} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)(3 + \alpha), \qquad \Delta_{11} = -\delta,$$

$$\Delta_{02} = xy(3 - \alpha), \qquad \Delta_{12} = \alpha(x^2 - y^2),$$

$$\Delta_{03} = \left(\frac{3-\alpha}{2} y^2 - \frac{3+\alpha}{2} x^2\right), \qquad \Delta_{13} = 2\alpha x y,$$

уравнение (33) приводится к виду

$$\frac{dx}{d\tau} = [C + \Delta B(\tau)]\, x. \tag{35}$$

Как показано в [13], характер решений уравнения (35) определяется поведением так называемых характеристических показателей $\varkappa_{1,2}$. Если реальная часть хотя бы одного характеристического показателя больше нуля, состояние системы оказывается неустойчивым. Для вычисления характеристических показателей уравнения (35) воспользуемся результатами главы IV из [13]. Собственные значения матрицы C равны $c_1 = -i$, $c_2 = i$ и сравнимы по модулю $2i$. Следовательно, имеет место так называемый особый случай, когда

$$c_1 \neq c_2, \quad c_{1,2} = \alpha_0 + 2m_{1,2} i, \quad \alpha_0 = i, \quad m_1 = -1, \quad m_2 = 0.$$

Приведем матрицу C к жордановой форме

$$C = SQS^{-1}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

Поскольку величина $\alpha_0 = i$, после стандартной процедуры сведения особого случая к неособому [13] получаем, что преобразованная матрица

$$C_0 = S\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Первые члены разложения характеристической матрицы $K(\Delta) = K_0 + \Delta K_1 + \ldots$ в ряд по малому параметру Δ равны

$$K_0 = C - C_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad \Delta K_1 = \frac{1}{T}\int_0^T e^{\tau C_0}\, \Delta B(\tau)\, e^{-\tau C_0}\, d\tau, \tag{36}$$

где T — период матрицы $\Delta B(\tau)$. Используя явный вид матрицы $\Delta B(\tau)$ (34), а также выражения

$$e^{\tau C_0} = \begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}, \qquad e^{-\tau C_0} = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix},$$

запишем характеристическую матрицу следующим образом:

$$\Delta K_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \Delta_{02} + 2\Delta_{11} - \Delta_{13}, & \Delta_{03} - 2\Delta_{01} + \Delta_{12} \\ \Delta_{03} + 2\Delta_{01} + \Delta_{12}, & \Delta_{13} + 2\Delta_{11} - \Delta_{02} \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Характеристические показатели $\varkappa$ являются корнями уравнения

$$\det(K_0 + \Delta K_1 - \varkappa I) = \left(\varkappa + \frac{\delta}{2}\right)^2 + R - \frac{i(\Delta_{02} - \Delta_{13})}{2} = 0, \tag{38}$$

где

$$R = 1 - \frac{1}{16}\left[(\Delta_{02} - \Delta_{13})^2 + (\Delta_{03} + \Delta_{12})^2 - 4\Delta_{01}^2\right].$$

В области параметров Δ_{ik}, для которых реальная часть хотя бы одного характеристического показателя больше нуля, уравнение (33) имеет неустойчивое решение вида

$$\xi \approx e^{\gamma_0 \tau} \sin \tau, \tag{39}$$

где

$$\gamma_0 = \mathrm{Re}\,\varkappa = -\frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2}(\Delta_{02} - \Delta_{13}) R^{-1/2} \sim \varepsilon\omega_h. \tag{40}$$

Отметим, что в настоящем разделе работы исследовалась устойчивость гармонических ($\nu = 1$) колебаний. Аналогичным образом можно исследовать параметрическое возбуждение субгармонических и ультрагармонических колебаний [12].

В заключение авторы выражают благодарность К. Н. Степанову за плодотворное обсуждение полученных в работе результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, изд. Наука, М., 1973, с. 23.
2. А. Л. Берхоер, В. Е. Захаров, ЖЭТФ, 58, № 3, 903 (1970).
3. Н. Л. Цинцадзе, ЖЭТФ, 59, № 10, 1251 (1970).
4. N. L. Tsintsadze, F. G. Tsikarishvili, Astrophys. Space Sci., 39, 181 (1976).
5. Р. В. Половин, ЖЭТФ, 31, № 2(8), 354 (1956).
6. К. Н. Степанов, ЖТФ, 33, № 2, 246 (1963).
7. V. V. Demchenko, I. A. El-Naggar, Z. f. Phys., 257B, 224 (1972).
8. Т. А. Цивцивадзе, Н. Л. Цинцадзе, Физика плазмы, 3, № 2, 277 (1977).
9. Д. Д. Цхакая, М. Я. Эль-Ашри, Fifth European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Grenoble, I, Comissariat a l'energie atomique, 1972, p. 135.
10. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. Наука, М., 1974, с. 220.
11. W. F. Ames, Nonlinear Ordinary Differential Equations in Transport Processes, Academic Press, N. Y., 1968, p. 55.
12. Т. Хаяси, Нелинейные колебания в физических системах, изд. Мир, М., 1968.
13. В. А. Якубович, В. М. Старжинский, Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, изд. Наука, М., 1972.

Поступила в редакцию
23 мая 1977 г.

PARAMETRIC INSTABILITY OF NONLINEAR RELATIVISTIC LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF MAGNETOACTIVE PLASMA

V. I. Grishaev, V. V. Demchenko

Nonlinear longitudinal oscillations of a relativistic plasma are investigated in the region of upper hybrid resonance under the action of monochromatic pumping field. It is shown that nonlinear addanda $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{p}$ in equations of motion do not restrict the amplitude of electron oscillations in the resonance region. At the same time, nonlinear addenda due to a relativistic character of oscillations restrict the amplitude of oscillations in the resonance region and lead to a swinging of unstable oscillations. The parametric character of the instability is clarified. Conditions have been obtained when oscillations become unstable and expressions have been found for the increments of unstable oscillations.