

УДК 538.574.6

**ФОКАЛЬНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ
ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ***А. П. Киселев*

Исследуется высокочастотная задача о фокусировке волн, дифрагированных выпуклым, гладким или имеющим ребро, телом вращения. Для поля в окрестности оси симметрии выводятся простые уравнения, решения которых сшиваются с проходящими и уходящими волнами.

При использовании метода возмущений в задачах математической физики часто встречаются так называемые пограничные слои — малые области, где структура решения изменяется очень сильно [1]. Пограничные слои естественно возникают и в связи с «геометрической теорией дифракции» (ГТД) Келлера [2].

В ГТД волновой процесс имеет «почти везде» квазилучевой характер: главные осцилляции поля происходят вдоль лучей, а в поперечных направлениях оно изменяется медленнее. Таковы собственно лучевые (ВКБ) разложения, ряды Фридлиндера — Келлера, поверхностные волны [3]. Каждый член ряда, представляющего асимптотическое решение квазилучевого типа, содержит произвольную гладкую функцию от всех (или части) поперечных к лучам координат. Совокупность этих функций образует, по нашей терминологии, данные рассматриваемого решения.

Квазилучевые решения теряют асимптотический характер в уменьшающихся с длиной волны пограничных слоях, окружающих особые точки лучевых конгруэнций. Там строятся учитывающие специфику лучевой геометрии разложения, называемые погранслойными или внутренними. Они содержат свои произвольные функции — данные. Запас неопределенности погранслойных рядов достаточен для сращивания их с падающей квазилучевой волной: предполагая ее известной, можно определить данные погранслойного решения. При сращивании последнего с уходящей волной находятся и ее данные.

Эта программа намечена для нескольких задач в [2]. Техника сшивания неравномерных разложений во всех приближениях развивалась в [3].

Настоящая статья посвящена описанию специфических пограничных слоев, порожденных аксиально-симметричной лучевой конгруэнцией. Рассматриваются задачи о теле с ребром и о гладком выпуклом теле вращения.

Первой задачей занимались многие (см. [4–10]), начиная с Пуассона, с именем которого связывают открытие светлого пятна в центре зоны тени при дифракции на круглом диске [4]. Исследования фокусировки на конечных расстояниях, где метод Кирхгофа непригоден, сравнительно немногочисленны, и результаты, полученные разными путями, противоречат друг другу. Мы обнаруживаем ошибочность формул работ [2, 6], использовавших методику пограничного слоя. Наши результаты согласуются с полученными из точного решения [9, 10] и при помощи равномерных асимптотик [7, 8, 11].

Вторая задача рассматривается, видимо, впервые. Мы исследуем окрестность фокальной оси отдельно для приповерхностного слоя и для области, где фокусирующееся поле имеет вид ряда Фридлиндера — Келлера. Структура погранслоевых уравнений, которым удовлетворяет фокальное поле, во всех трех случаях одинакова. Фокальное уравнение нулевого приближения оказывается эллиптическим. Это двумерное уравнение Гельмгольца со скоростью, зависящей от третьей переменной.

Отметим, что полученные нами уравнения фокального пограничного слоя описывают не только фокусировки квазилучевых полей, в связи с которыми они возникли, но и другие физические ситуации, характеризующие тем же масштабом (например, фокусировки полутеневых полей). В этой универсальности погранслоевых уравнений мы видим преимущество схемы пограничного слоя перед разного рода «равномерными» методиками [7, 8, 12].

Определение. Гладкую функцию $g_0(\mathbf{r}, k) \neq 0$ назовем асимптотическим решением уравнения

$$(\Delta_r + k^2)u = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad (1)$$

с точностью $\varepsilon > 0$, если невязка $Q[g_0] \equiv (\Delta + k^2)g_0$ имеет в Ω равномерную оценку $Q[g_0] = O(k^{2-\varepsilon}g_0)$, $k \rightarrow \infty$.

Асимптотический при $k \rightarrow \infty$ ряд $g \sim \sum_{s \geq 0} g_s(\mathbf{r}, k)$ гладких по \mathbf{r} функций назовем асимптотическим решением (1) с бесконечной точностью, если невязки частных сумм g с достаточно большими номерами суть решения (1) с точностью N для любого $N > 0$.

1. ТЕЛО С РЕБРОМ

Рассмотрим осесимметричную поверхность вращения D с ребром d радиуса a . Точку \mathbf{r} будем характеризовать полярными координатами ρ, φ, z ($\infty > \rho \geq 0$, $2\pi > \varphi \geq 0$, $\infty > z > -\infty$), выбранными так, что $\rho = 0$ — ось симметрии D , а d лежит в плоскости $z = 0$. Для определенности сейчас будем считать D бесконечно тонким диском*.

Лучами, соответствующими дифракционным волнам, назовем полупрямые, начинающиеся на d и пересекающие линию $\rho = 0$, которая оказывается фокальной (каустической): в каждую точку ее приходит бесконечно много лучей. Точку \mathbf{r} , у которой $\rho \neq 0$, соединяют с ребром d точно два луча: пересекающий и не пересекающий по пути к \mathbf{r} фокальную ось. Рассмотрим связанные с обоими лучами геометрические разложения.

1. *Лучевые разложения.* Введем две системы координат $(t_{\pm}, \theta_{\pm}, \varphi)$, см. рис. 1. Связь их с полярными следующая:

$$z = t_{\pm} \cos \theta_{\pm}, \quad (1.1)$$

$$\rho = \mp (a - t_{\pm} \sin \theta_{\pm});$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \theta_{\pm} \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq t_{-} \leq a \sin \theta_{-}, \quad (1.2)$$

$$a \sin \theta_{+} \leq t_{+} < \infty.$$

Зная выражение элемента длины

$$dr^2 = dt_{\pm}^2 + t_{\pm}^2 d\theta_{\pm}^2 + (a - t_{\pm} \sin \theta_{\pm})^2 d\varphi^2, \quad (1.3)$$

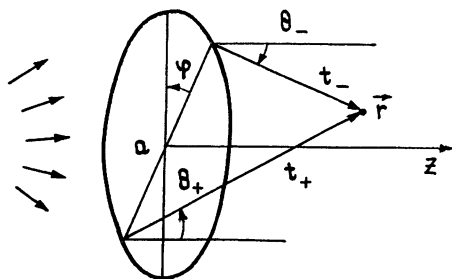


Рис. 1.

* Общий случай рассмотрен в Приложении 1, где требуется аксиальная симметрия не тела D , а только ребра.

легко записать оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{1}{J_{\pm}} \left[\frac{\partial}{\partial t_{\pm}} J_{\pm} \frac{\partial}{\partial t_{\pm}} + \frac{1}{t_{\pm}^2} \frac{\partial}{\partial \theta_{\pm}} J_{\pm} \frac{\partial}{\partial \theta_{\pm}} + \frac{t_{\pm}^2}{J_{\pm}} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], \quad (1.4)$$

где $J_{\pm} = \mp t_{\pm}(a - t_{\pm} \sin \theta_{\pm})$ — геометрические расхождения лучей.

Регулярность этих систем координат нарушается на фокальной оси $t_{\pm} \sin \theta_{\pm} = a$, а одного из них еще и на ребре $d = \{t_{-} = 0\}$.

На расстоянии от особенностей координатных систем, много большем длины волны, ищем однократно дифрагированное ребром поле в виде лучевых рядов с фазами, отвечающими геометрооптическим пучкам от d до r :

$$u_{1d} \sim u^{+} + u^{-}; \quad (1.5)$$

$$u^{\pm} \sim c_{\pm}(ka) \exp[ikt_{\pm}(r)] \sum_{m>0} (-ika)^{-m} f_m^{\pm}(r). \quad (1.6)$$

Функции f_m^{\pm} предполагаем не зависящими от k и гладкими в рассматриваемой области, а $c_{\pm}(ka)$ — не зависящими от r . Подставляя (1.6) в (1), получим известную (см., например, [3]) систему уравнений переноса—обыкновенных дифференциальных уравнений по t_{\pm} . Интегрирование их дает

$$f_m^{\pm} = \frac{a}{\sqrt{J_{\pm}}} \left\{ \psi_m^{\pm} + \frac{1}{2} \int^{\pm} \sqrt{J_{\pm}} \Delta f_{m-1}^{\pm} dt \right\} \quad (f_{\pm 1}^{\pm} \equiv 0), \quad (1.7)$$

где $\psi_m^{\pm} = \psi_m^{\pm}(\theta_{\pm}, \varphi)$ — произвольные гладкие функции, нижний предел интегрирования равен 0 и $a \sin \theta_{+}$ для значков «—» и «+» соответственно. При $m > 0$ подынтегральные функции в (1.7) сингулярны на нижнем пределе; выберем регуляризацию интегралов в смысле конечной части (см. [3], стр. 109).

Набор c_{-} , ψ_0^{-} , ψ_1^{-} , ... данных волны u^{-} , идущей к каустике, должен определяться из условия сшивания u^{-} с падающим на D полем в окрестности ребра. Отыскание до u^{-} данных c_{+} , ψ_0^{+} , ψ_1^{+} , ... волны u^{+} , уходящей от фокальной оси, составляет, вместе с описанием поля в окрестности фокальной оси, предмет нашей работы.

Функции $\psi_j^{-}(\theta_{-}, \varphi)$, возникающие в задаче дифракции на D лучевого поля, имеют сингулярности по θ_{-} на границе свет—тень. Функция ψ_0^{-} для этого случая выписана в Приложении 1, о высших приближениях см. [11, 13, 15]. Мы будем рассматривать точки оси, вблизи которых ψ_j^{-} гладки по θ_{-} .

Из (1.6), (1.7) легко получить асимптотику функций f_m^{\pm} вблизи каустики при фиксированном z и $\rho/a \rightarrow 0$:

$$f_0^{\pm} \sim \left(\frac{a \sin \theta}{\rho} \right)^{1/2} \psi_0^{\pm}(\theta, \varphi), \quad \theta = \theta(z) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \theta_{\pm}(z, \rho) = \arctg \frac{a}{z}; \quad (1.8)$$

$$f_m^{\pm} \sim \sum_{n>0} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{n-m-1/2} \sum_{p=0}^{m-1} \ln^p \left(\frac{\rho}{a} \right) b_{mnp}^{\pm}(z, \varphi), \quad (1.9)$$

где b_{mnp}^{\pm} гладки, если этим свойством обладают ψ_j^{\pm} . Отсюда легко получить, что в случае гладких ψ_j^{\pm} ряды (1.6) асимптотические и решают (1) с бесконечной точностью.

Из (1.9) видно, что при $\rho/a \rightarrow 0$ $f_{m+1}^{\pm} = O\left(\frac{a}{\rho} f_m^{\pm}\right)$, поэтому в области

$$\rho/a = O(1/ka) \quad (ka \rightarrow \infty) \quad (1.10)$$

лучевые ряды (1.2) теряют асимптотический характер — возникает пограничный слой.

2. *Фокальное разложение.* Вблизи фокальной оси волновой процесс имеет характерный масштаб, легко угадываемый из (1.10), и естественными координатами являются не лучевые, а растянутые по радиусу полярные (R, φ, z)

$$R = k\rho. \quad (1.11)$$

Заметив, что около оси

$$kt_{\pm} = kt(z) \pm R \sin \theta(z) \pm O(R^2/ka), \quad \frac{\rho}{a} \rightarrow 0, \quad (1.12)$$

$$t(z) = \sqrt{z^2 \pm a^2},$$

выделим общий для u^+ и u^- осциллирующий множитель

$$u_{1d} = e^{ikt(z)} F. \quad (1.13)$$

Подставив (1.13) в (1), получим

$$(\Delta_{\perp} + k^2) u_{1d} = e^{ikt(z)} k^2 \left(L_0 - \frac{1}{ka} L_1 - \frac{1}{(ka)^2} L_2 \right) F,$$

где

$$L_0 = \Delta_{\perp} + \sin^2 \theta(z), \quad \Delta_{\perp} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

$$L_1 = -ia \left(2 \cos \theta(z) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\sin \theta(z)}{t(z)} \right), \quad L_2 = -a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Разыскивая теперь F в виде ряда

$$F \sim C(ka) \sum_{n>0} (ka)^{-n} F_n(R, \varphi, z) \quad (1.14)$$

с F_n , зависящими от k только через R , придем, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ka , к уравнениям

$$L_0 F_0 = 0, \quad (1.15)$$

$$L_0 F_1 = L_1 F_0, \quad L_0 F_m = L_1 F_{m-1} + L_2 F_{m-2} \quad (m \geq 2).$$

Первое из фокальных уравнений (1.15) есть двумерное уравнение Гельмгольца с зависящим от z волновым числом. Общее решение уравнения (1.15) в классе обобщенных функций умеренного роста имеет вид

$$F_0(R, z, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp [iR \sin^2 \theta(z) \cos(\varphi - \varphi')] \tilde{F}_0(\theta(z), \varphi') d\varphi' \quad (1.16)$$

с любой обобщенной функцией \tilde{F}_0 (см. [14]). Элементарно выясняется и структура высших приближений:

$$F_m = \int_0^{2\pi} \exp [iR \sin \theta(z) \cos(\varphi - \varphi')] \tilde{F}_m(R, \theta(z), \varphi') d\varphi'; \quad (1.17)$$

$$\tilde{F}_m = \sum_{n=0}^{2m} R^n \tilde{F}_{mn}(\theta(z), \varphi'), \quad (1.18)$$

где \tilde{F}_{mn} не зависят от R , свободные члены \tilde{F}_{m0} полиномов \tilde{F}_m произвольны, а \tilde{F}_{mn} ($n > 0$) однозначно определяются по $\tilde{F}_0, \tilde{F}_{10}, \dots, \tilde{F}_{m-1,0}$. Набор обобщенных функций $\tilde{F}_0, \tilde{F}_{10}, \tilde{F}_{20}, \dots$ вместе с константой $C(ka)$ образует данные ряда (1.13), (1.14).

При осесимметричных (не зависящих от φ') функциях $\tilde{F}_0, \tilde{F}_{10}, \dots$ интегралы (1.17) можно записать в виде

$$I_m = P_m(R)J_0(R \sin \theta(z)) + RQ_m(R)J'_0(R \sin \theta(z)), \\ Q_0 \equiv 0, \quad P_0 = \text{const},$$

где J_0, J'_0 — функция Бесселя и ее производная, P_m и Q_m — многочлены с зависящими от $\theta(z)$ коэффициентами, свободный член полинома P_m произволен, причем $F_m = O(R^{2m}), R \rightarrow \infty$.

Если функция \tilde{F}_0 гладка по φ' на единичной окружности, а в остальном произвольна, то методом стационарной фазы получаем при $R \rightarrow \infty$

$$F_0 \sim \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho \sin \theta(z)}} \times \\ \times \left\{ \exp\left[ik\rho \sin \theta(z) - \frac{i\pi}{4} \right] \tilde{F}_0(\theta(z), \varphi) + \exp\left[-ik\rho \sin \theta(z) + \frac{i\pi}{4} \right] \tilde{F}_0(\theta(z), \pi + \varphi) \right\}. \quad (1.19)$$

Итак, при $R \rightarrow \infty$ фокальное решение (1.13) есть сумма двух быстро осциллирующих слагаемых с фазовыми функциями, отличающимися от kt_{\pm} в (1.6) на $O(R^2/ka)$, см. (1.12). Чтобы иметь возможность шить (1.6) и (1.13), потребуем

$$R = O((ka)^{1/2-h}) \quad (h > 0). \quad (1.20)$$

Условие пригодности лучевых рядов (1.6) дает дополнительно

$$h < 1/2. \quad (1.21)$$

При любой гладкой функции \tilde{F}_0 старший член $V_0 = e^{ikt(z)} F_0$ фокального ряда является в области (1.20), (1.21) асимптотическим решением с точностью $\frac{1}{2} + h$. Действительно,

$$(\Delta + k^2)V_0 = \frac{1}{a^2} e^{ikt} (ka)^2 \left\{ L_1 F_0 + \frac{1}{ka} L_2 F_0 \right\} = \\ = O(kaRV_0) = O((ka)^{2-1/2-h} V_0).$$

Функция же, предложенная авторами [2] (см. также [6]) для описания зависимости фокального поля от R , не удовлетворяет уравнению $L_0 F = 0$ и поэтому не уменьшает невязки (1) при $R = O(1)$.

Если данные фокального разложения гладки по φ' (или хотя бы порядки их сингулярности ограничены в совокупности), то нетрудно проверить, что (1.13) — асимптотическое решение с бесконечной точностью в (1.20), (1.21).

3. *Сшивание.* В области, определенной неравенствами (1.10), (1.21), разложим при $\rho/a \rightarrow 0$ геометрические расхождения и фазы ikt_{\pm} , перенеся члены $O(kR^2/a)$ (см. (1.12)) в амплитуды, и перейдем к координатам пограничного слоя (1.11). Ряды (1.6) примут вид

$$u^{\pm} \sim \exp[ik(t \pm R \sin \theta)] c_{\pm}(ka) \sum_{s>0} (ka)^{-s+1/2} \times \\ \times \sum_{p>0} \ln^p(ka) b_{sp}^{\pm} \left(\frac{\rho}{a}, z, \varphi \right) \quad (\rho/a \rightarrow 0), \quad (1.22)$$

где b_{sp}^{\pm} имеют ту же структуру, что и правые части (1.9). В предположении гладкости данных $\tilde{F}_0, \tilde{F}_{10}, \tilde{F}_{20}, \dots$ * применим к интегралам (1.17) метод стационарной фазы; и фокальное разложение приобретает вид (1.22) с нулевыми коэффициентами при $\ln^p(ka)$ и $\ln^s(\rho/a)$. Стандартно (см. [3]) показывается, что условием совпадения асимптотических решений вида (1.22) является равенство коэффициентов при $(\rho/a)^{-1/2}$. Отсюда, как в [3], выводится отсутствие логарифмических членов в (1.9) и, в принципе, определяются по $\psi_0^-, \psi_1^-, \dots$ все функции $\tilde{F}_0, \tilde{F}_1, \dots$ и $\psi_0^+, \psi_1^+, \dots$

Результат сращения нулевых членов фокального и геометрикооптических разложений таков**:

$$c_-(ka) = c_+(ka) = (ka)^{-1/2} C(ka); \quad (1.23)$$

$$\psi_0^+(\theta, \pi + \varphi) = e^{i\pi/2} \psi_0^-(\theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2\pi}} e^{i\pi/4} \tilde{F}_0(\theta, \varphi). \quad (1.24)$$

Построенные формулы пригодны вблизи любой точки оси тела вращения, освещенной дифракционными лучами от ребра. Для диска они верны и на поверхности, где результат можно проверить сравнением с точным решением [9]. В случае строго выпуклого тела с ребром около поверхности возникает зона тени с совершенно другим характером поля.

2. ГЛАДКОЕ ВЫПУКЛОЕ ТЕЛО. УМЕРЕННЫЕ РАССТОЯНИЯ

Пусть B — гладкая выпуклая поверхность вращения, $\rho = 0$ — ее ось симметрии. Введем две связанные с B координатные системы, удобные для построения квазилучевых решений.

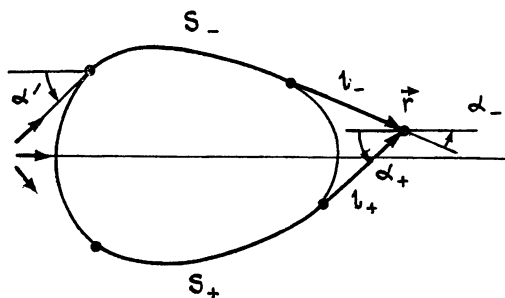


Рис. 2.

* Негладкие решения фокальных уравнений соответствуют нелучевым решениям. Например, разрывы по θ_- и φ отвечают полутеневым полям (об этом см. [14]).

** Выбор функций $\psi_0^+, \psi_1^+, \dots, \tilde{F}_0, \tilde{F}_{10}, \dots$ однозначен, если фиксированы соотношения между c_- и C, c_+ .

Через точку наблюдения r «не принадлежит» B с $\rho \neq 0$ и ось проведем плоскость Π . Пусть l_+ и l_- — длины проведенных из r касательных к контуру $b = B \cap \Pi$, соответственно пересекающей и не пересекающей ось, α_{\pm} — углы между этими касательными и осью, см. рис. 2. Связь величин l_{\pm} , α_{\pm} с полярными координатами следующая:

$$\rho = \mp \left(l_{\pm} \sin \alpha_{\pm} + \int_{\pi/2}^{\alpha_{\pm}} a(\alpha) \sin \alpha d\alpha \right); \quad (2.1)$$

$$z = l_{\pm} \cos \alpha_{\pm} + \int_{\pi/2}^{\alpha_{\pm}} a(\alpha) \cos \alpha d\alpha, \quad (2.2)$$

$$\infty > l_+ \geq a(\alpha_+) \sin \alpha_+, \quad 0 < l_- < a(\alpha_-) \sin \alpha_-.$$

где a — радиус кривизны контура b . Отсюда

$$dr^2 = dl_{\pm}^2 + [l_{\pm}^2 + a^2(\alpha_{\pm})] d\alpha_{\pm}^2 + 2a(\alpha_{\pm}) dl_{\pm} d\alpha_{\pm} + \rho^2 d\varphi^2 \quad (2.3)$$

и

$$\Delta = \frac{1}{I_{\pm}} \left[\frac{\partial}{\partial l_{\pm}} I_{\pm} \frac{\partial}{\partial l_{\pm}} + \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{\pm}} - a(\alpha_{\pm}) \frac{\partial}{\partial l_{\pm}} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\rho}{l_{\pm}} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{\pm}} - a(\alpha_{\pm}) \frac{\partial}{\partial l_{\pm}} \right) \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Здесь $I_{\pm} = l_{\pm} \rho$ — геометрические расхождения лучей. Обе координатные системы $(l_{\pm}, \alpha_{\pm}, \varphi)$ имеют особенность на оси $\rho = 0$, а (l_-, α_-, φ) — еще и на всей поверхности B .

Квазилучевые асимптотические решения, соответствующие введенным координатам (разложения типа Фридлиндера — Келлера), ищем в виде

$$u^{\pm} \sim \mu_{\pm}(k) \exp(ik\tau_{\pm} + ik^{1/3}\chi_{\pm}) \sum_{m>0} (ik)^{-m/3} x_m^{\pm}(l_{\pm}, \alpha_{\pm}, \varphi), \quad (2.4)$$

$$\tau_{\pm} = l_{\pm} + s_{\pm}, \quad s_{\pm} = \int_{\alpha'}^{\alpha_{\pm}} a(\alpha) d\alpha,$$

s_{\pm} — длины дуг контура, где наклон касательной меняется от α_{\pm} до α' ; x_m^{\pm} , χ_{\pm} не зависят от k , χ_{\pm} — произвольные пока гладкие функции. Полезно заметить, что координаты $(\tau_{\pm}, \alpha_{\pm}, \varphi)$ ортогональны. Подставив (2.4) в (1) и воспользовавшись легко проверяемым равенством $(\nabla\tau_{\pm})^2 = 1$, приходим к условиям на χ_{\pm}

$$(\nabla\tau_{\pm}, \nabla\chi_{\pm}) = 0 \quad (2.5)$$

и рекуррентной последовательности задач для оператора

$$L_0^{\pm} = 2(\nabla\tau_{\pm}, \nabla) + \Delta\tau_{\pm} = 2 \frac{d}{d\tau_{\pm}} + \frac{1}{I_{\pm}} \frac{dI_{\pm}}{d\tau_{\pm}}.$$

Решив эти задачи, получим, что при любых гладких χ_{\pm} , зависящих вследствие (2.5) только от α_{\pm} и φ ,

$$x_m^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{I_{\pm}}} \left[\xi_m^{\pm} + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_{\pm}} \sqrt{I_{\pm}} (L_1^{\pm} x_{m-1}^{\pm} + L_2^{\pm} x_{m-2}^{\pm} + L_3^{\pm} x_{m-3}^{\pm}) \right] d\tau, \quad (2.6)$$

$$x_{\pm 1}^{\pm} \equiv x_{\pm 2}^{\pm} \equiv x_{\pm 3}^{\pm} \equiv 0,$$

$$L_1^\pm = i^{-2/3} (\nabla \chi_\pm)^2, \quad L_2^\pm = 2 i^{2/3} (\nabla \chi_\pm, \nabla), \quad L_3^\pm = -\Delta,$$

причем $\xi_m^\pm = \xi_m^\pm(\varphi, \alpha_\pm)$ — произвольные гладкие функции. Наборы функций $\xi_0^\pm, \xi_1^\pm, \dots$ вместе с константами $\mu_\pm(k)$ составляют данные рядов (2.4). Данные со значком «—» мы считаем известными.

Для дальнейших построений этого раздела функция χ_- должна быть не зависящей от φ , а в остальном — произвольной. Если же мы захотим сшить (2.4) с асимптотическим решением вблизи поверхности B , см. разд. 3, то вид χ_- конкретизируется (см. (3.14)). Функции ξ_0^-, ξ_1^-, \dots можно определить по данным решения, описывающего поле вблизи B (см. (3.15)).

Около оси симметрии ряды (2.4) теряют асимптотический характер. Легко проверить, что

$$\tau_\pm = \tau_0(z) \pm \rho \sin \alpha(z) + O(\rho^2), \quad \tau_0(z) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \tau_\pm; \quad (2.7)$$

$$\chi_\pm = \chi_0(z) + O(\rho), \quad \alpha(z) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \alpha_\pm. \quad (2.8)$$

При условии (1.20), (1.21) можно перенести поправочные члены $O(k\rho^2)$ и $O(k^{1/3}\rho)$ из фазы в амплитуду. Сходство асимптотик при $\rho \rightarrow 0$ фазовых функций (2.4) и (1.6) позволяет угадать характерный масштаб фокального погранслоя в рассматриваемой сейчас задаче.

Вблизи оси ищем асимптотическое решение (1) вида

$$u \sim \exp(ik\tau_0 + ik^{1/3}\chi_0(z)) M(k) \sum_{n>0} k^{-n/3} X_n(R, \varphi, z), \quad (2.9)$$

где X_m зависит от k лишь через R . Подстановка (2.9) в уравнение и сравнение коэффициентов дают

$$\hat{l}_0 X_0 = 0, \quad \hat{l}_0 X_j = \sum_{p=0}^{j-1} \hat{l}_{j-p} X_p \quad (j \geq 0),$$

$$\hat{l}_0 = \Delta_\perp + 1 - \tau_0'^2 = \Delta_\perp + \sin^2 \alpha(z), \quad (2.10)$$

$$\hat{l}_1 = 2 i^{4/3} \chi_0' \tau_0', \quad \hat{l}_2 = \tau_0'' + 2 \tau_0' \frac{\partial}{\partial z}, \quad \hat{l}_3 = \chi_0'^2,$$

$$\hat{l}_4 = i^{-1/3} \left(\chi_0'^2 + 2 \chi_0 \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \hat{l}_5 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \hat{l}_6 \equiv \hat{l}_7 \equiv \dots \equiv 0.$$

Штрих обозначает дифференцирование по z . Совпадение операторов \hat{l}_0 и L_0 позволяет воспользоваться результатами разд. 1. Мы получаем, что

$$\chi_+(\alpha) = \chi_-(\alpha), \quad (2.11)$$

$$\xi_0^+(\varphi, \alpha) = e^{-i\pi/2} \xi_0^-(\pi + \varphi, \alpha), \quad \mu_+ = \mu_- = k^{-1/2} M.$$

Аналогично разд. 1 можно разобраться и с высшими приближениями.

При $L \rightarrow 0$, как явствует из (2.6), ряд (2.6) утрачивает асимптотический характер — возникает поверхностный пограничный слой. То же происходит и с фокальным разложением (2.9).

3. ГЛАДКОЕ ВЫПУКЛОЕ ТЕЛО. МАЛЫЕ РАССТОЯНИЯ

Для построения асимптотических решений вблизи поверхности нужно знать граничные условия на ней. Пусть

$$u|_B = 0. \quad (3.1)$$

1. Волны соскальзывания. Нам удобны координаты $(\sigma_{\pm}, n, \varphi)$, где n — длина нормали, опущенной из r на b , σ_{\pm} — длины дуг контура b от основания n до фиксированной плоскости $z = \text{const}$, см. рис. 3. Легко видеть, что

$$\rho = n \sin \beta + \int_0^{\beta} a \cos \beta_1 d\beta_1, \quad z = n \cos \beta - \int_{\beta'}^{\beta} a \sin \beta_1 d\beta_1. \quad (3.2)$$

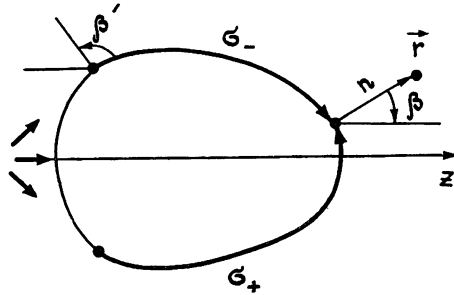


Рис.-3.

Обозначим кривизну контура b через $\kappa(\sigma_{\pm}) = 1/a$. Очевидно, $dr^2 = dn^2 + (1 + n\kappa)^2 d\sigma_{\pm}^2 + \rho^2 d\varphi^2$, откуда

$$\Delta = \frac{1}{j} \left[\frac{\partial}{\partial n} j \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial \sigma_{\pm}} \frac{\rho^2}{j} \frac{\partial}{\partial \sigma_{\pm}} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

где $j = \rho(1 + n\kappa)$ — геометрическое расхождение лучей.

Следуя известной (см., например, [3]) схеме, ищем асимптотическое решение вида

$$u^{\pm} \sim \lambda^{\pm}(k) \exp(ik\sigma_{\pm} + ik^{1/3}\gamma^{\pm}) \sum_{m>0} (ik)^{-m/3} y_m^{\pm}(\sigma_{\pm}, \nu); \quad (3.3)$$

$$y_m^{\pm}|_{\nu=0} = 0, \quad y_m^{\pm} \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty + i0; \quad (3.4)$$

$$\nu = (2k^2\kappa)^{1/3}n, \quad \kappa = \kappa(\sigma_{\pm}), \quad (3.5)$$

$\gamma^{\pm} = \gamma^{\pm}(\sigma_{\pm}, \nu)$ не содержат k ; y_m^{\pm} зависят от k лишь через ν . Требование убывания y_m^{\pm} при $\nu \rightarrow \infty + i0$ играет роль условия излучения.

Из (1) и (3.3) получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \nu - \tilde{\nu}^{\pm} \right) y_0^{\pm} = 0; \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \nu - \tilde{\nu}^{\pm} \right) y_1^{\pm} = -i(2\kappa)^{-2/3} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \sigma_{\pm}} + 2 \frac{\partial}{\partial \sigma_{\pm}} \right) y_0^{\pm}, \quad (3.7)$$

..... ;

$$\tilde{\nu}^{\pm} \equiv 2(2\kappa)^{-2/3} \frac{\partial \gamma^{\pm}}{\partial \sigma_{\pm}}, \quad \rho_0 = \rho(n, \sigma_{\pm})|_{n=0}; \quad (3.8)$$

Собственные числа $\tilde{\nu}_p^{\pm}$ задачи (3.6), (3.4) суть, очевидно, корни ζ_p функции Эйри ω_1 [3]; поэтому из (3.8) следует, что γ^{\pm} может принимать значения

$$\gamma_p^\pm = \frac{\zeta_p}{2^{1/3}} \int_{\sigma'}^{\sigma_\pm} a^{-2/3} d\sigma, \quad (3.9)$$

σ' произвольно. Собственные функции (3.6), (3.4) имеют вид

$$y_{0p}^\pm = A_{0p}^\pm(\sigma_\pm, \varphi) \omega_1(\zeta_p - \nu), \quad (3.10)$$

причем, функции A_{0p}^\pm — произвольные гладкие. Условием разрешимости неоднородной задачи для y_{1p}^\pm (3.7), (3.4) является ортогональность правой части (3.7) к решениям задачи однородной. Отсюда, подобно тому, как это сделано в [3], получаем уравнение для A_{0p}^\pm :

$$\left(2 \frac{\partial}{\partial \sigma_\pm} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \sigma_\pm} - \chi^{2/3} \frac{\partial \chi^{-2/3}}{\partial \sigma_\pm} \right) A_{0p}^\pm = 0. \quad (3.11)$$

Следовательно,

$$A_{0p}^\pm(\sigma_\pm, \varphi) = \rho_0^{-1/2}(\sigma_\pm) \chi^{1/6}(\sigma_\pm) \eta_{0p}^\pm(\varphi), \quad (3.12)$$

где гладкие функции $\eta_{0p}^\pm(\varphi)$ произвольны.

Далее, аналогично [3], выясняется структура высших приближений:

$$y_{mp}^\pm = [\tilde{Q}_{2m, p}^\pm(\sigma_\pm, \nu, \varphi) + A_{mp}^\pm(\sigma_\pm, \varphi)] \times \\ \times \omega_1(\zeta_p - \nu) + \bar{Q}_{2m-2, p}^\pm(\sigma_\pm, \nu, \varphi) \omega_1'(\zeta_p - \nu). \quad (3.13)$$

Здесь $\tilde{Q}_{2m, p}^\pm$ и $\bar{Q}_{2m-2, p}^\pm$ — полиномы степеней $2m$, $2m-2$ по ν с зависящими от σ_\pm, φ коэффициентами; $\tilde{Q}_{2m, p}^\pm(\sigma, 0, \varphi) \equiv 0$, $A_{mp}^\pm = \rho_0^{-1/2} \chi^{1/6} \eta_{mp}^\pm(\varphi)$. Данные η_{mp}^\pm , $m = 0, 1, \dots$ при всяком p вполне определяют ряд вида (3.3) — p -ю волну соскальзывания.

Мы считаем, что p фиксировано и заданы $\lambda_p^-, \eta_{0p}^-, \eta_{1p}^-, \dots$. Функция η_{0p}^- для задачи дифракции на B лучевого поля выписана в Приложении 2.

Ряды (2.4) могут быть сшиты с (3.3) при фиксированном p , если выбрать

$$\chi^\pm = \chi_p^\pm(\sigma_\pm) = 2^{-1/3} \zeta_p \int_{\sigma'}^{\sigma_\pm} a^{1/3}(\alpha) d\alpha; \quad (3.14)$$

$$\xi_0^-(\varphi, \alpha) = \rho^{1/2} (2\chi)^{1/6} e^{i\pi/4} \eta_0^-(\varphi) \Big|_{n=0}, \quad (3.15) \\ \lambda^- = k^{-1/6} \mu_-,$$

см. [3], где обсуждаются и высшие приближения. Область, где (3.3.) — асимптотическое решение (3.1), (1), выглядит относительно переменной n так же, как и в двумерном случае: $n = O(k^{-1/6})$. Появление же дополнительного множителя $\rho_0^{-1/2}$ (3.12) приводит к ограничению (1.20), (1.21).

2. *Фокальное разложение.* Полярные координаты неудобны для построения высших приближений фокального разложения в поверхностном слое из-за сложности записи краевого условия.

Обозначим через $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{2}$ длину дуги от фокальной точки $\rho = 0$ на поверхности B до основания нормали n . Рассмотрим выражение (3.2) в координатах (S, ν, φ) , неодинаково растянутых по σ и n :

$$S = k \tilde{\sigma}, \quad \nu = k^{2/3} (2x)^{1/3} n.$$

Воспользуемся очевидными формулами

$$(1 + nx)^{-1} = 1 - k^{-2/3} \nu x_0 + O(k^{-4/3} \nu^2), \quad x_0 = x \Big|_{\tilde{\sigma}=0},$$

$$\rho(n, \tilde{\sigma}) = \tilde{\sigma} (1 + O(k^{-4/3} \nu S)), \quad (3.16)$$

$$\Delta = k^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial S} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + k^{4/3} \left[\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} - 2\nu x_0 \frac{\partial^2}{\partial S^2} \right] + \dots$$

Члены порядка $O(k)$ и более слабые для экономии места опускаем.

Аналогом фазы $t(z)$ быстро осциллирующего сомножителя (1.13) служит $\sigma_0(z) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma_{\pm}(\rho, z)$;

$$\exp(ik \sigma_0(z)) = \exp(ik \sigma_{00}) (1 + O(k^{-5/6})), \quad \sigma_{00} = \sigma_0 \Big|_{n=0}, \quad (3.17)$$

так что «быстро осциллирующий множитель» слабо зависит от координат. Множитель же $\exp(ik^{1/3} \gamma)$ является в фокальной области медленно меняющимся.

Итак, ищем решение в виде

$$u \sim \Lambda(k) \sum_{m>0} k^{-m/3} Y_m(S, \nu, \varphi), \quad Y_m \Big|_{\nu=0} = 0. \quad (3.18)$$

Отсюда получаются рекуррентные уравнения Y_m , в левой части стоит совпадающий с \hat{l}_0 (2.10) при $\alpha = \pi/2$ оператор:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial S} + 1 \right) Y_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial S} + 1 \right) Y_1 = 0, \dots \quad (3.19)$$

Следовательно,

$$Y_0 = N(\nu) \int_0^{2\pi} H_0(\varphi') \exp[iS \cos(\varphi - \varphi')] d\varphi', \quad (3.20)$$

где H_0 — произвольная обобщенная функция, N — гладкая и удовлетворяет вследствие (3.1) условию $N(0) = 0$.

3. Предположив гладкость H_0 , сошьем асимптотику (3.20) при $S \rightarrow \infty$ со старшим членом бегущей к фокальной оси p -й волны соскальзывания u_p^- . Отсюда

$$\sqrt{2\pi} e^{-i\pi/4} H_0(\varphi) = \xi_{0p}^-(\varphi) = e^{i\pi/2} \xi_{0p}^+(\pi + \varphi); \quad (3.21)$$

$$N(\nu) = w_1(\zeta_p - \nu); \quad (3.22)$$

$$\Lambda(k) = k^{1/2} \lambda_p^- = k^{1/2} \lambda_p^+. \quad (3.23)$$

Построение высших приближений, не представляющее принципиальных трудностей, мы опускаем. Отметим, что трансформации волн соскальзывания при прохождении фокуса не происходит ни в каком приближении.

Случай условия $\partial u / \partial n|_B = 0$ или импедансного рассматривается аналогично. Схема без изменений переносится на задачи о фокусировке волн шепчущей галереи с внутренней стороны поверхности вращения.

Автор признателен В. С. Булдыреву и П. Я. Уфимцеву за интерес к предмету работы, стимулировавший написание статьи, и за конструктивную критику текста рукописи, а В. Н. Красильникову — за интересное обсуждение результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Дифракция на теле с ребром

Покажем, как обобщить построения разд. 1 и как определить функцию ψ_0^- .

1) Пусть поверхность D имеет ребром окружность d радиуса a , причем аксиальной симметрии D не требуется. Введем лучевые координаты п. 1 разд. 1, связанные с ребром d . В точках, из которых видно d , конструкция разд. 1 может быть повторена без изменений.

2) Рассмотрим дифракцию на D лучевого поля, построенного по осесимметрической конгруэнции лучей,

$$u^{\text{inc}} \sim \exp[ik\tau_{\text{inc}}(\mathbf{r})] \left\{ \frac{\psi_0^{\text{inc}}(\varphi)}{\sqrt{I_{\text{inc}}(\mathbf{r})}} + O(1/k) \right\}, \quad (\text{П.1})$$

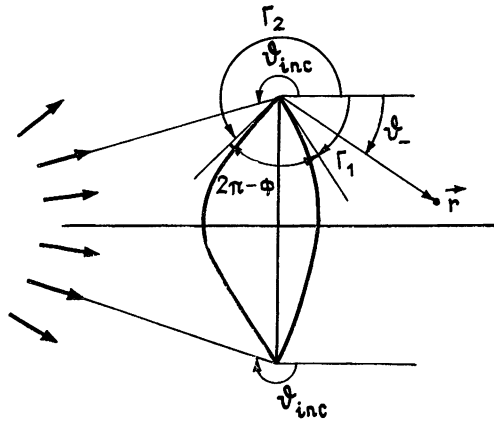


Рис. 4.

с зависящими, возможно, от φ данными. Пусть на D выполняется условие Дирихле $u - u^{\text{inc}} = 0$, а на d — условие Мейкснера. Допустим, что лучи падающей волны приходят на ребро под углом $\theta_- = \theta_{\text{inc}} \max \Gamma_2(\varphi) < \theta_{\text{inc}} < \min \Gamma_1(\varphi)$, где Γ_1, Γ_2 — углы наклона пересекающих ось касательных к D в d , см. рис. 4, и что возникает зона геометрической тени. Рассмотрим ту часть тени, где регулярны координаты (t_-, θ_-, φ) . Элементарные соображения локальности, состоящие в замене D в каждой точке d на касательный клин (см. [5, 11]), дают

$$\exp(ik\tau_{\text{inc}}(d)) \frac{\psi_0^{\text{inc}}(\varphi)}{\sqrt{I_{\text{inc}}(d)}} \frac{H(\theta', \theta'', \Phi)}{\sqrt{kt_-}} \sim \frac{a}{\sqrt{J_-}} c_-(ka) \psi_0^-(\theta_-, \varphi) (t_- \rightarrow 0),$$

где $\Phi = \Phi(\varphi) = \Gamma_2(\varphi) - \Gamma_1(\varphi)$ — раствор клина, $\theta' = \theta_- - \Gamma_2$, $\theta'' = \theta_{\text{inc}} - \Gamma_1$ — углы между лучами и его гранью,

$$H(\theta', \theta'', \Phi) = (2\pi)^{-1/2} \frac{\pi}{\Phi} \cos \frac{\pi^2}{\Phi} \left\{ \left[\cos \Phi - \cos \frac{\pi}{\Phi} (\theta' - \theta'') \right] - \left[\cos \Phi - \cos \frac{\pi}{\Phi} (\theta' + \theta'') \right] \right\}.$$

Отсюда

$$c_-(ka) = (ka)^{-1/2} \exp(ik\tau_{\text{inc}}(d)),$$

$$\psi_0^-(\theta_-, \varphi) = \frac{a \psi_0^{\text{inc}}(\varphi)}{\sqrt{I_{\text{inc}}(d)}} H(\theta'(\varphi), \theta''(\varphi), \Phi(\varphi)).$$

Нулевое приближение для дифрагированного поля u_{1d} определяется по ψ_0^- с помощью формул (1.5)–(1.7), (1.23), (1.24), (1.6), (1.13), (1.14), (1.16).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Дифракция на гладком теле

Выпишем функции η_{0p}^- (разд. 3), возникающие в задаче дифракции на гладком теле B лучевого поля (П. 1). Предположим, что лучи падающей волны, касающиеся B , составляют угол α' с осью z (рис. 3) и не освещают точку наблюдения r . Тогда дифрагированное поле u^- в r , идущее к фокальной линии, есть сумма волн соскальзывания

$$u^- \sim \sum_{p=0} u^{p-},$$

где u^{p-} имеют вид (3.3)–(3.10)–(3.12) с

$$\eta_{0p}^-(\varphi) = \frac{e^{i\pi/12} \psi_0^{\text{inc}}(\varphi)}{2^{13/6} (\omega_1'(\zeta_p))^2 a^{1/6} \sqrt{I_{\text{inc}}}} \Big|_{\substack{r \in B \\ \alpha = \alpha'}},$$

$$\mu_-(k) = k^{-1/2} e^{ik\tau_{\text{inc}}} \Big|_{\substack{r \in B \\ \alpha = \alpha'}}.$$

Эти формулы легко получаются, например, из [3].

Для определения нулевого приближения дифрагированного поля вблизи поверхности следует воспользоваться (3.18), (3.20)–(3.23), (3.15), (3.14); на умеренных расстояниях — (3.9)–(3.12), (2.4), (2.6), (2.9), (2.11).

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Фридрихс, Сб. переводов «Математика», 1, № 2, 79 (1957).
2. J. V. Keller, R. N. Bichal, Comm. Pure Appl. Math, 13, № 1, 85 (1960)
3. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, Метод пограничного слоя в задачах дифракции, изд. ЛГУ, Л., 1974.
4. А. Зоммерфельд, Оптика, ИЛ, М., 1953.
5. П. Я. Уфимцев, Метод краевых волн в физической теории дифракции, изд. Сов. радио, М., 1958
6. A. V. Chinnaswamy, R. P. Kanwal, SIAM J Appl Math., 23, № 3, 355 (1972).
7. В. И. Токачлы, Б. Е. Кинбер, Изв. вузов — Радиофизика, 14, № 5, 761 (1971).
8. Э. Д. Газазян, М. И. Иванян, Б. Е. Кинбер, Тр. XI Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, т. 3, изд. Казанского ун-та, Казань, 1975.
9. В. Г. Сологуб, ЖВММФ, 12, № 2, 388 (1970).
10. E. V. Hansen, Acta Polytechnica Scandinavica, Ser Phys, 33, 1 (1964).
11. В. А. Боровиков, Б. Е. Кинбер, Четыре лекции по геометрической теории дифракции, изд. ЛГУ, Л., 1972.
12. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, изд. Наука, М., 1976
13. В. Б. Филиппов, Записки научных семинаров Лен. отделения Матем. института им. В. А. Стеклова АН СССР, 51, 172 (1975).

14. А. П. Киселев, Записки научных семинаров Лен. отделения Матем. института им. В. А. Стеклова АН СССР, **62**, 126 (1976).
15. В. А. Боровиков, Препринт Института прикладной математики АН СССР № 63, М., 1973.

Научно-производственное
объединение «Геофизика»

Поступила в редакцию
2 апреля 1979 г.

FOCAL BOUNDARY LAYER IN AXIALLY-SYMMETRIC DIFFRACTION

A. P. Kiselev

A focusing of high-frequency waves diffracted by a convex (smooth or having an edge) body of revolution is investigated. Simple equations are derived for the field in the vicinity of the symmetry axis. Solutions of those equations are matched with incoming and outgoing waves.
