ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 3 *РАДИОФИЗИКА* *1980*

УДК 538.576

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ ПОЛЯ ВОЛНОВОГО ПУЧКА

Л. С. Долин

Получено уравнение для плотности энергии поля волнового пучка, распространяющегося в свободном пространстве или случайно-неоднородной среде с остронаправленной индикатрисой рассеяния

Изменение распределения плотности энергии поля в поперечном сечении волнового пучка вследствие его дифракционного расплывания или рассеяния на неоднородностях показателя преломления среды тесно связано с деформацией фазового фронта пучка. Тем не менее, оказывается, что исследование его энергетической структуры при определенных допущениях можно свести к решению краевой задачи для линейного уравнения, в котором единственной неизвестной функцией является искомое распределение плотности энергии волнового поля.

Продемонстрируем это на примере волнового пучка, распространяющегося в свободном пространстве или случайно-неоднородной среде с остронаправленной индикатрисой рассеяния $x(\gamma)$:

$$x(\gamma) \ll x(0) \qquad \text{при} \qquad \gamma > \gamma_0 \ll \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

(γ — угол рассеяния). Чтобы получить интересующее нас уравнение, обратимся к лучевому методу описания случайных волновых полей [1—4].

Обозначим через Γ пространственную корреляционную функцию комплексной амплитуды скалярного волнового поля $\operatorname{Re} U(\boldsymbol{r})\, e^{i\omega t}$, которое создается произвольными источниками в свободном пространстве или рассеивающей среде с индикатрисой вида (1)

$$\Gamma(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\rho}) = \overline{U\left(\boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) U^*\left(\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right)}. \tag{2}$$

Усреднение в (2) производится по ансамблю реализаций рассеивателей и ансамблю реализаций источников поля U (если они случайны)*. Предположим, что масштаб неоднородности Γ по переменной $\boldsymbol{r}$ велик по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi c/\omega\bar{n}$ ($\bar{n}$ — среднее значение показателя преломления среды). Тогда в области вне источников справедливо представление

$$\Gamma(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\rho}) = \int\limits_{4\pi} I(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) \exp\left(-i\,\frac{2\pi}{\lambda}\,\boldsymbol{n}\boldsymbol{\rho}\right) d^2\boldsymbol{n} \tag{3}$$

* Под Γ можно подразумевать фурье-трансформанту (по переменной τ) функции взаимной когерентности Вольфа [5], усредненной по ансамблю реализаций рассеивателей.

($|n| = 1$, интегрирование ведется по направлениям n в пределах телесного угла 4π), где функция $I(r, n)$ удовлетворяет уравнению переноса лучистой энергии [6–8] (впервые это было показано автором [1] на примере волнового поля в свободном пространстве и в среде со слабыми крупномасштабными флуктуациями показателя преломления, современное состояние проблемы волнового обоснования уравнения переноса освещено в обзорах [2–4]).

В случае, когда поле U имеет вид волнового пучка, распространяющегося в z_0-направлении, функция I удовлетворяет условию

$$I(r, n) \ll I(r, z_0) \quad \text{при} \quad (\widehat{n, z_0}) > \theta_0 \ll 1, \tag{4}$$

благодаря чему ее можно выразить через значения Γ в плоскости $z = \text{const}$ [1, 9]:

$$I(r_\perp, z, n_\perp) = \frac{1}{\lambda^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(r_\perp, z, \rho_\perp) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} n_\perp \rho_\perp\right) d^2 \rho_\perp,$$
$$|z_0| = 1, \quad r_\perp = r - z z_0, \quad z = r z_0, \quad n_\perp = n - (n z_0) z_0, \tag{5}$$

$\rho_\perp$ — вектор, лежащий в плоскости $z = \text{const}$, $2\theta_0$ — характерный угол расходимости пучка. Поэтому плотность энергии поля пучка (w) при $z > 0$ представляется в форме

$$w(r_\perp, z) = \Gamma(r_\perp, z, 0) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} I(r_\perp, z, n_\perp)\, d^2 n_\perp \tag{6}$$

через решение уравнения переноса для функции I при граничном условии

$$I(r_\perp, 0, n_\perp) = \frac{1}{\lambda^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma(r_\perp, 0, \rho_\perp) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} n_\perp \rho_\perp\right) d^2 \rho_\perp. \tag{7}$$

Обозначим через $w^0(r_\perp, z)$ распределение w, которое соответствует решению уравнения переноса с граничным условием

$$I(r_\perp, 0, n_\perp) = \delta(r_\perp)\, \delta(n_\perp). \tag{8}$$

Рассмотрим также вспомогательное поле $\tilde{I}$, удовлетворяющее уравнению переноса с точечным изотропным источником [10, 11] (для дальнейшего несущественно, что поля $\tilde{I}$ и w^0 физически не реализуемы):

$$\left(\cos\psi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\psi}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} + \varepsilon\right) \tilde{I}(r, \psi) =$$
$$= \frac{\sigma}{4\pi} \int\limits_{4\pi} \tilde{I}(r, \psi')\, x(\widehat{n, n'})\, d^2 n' + \frac{1}{4\pi} \delta(r). \tag{9}$$

Здесь $r = |r|$ — расстояние от источника до точки наблюдения, $\psi = (\widehat{r, n})$, $\psi' = (\widehat{r, n'})$, $\varepsilon = \sigma + \varkappa$, σ и $\varkappa$ — показатели рассеяния и поглощения среды, интегрирование ведется по направлениям единичного вектора n' в пределах полного телесного угла. В соответствии с оптическим принципом взаимности имеем [12]

$$w^0(r_\perp = r\sin\psi,\ z = r\cos\psi) = 4\pi \tilde{I}(r, \psi). \tag{10}$$

Последнее соотношение выражает тот известный факт, что распределение пространственной облученности (плотности энергии поля) w^0, которое создается на сфере $r = \text{const}$ точечным мононаправленным источником (расположенным в точке $\boldsymbol{r} = 0$ и действующим в направлении $\boldsymbol{z}_0$), как функция полярного угла точки наблюдения $\psi = (\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{z}_0})$ совпадает с угловым распределением яркости $\tilde{I}(r, \psi)$ на расстоянии r от точечного изотропного источника (как функцией угла ψ между направлением визирования $(-\boldsymbol{n})$ и направлением на источник $(-\boldsymbol{r}/r)$). Из (9) и (10) следует, что w^0 удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon\right) w^0(\boldsymbol{r}_\perp, z) - \frac{\sigma}{4\pi} \int\limits_{|\boldsymbol{r}'| = r} w^0(\boldsymbol{r}'_\perp, z')\, x(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'}) \frac{d^2\boldsymbol{r}'}{r^2} = \delta(\boldsymbol{r}), \tag{11}$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_\perp + z\boldsymbol{z}_0$, $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'_\perp + z'\boldsymbol{z}_0$, интегрирование ведется по сфере $(r'_\perp)^2 + (z')^2 = r^2$.

Учитывая (1), (4), перейдем в (11) к интегрированию по плоскости $z' = z$ и положим $w^0(\boldsymbol{r}'_\perp, z') \approx w^0(\boldsymbol{r}'_\perp, z)$, $x(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'}) \approx x\left(\frac{|\boldsymbol{r}_\perp - \boldsymbol{r}'_\perp|}{z}\right)$, $r \approx z$, $d^2\boldsymbol{r}' \approx d^2\boldsymbol{r}'_\perp$. В результате для w^0 получим более простое уравнение

$$\begin{gathered} Lw^0 = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon\right) w^0(\boldsymbol{r}_\perp, z) - \frac{\sigma}{4\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} w^0(\boldsymbol{r}'_\perp, z) \times \\ \times x\left(\frac{|\boldsymbol{r}_\perp - \boldsymbol{r}'_\perp|}{z}\right) \frac{d^2\boldsymbol{r}'_\perp}{z^2} = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

которое должно решаться при граничном условии $w^0(\boldsymbol{r}_\perp, 0) = \delta(\boldsymbol{r}_\perp)$.

Благодаря линейности уравнения переноса w легко выражается через w^0 и значения I при $z = 0$:

$$w(\boldsymbol{r}_\perp, z) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\boldsymbol{n}'_\perp \iint\limits_{-\infty}^{\infty} I(\boldsymbol{r}'_\perp - \boldsymbol{n}'_\perp z, 0, \boldsymbol{n}'_\perp)\, w^0(|\boldsymbol{r}_\perp - \boldsymbol{r}'_\perp|, z)\, d^2\boldsymbol{r}'_\perp. \tag{13}$$

Представим функции w, w^0, I в виде

$$\left\{ \begin{matrix} w(\boldsymbol{r}_\perp, z) \\ w^0(\boldsymbol{r}_\perp, z) \end{matrix} \right\} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} w_s(\boldsymbol{h}, z) \\ w_s^0(\boldsymbol{h}, z) \end{matrix} \right\} e^{i\boldsymbol{h}\boldsymbol{r}_\perp}\, d^2\boldsymbol{h}; \tag{14}$$

$$I(\boldsymbol{r}_\perp, 0, \boldsymbol{n}_\perp) = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} I_s(\boldsymbol{h}, 0, \boldsymbol{p})\, e^{i(\boldsymbol{h}\boldsymbol{r}_\perp + \boldsymbol{p}\boldsymbol{n}_\perp)}\, d^2\boldsymbol{h}\, d^2\boldsymbol{p}. \tag{15}$$

Тогда вместо (12), (13) будем иметь

$$L_s w_s^0 = \left[\frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon_1(z)\right] w_s^0(h, z) = 0; \tag{16}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 = \varepsilon - \sigma \frac{x_s(hz)}{x_s(0)}, \\ x_s(p) = \int\limits_0^{\infty} x(\gamma)\, J_0(p\gamma)\, \gamma\, d\gamma; \end{gathered} \tag{17}$$

$$w_s(\boldsymbol{h}, z) = (2\pi)^4 I_s(\boldsymbol{h}, 0, \boldsymbol{h}z)\, w_s^0(\boldsymbol{h}, z) \tag{18}$$

(J_0 — функция Бесселя с нулевым индексом).

Действуя оператором L_s на левую и правую части (18) и учитывая (16), получим

$$L_s w_s = \varepsilon_1 w_s + (2\pi)^4 \left[\frac{\partial I_s}{\partial z} w_s^0 + I_s \frac{\partial w_s^0}{\partial z} \right] =$$

$$= \varepsilon_1 w_s + (2\pi)^4 I_s w_s^0 \left[\frac{1}{I_s} \frac{\partial I_s}{\partial z} - \varepsilon_1 \right] = \frac{1}{I_s} \frac{\partial I_s}{\partial z} w_s.$$

Таким образом, w_s удовлетворяет уравнению

$$\left[L_s - \frac{\partial}{\partial z} \ln I_s(\boldsymbol{h}, 0, \boldsymbol{h}z) \right] w_s(\boldsymbol{h}, z) = 0. \tag{19}$$

Искомое уравнение для w находится путем фурье-преобразования (19) и записывается следующим образом:

$$Lw(\boldsymbol{r}_\perp, z) - \iint\limits_{-\infty}^{\infty} w(\boldsymbol{r}'_\perp, z)\, K(\boldsymbol{r}_\perp - \boldsymbol{r}'_\perp, z)\, d^2\boldsymbol{r}'_\perp = 0; \tag{20}$$

$$K(\boldsymbol{r}_\perp, z) = (2\pi)^{-2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\boldsymbol{h}\boldsymbol{r}_\perp} \frac{\partial}{\partial s} \ln \left[\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma\left(\boldsymbol{r}''_\perp, 0, \frac{\boldsymbol{h}z}{k}\right) e^{-i\boldsymbol{h}\boldsymbol{r}''_\perp} d^2\boldsymbol{r}''_\perp \right] d^2\boldsymbol{h}, \tag{21}$$

$k = 2\pi/\lambda$, оператор L определяется выражением (12).

Таким образом, задача исследования энергетической структуры волнового пучка с учетом эффектов дифракции и многократного рассеяния на неоднородностях среды свелась к решению уравнения для плотности энергии поля w при граничном условии $w(\boldsymbol{r}_\perp, 0) = w_0(\boldsymbol{r}_\perp)$. Разумеется, это не означает, что w однозначно выражается через w_0, поскольку вид функции K зависит от фазовой структуры поля в плоскости $z = 0$.

Рассмотрим несколько конкретных примеров с тем, чтобы показать, как видоизменяется уравнение (20) в зависимости от начальной структуры пучка.

Пусть

$$\Gamma(\boldsymbol{r}_\perp, 0, \boldsymbol{\rho}_\perp) = w_0(\boldsymbol{r}_\perp)\, \gamma(\boldsymbol{\rho}_\perp), \tag{22}$$

где γ — коэффициент пространственной корреляции поля, удовлетворяющий условию нормировки $\gamma(0) = 1$. Тогда

$$K(\boldsymbol{r}_\perp, z) = (2\pi)^{-2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\boldsymbol{h} \nabla \gamma(\boldsymbol{\rho}_\perp)}{k\gamma(\boldsymbol{\rho}_\perp)} \right]_{\boldsymbol{\rho}_\perp = \frac{\boldsymbol{h}z}{k}} \exp(i\boldsymbol{h}\boldsymbol{r}_\perp)\, d^2\boldsymbol{h}. \tag{23}$$

В частности, при

$$\gamma = \exp\left(-\frac{\rho_\perp^2}{\rho_0^2} \right) \tag{24}$$

имеем $K \sim \Delta_\perp \delta(\boldsymbol{r}_\perp)$, и уравнение (20) принимает вид

$$(L - D\Delta_\perp)\, w(\boldsymbol{r}_\perp, z) = 0, \tag{25}$$

где $D = 2z/(k\rho_0)^2$, $\Delta_\perp$ — оператор Лапласа, действующий по переменной $r_\perp$. В отсутствие рассеивающей среды ($L = \partial/\partial z$) оно превращается в диффузионное уравнение.

Если поле пучка в плоскости $z = 0$ описывается выражением

$$U = A_0 \exp\left(-\frac{r_\perp^2}{r_0^2} + \frac{ikr_\perp^2}{2f} \right), \tag{26}$$

так что

$$\begin{aligned} \Gamma(r_\perp, 0, \rho_\perp) &= U\left(r_\perp + \frac{\rho_\perp}{2}\right) U^*\left(r_\perp - \frac{\rho_\perp}{2}\right) = \\ &= |A_0|^2 \exp\left(-\frac{2r_\perp^2}{r_0^2} - \frac{\rho_\perp^2}{2r_0^2} + \frac{ik\, r_\perp \rho_\perp}{f} \right) \end{aligned} \tag{27}$$

(сфокусированный ($f > 0$) или расфокусированный ($f < 0$) когерентный гауссов пучок), то w удовлетворяет уравнению (25), в котором следует положить

$$D = \frac{z}{(kr_0)^2} - \frac{r_0^2}{4f}\left(1 - \frac{z}{f}\right). \tag{28}$$

Задавая поле на плоскости $z = 0$ в виде

$$U = A_0 \left[\exp(-ik_\perp r_\perp) + \exp(ik_\perp r_\perp)\right] \tag{29}$$

($k_\perp \ll k$), получим $K(r_\perp, z) \equiv 0$ и в результате для w будем иметь $Lw(r_\perp, z) = 0$. Решение этого уравнения при граничном условии $w(r_\perp, 0) = 4\,|A_0|^2 \cos^2 k_\perp r_\perp$ описывает картину интерференции двух плоских волн, прошедших через рассеивающий слой.

Для волнового пучка с достаточно плавным распределением плотности энергии поля в плоскости $z = 0$ и коэффициентом корреляции γ, имеющим вид (24), интегродифференциальное уравнение (20) приближенно сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\varkappa w + \left[\frac{2z}{(k\rho_0)^2} + \frac{1}{4}\sigma\gamma_0^2 z^2\right]\Delta_\perp w, \tag{30}$$

где

$$\gamma_0^2 = \int\limits_0^\infty x(\gamma)\gamma^3 d\gamma \left[\int\limits_0^\infty x(\gamma)\gamma\, d\gamma\right]^{-1}. \tag{31}$$

Переход от (20) к (30) возможен при условии $a \gtrsim \gamma_0/\sigma$, где a — характерный масштаб неоднородности $w(r_\perp, 0)$.

В заключение сделаем некоторые замечания относительно процедуры вывода уравнения (20) и результатов, которые из него следуют.

Как было показано в [9, 13, 14], уравнение переноса описывает дифракционное расплывание волнового пучка благодаря заданию граничного условия для I в форме (7). Это означает, что в рамках лучевого описания, основанного на уравнении переноса, явление дифракции эквивалентно изменению поперечного распределения яркости в пучке (с ростом z) из-за конечной ширины угловой диаграммы яркости в плоскости $z = 0$* (с той оговоркой, что величина I, определенная соотношением (5), не вполне эквивалентна яркости в фотометрическом смысле: это видно хотя бы из того, что она может принимать отрицательные значения). Последнее обстоятельство было в существенной степени ис-

* В [1] это было продемонстрировано на примере гауссова пучка, распространяющегося в свободном пространстве.

пользовано при выводе уравнения (20): эффект дифракции мы учли за счет того, что задали $I(\boldsymbol{r}_\perp, 0, \boldsymbol{n}_\perp)$ в форме (7) и представили w в виде суммы плотностей энергии (w_0) элементарных (первоначально бесконечно узких) пучков, исходящих из различных точек плоскости $z=0$ по различным направлениям (формула (13)). После этого задача свелась к отысканию уравнения, решением которого является функция (13).

Рассмотренная методика расчета w приводит к тем же результатам, что и уравнение для функции когерентности поля волнового пучка $\Gamma(\boldsymbol{r}_\perp, z, \boldsymbol{\rho}_\perp)$, которое было получено и в общем виде решено в [9]* (его вывод при менее жестких ограничениях на параметры среды дан в работе Татарского [15], частная форма этого уравнения для случая бесконечно широкого пучка ($\nabla_{r_\perp}\Gamma \equiv 0$) получена Черновым в [16, 17]). Действительно, решение уравнения (20) легко представляется через интегралы Фурье в виде

$$w(\boldsymbol{r}_\perp, z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} d^2\boldsymbol{r}'_\perp \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma\left(\boldsymbol{r}'_\perp, 0, \frac{\boldsymbol{h}z}{k}\right)\exp\left\{i\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}_\perp - \boldsymbol{r}'_\perp) - \int\limits_0^z\left[\varepsilon - \sigma\frac{x_s(h\xi)}{x_s(0)}\right]d\xi\right\}d^2\boldsymbol{h}. \tag{32}$$

Такое же выражение для w (при $\varkappa=0$) следует из формул работы [9]. Несмотря на это, уравнение (20) может оказаться весьма полезным благодаря тому, что его непосредственное решение на ЭВМ при определенных условиях будет менее трудоемким по сравнению с аналогичными расчетами по формуле (32) (указанная ситуация имеет место, например, в случае, когда интегрирование по формуле (32) требует выполнения преобразований Фурье численным методом).

Заметим, что к уравнению (20) можно прийти более коротким путем, основываясь на выражении для $w=\Gamma(\boldsymbol{r}_\perp, z, 0)$ из работы [9]. При этом вся процедура вывода сводится к получению уравнения (20) из соотношений, эквивалентных (16)—(18). Тем не менее мы отдали предпочтение изложенному выше способу, поскольку он представляется более физичным и вместе с тем открывает возможности уточнения уравнения (20) за счет лучшей аппроксимации интегрального члена уравнения (11) при переходе к (12) (что эквивалентно выходу за рамки малоуглового приближения уравнения переноса).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Долин, Изв вузов — Радиофизика, **7**, № 3, 559 (1964).
3. Ю. Н Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, **102**, 3 (1970)
3. Ю. Н Барабаненков, УФН, **117**, вып. 1, 49 (1975)
4. Г. В. Розенберг, УФН, **121**, вып. 1, 97 (1977).
5. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1970.
6. Г. В. Розенберг, УФН, **69**, 57 (1959).
7. С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М, 1953.
8. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
9. Л. С. Долин, Изв. вузов — Радиофизика, **11**, № 6, 840 (1968).
10 Б. Дэвисон, Теория переноса нейтронов, Атомиздат, М, 1960.
11. Г. И. Марчук, Методы расчета ядерных реакторов, Госатомиздат, М, 1961.

* Ранее вывод этого уравнения излагался в докладе автора на семинаре С М. Рытова по статистической радиофизике в 1966 г Его решение, приведенное в [9], связано соотношением (5) с решением уравнения переноса излучения в малоугловом приближении [18, 19].

12. Е Б Брешенкова, В В. Орлов, Атомная энергия, **10**, № 2, 175 (1961).
13 Л. С. Долин, III Всесоюзный симпозиум по дифракции волн, Рефераты докладов, изд. Наука, М., 1964.
14. Г. И Овчинников, В. И. Татарский, Изв. вузов — Радиофизика, **15**, № 9, 1419 (1972)
15. В. И. Татарский, ЖЭТФ, **56**, 2106 (1969).
16 Л А. Чернов, VI Всесоюзная акустическая конференция, Рефераты докладов, М, 1968
17. Л. А Чернов, Акуст. журн., **15**, вып. 4, 594 (1969).
18. H. Bremmer, Radio Sci., **68D**, № 9, 967 (1964)
19. Л. С. Долин, Изв. вузов — Радиофизика, **7**, № 2, 380 (1964).

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
12 марта 1979 г.

EQUATION FOR THE ENERGY DENSITY OF THE WAVE BEAM FIELD

L S. Dolin

An equation has been derived for the energy density of the field of a wave beam propagating in a free space or randomly-inhomogeneous medium with high-directional scattering indicatrix.