

УДК 530.145

**К ВОПРОСУ ОБ ИССЛЕДОВАНИИ КОГЕРЕНТНОСТИ ПОЛЯ
В РЕГУЛЯРНОМ МНОГОМОДОВОМ СТЕКЛОВОЛОКНЕ**

Е. Л. Ефремов

Исследуется математическая модель, возникающая при обработке результатов измерений степени взаимной когерентности поля газового лазера и поля на выходе протяженного стекловолокна. Результаты позволяют заранее оценивать ожидаемую степень взаимной когерентности этих полей по распределению показателя преломления в сечении волокна.

Исследуется математическая модель, возникающая при обработке результатов измерений [8] степени взаимной когерентности поля $U_0(P, t)$ He-Ne лазера и поля $U_1(z, P, t)$ на выходе протяженного стекловолокна. Коэффициентом когерентности мы называем [1] величину

$$\gamma = \gamma(z, P_0, P) = \frac{\left| \int_0^T U_1(z, P, t) U_0^*(P_0, t) dt \right|}{\left[\int_0^T |U_0(P_0, t)|^2 dt \int_0^T |U_1(z, P, t)|^2 dt \right]^{1/2}}. \quad (1)$$

Здесь z — длина волокна, P_0, P — поперечные координаты в соответствующих сечениях, T — время измерения. Предполагаем, что

$$U_0(P_0, t) = U_0(P_0)A(t)e^{i\omega_0 t}; \quad (2)$$

$$A(t) = \sum_{m=-M}^M f_m e^{im\Delta\omega t}, \quad (3)$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda}$ (c — скорость света в пустоте, λ — длина волны), $\Delta\omega = \frac{\pi c}{L_{\text{окт}}}$ ($L_{\text{окт}}$ — длина резонатора лазера), f_m — комплексные коэффициенты.

В настоящее время имеются работы [4, 5], посвященные исследованию когерентности оптических полей в волокне. В этих работах используется геометрикооптический подход, и рассматриваются волокна с постоянным по сечению показателем преломления (двухслойное волокно). В данной работе рассматривается волокно с произвольным показателем преломления по сечению и используется модовый подход к описанию поля по волокну. Представляя $U_0(P_0)$ в виде линейной комбинации собственных мод стекловолокна,

$$U_0(P_0) = \sum_{j=1}^N \alpha_j U_j(P_0), \quad (4)$$

находим поле в сечении z :

$$U_1(z, P, t) = e^{i\omega_0 t} \sum_{m=-M}^M f_m \sum_{j=1}^N \alpha_j U_j(P) \exp[-ih_j z - im\Delta\omega\tau_j(z)], \quad (5)$$

где N — число мод в данном волокне, h_j — фазовая постоянная j -й моды, $\tau_j(z) = z/V_j$, V_j — групповая скорость j -й моды. Теперь нетрудно получить для $T \gg 2\pi/\Delta\omega$

$$\dot{\gamma} = \frac{\left| \sum_{m=-M}^M g_m \sum_{j=1}^N \alpha_j U_j(P) \exp[-ih_j z - im \Delta\omega \tau_j(z)] \right|}{\sqrt{\sum_{m=-M}^M g_m \sum_{m=-M}^M g_m \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j U_j(P) \exp[-ih_j z - im \Delta\omega \tau_j(z)] \right|^2}}, \quad (6)$$

где

$$g_m = |f_m|^2. \quad (7)$$

Для численного анализа $\dot{\gamma}$ необходимо получить сведения о следующих величинах: N , $\{h_j\}_1^N$, $\{\tau_j(z)\}_1^N$, g_m . Для N имеется формула [2]

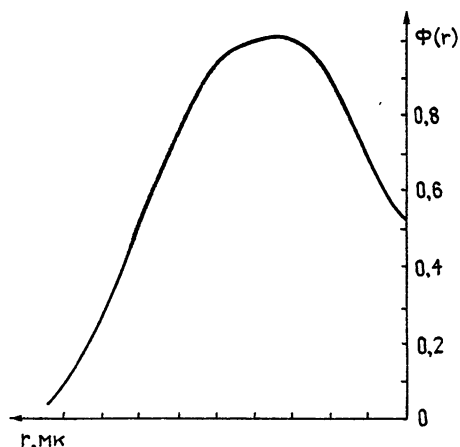
$$N = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \int_0^a [n^2(r) - n^2(a)] r dr, \quad (8)$$

где $n(r)$ — распределение показателя преломления по сечению, $2a$ — диаметр световедущей жилы волокна. Что касается h_j и $\tau_j(z)$, то для многомодовых волокон реальным является лишь нахождение плотностей распределения количества мод по фазовым постоянным и по временам запаздывания:

$$P(h) = \frac{dN}{dh} \quad \text{и} \quad q(\tau) = \frac{dN}{d\tau}, \quad (9)$$

где $P(h)dh$ — число мод, имеющих фазовые постоянные в диапазоне $(h, h + dh)$, $q(\tau)d\tau$ — число мод, имеющих времена задержки в диапазоне $(\tau, \tau + d\tau)$, $q(\tau)$ с точностью до нормировки есть импульсный отклик волокна на δ -импульс, $q(\tau)$ очевидным образом зависит от длины z^* , $P(h)$ от z не зависит. О нахождении g_m мы скажем ниже.

Рис. 1. Распределение освещенности $\Phi(r)$ на выходе стекловолокна. Одно деление по оси абсцисс соответствует 3 мк.



Расчеты проводились нами при следующих входных данных: $a = 30$ мк, $n^2(r) - n^2(a) = \tilde{p}^2 \Phi(r)$, где \tilde{p} — апертурный угол, который мы примем равным 0,14, $\Phi(r)$ — распределение освещенности на выходе волокна при возбуждении его ламбертовым источником. В статье мы используем один из типичных [6, 7] профилей показателя преломле-

* Для краткости мы в дальнейшем не указываем явно, что $q(\tau)$ есть импульсный отклик волокна длины z .

ния (рис. 1). Для расчета $q(\tau)$ используем программу, составленную Мальцевым [3], $P(h)$ рассчитаем по известной формуле [2]. Результаты приведены на рис. 2 и 3 соответственно. Число распространяющихся мод N , рассчитанное по формуле [2] с учетом данных рис. 1, оказалось равным 400. Отсюда, в частности, следует, что разность $h_{j+1} - h_j$ имеет порядок $\frac{h_N - h_1}{N} \approx \frac{6 \cdot 10^{-2}}{400} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ мк}^{-1}$. Таким образом, уже при z порядка 10 см ($(h_{j+1} - h_j)z \gg 1$). Поэтому в формуле (6) можно считать, что $\cos h_j z$ и $\sin h_j z$ являются реализациями независимых (при разных j) одинаково распределенных случайных величин.

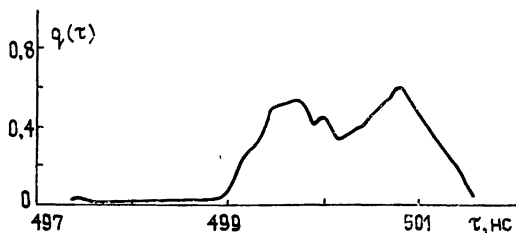


Рис. 2. Импульсный отклик $q(\tau)$ на выходе волокна ($z=100$ м).

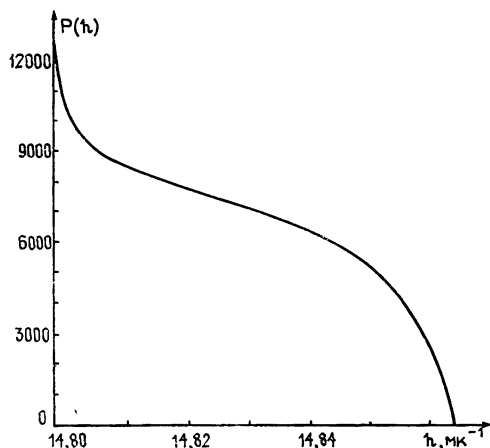


Рис. 3. Плотность $P(h) = \frac{dN}{dh}$.

Поведение γ существенно зависит от величин $\Delta\omega\tau_j(z)$. Действительно, если для всех m $m\Delta\omega\tau_j(z) \approx m\Delta\omega\tau_0(z)$, где $\tau_0(z)$ — некоторое среднее время задержки*, то, как легко следует из (6),

$$\gamma = \frac{\left| \sum_{m=-M}^M g_m \exp[-im\Delta\omega\tau_0(z)] \right|}{\sum_{m=-M}^M g_m} \quad (10)$$

Напротив, если $\Delta\omega |\tau_{j+1}(z) - \tau_j(z)| \gg 1$, то

* О разумном выборе $\tau_0(z)$ см. дальше.

$$\gamma = \frac{\left| \sum_{m=-M}^M g_m \theta_m \right|}{\left(\sum_{m=-M}^M g_m \sum_{m=-M}^M g_m |\theta_m|^2 \right)^{1/2}}, \quad (11)$$

где

$$\theta_m = \sum_{j=1}^N \alpha_j U_j(P) \exp[-ih_j z - im\Delta\omega\tau_j(z)] \quad (12)$$

— реализации независимых (для разных m) случайных величин (с комплексными значениями).

Мы для численного анализа рассмотрим промежуточный случай, когда можно воспользоваться разложением

$$\exp[-im\Delta\omega\tau_{j_0}(z)] = 1 - im\Delta\omega\tau_{j_0}(z) - \frac{m^2 [\Delta\omega\tau_{j_0}(z)]^2}{2}, \quad (13)$$

где $\tau_{j_0} = \tau_j - \tau_0$ и вообще $\tau_{j_1, j_2} = \tau_{j_1} - \tau_{j_2}$. При этом будем считать, что $\Delta\omega\tau_0(z)$ кратно 2π . Обозначим $\alpha_j U_j(x) = \rho_j e^{i\psi_j(x)}$, $\xi_j = \rho_j \cos[\psi_j(x) - h_j z]$, $\eta_j = \rho_j \sin[\psi_j(x) - h_j z]^*$. Имеем из (6) с учетом (13)

$$\gamma^2 \approx 1 - \frac{\sum_{m=-M}^M m^2 g_m \left(\sum_{j=1}^N \xi_j \tau_{j_0} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N \eta_j \tau_{j_0} \right)^2}{\sum_{m=-M}^M g_m \left(\sum_{j=1}^N \xi_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N \eta_j \right)^2} (\Delta\omega)^2. \quad (14)$$

Считаем, в соответствии с проведенной выше оценкой, что ξ_j и η_j являются реализациями случайных одинаково распределенных величин с нулевым средним и единичными дисперсиями. Суммы этих величин из (14) можно приблизительно оценить следующим образом. Разобьем отрезок $[\tau_1(z), \tau_N(z)]$ на L равных частей так, чтобы величины $q_l = q \left[\tau_1(z) + \frac{l\tau_{N1}(z)}{L} \right]$ мало менялись при переходе от l к $l+1$. Обозначим n_l номер моды, время задержки которой ближе всего к $\tau_1(z) + \frac{l\tau_{N1}(z)}{L}$. Тогда можно написать

$$\sum_{j=1}^N \xi_j \tau_{j_0} = \sum_{l=-L(\tau_{10}/\tau_{N1})}^{L(\tau_{N0}/\tau_{N1})} \left(\frac{l\tau_{N1}}{L} \right) \sum_{j=\eta_l}^{\eta_{l+1}-1} \xi_j \approx \sum_{l=-L(\tau_{10}/\tau_{N1})}^{L(\tau_{N0}/\tau_{N1})} \times \left(\frac{l\tau_{N1}}{L} \right) \alpha_l \sqrt{q_l \frac{\tau_{N1}}{L}}, \quad (15)$$

где

$$\alpha_l = \sum_{j=\eta_l}^{\eta_{l+1}-1} \xi_j \left(\sqrt{q_l \frac{\tau_{N1}}{L}} \right)^{-1} \quad (15')$$

— независимые случайные величины с параметрами $(0, 1)$. (Здесь мы используем то обстоятельство, что дисперсия $\sum_{j=\eta_l}^{\eta_{l+1}-1} \xi_j$ равна $(n_{l+1} - n_l)$, а эта разность в силу определения $q(\tau)$ равна примерно $q_l(\tau_{N1}/L)$.)

* Если $U_j(x)$ действительны, то ψ_j принимают значения лишь 0 и π .

Аналогично преобразуя остальные суммы в (14), получаем в итоге

$$\gamma^2 = 1 - \frac{\sum_{m=-M}^M m^2 g_m}{\sum_{m=-M}^M g_m} \theta(L) \left[\frac{\Delta\omega\tau_{N1}(z)}{L} \right]^2, \quad (16)$$

где

$$\theta(L) = \frac{\left(\sum_{l=-L_1}^{L_2} \alpha_l l \sqrt{q_l} \right)^2 + \left(\sum_{l=-L_1}^{L_2} \beta_l l \sqrt{q_l} \right)^2}{\left(\sum_{l=-L_1}^{L_2} \alpha_l \sqrt{q_l} \right)^2 + \left(\sum_{l=-L_1}^{L_2} \beta_l \sqrt{q_l} \right)^2}, \quad (17)$$

$$L_1 = L \frac{\tau_{10}}{\tau_{N1}}, \quad L_2 = L \frac{\tau_{N0}}{\tau_{N1}}.$$

Заметим, что $\theta(L)$ от z не зависит ввиду того, что q_l одинаково входит как в числитель, так и в знаменатель, $\tau_{N1}(z) = \Delta_{N1} z$, где $\Delta_{N1} = \left| \frac{1}{V_N} - \frac{1}{V_1} \right|$. Таким образом,

$$\gamma^2 = 1 - \frac{\sum_{m=-M}^M m^2 g_m}{\sum_{m=-M}^M g_m} \theta(L) \left[\frac{\Delta\omega\Delta_{N1}}{L} \right]^2 z^2. \quad (18)$$

Известно, что для He-Ne лазера g_m имеет вид

$$g_m = \exp[-(m/M)^2].$$

В этом случае (18) может быть переписано:

$$\gamma^2 = 1 - \frac{[M\Delta\omega]^2}{2} \rho^2 \frac{\tau_{N1}(z)}{L^2} \theta_0, \quad (18')$$

где

$$\rho^2 = \frac{\sum_{l=-L(\tau_{10}/\tau_{N1})}^{L(\tau_{N0}/\tau_{N1})} l^2 q_l \frac{\tau_{N1}}{L}}{\sum_{l=-L(\tau_{10}/\tau_{N1})}^{L(\tau_{N0}/\tau_{N1})} q_l \frac{\tau_{N1}}{L}} = \sigma^2(z) \left(\frac{L}{\tau_{N1}(z)} \right)^2$$

— нормирующий множитель, а

$$\sigma^2(z) = \frac{\int (\tau - \tau_0)^2 q(\tau) d\tau}{\int q(\tau) d\tau}$$

— эффективная ширина импульсного отклика волокна длины z , $\theta_0 = \theta/\rho^2$. Заметим, что из (18') следует:

$$\sigma^2(z) = \frac{2(1 - \gamma^2)}{(M\Delta\omega)^2 \theta_0}.$$

Следовательно, измерив значение γ^2 и зная статистические свойства θ_0 , можно оценить эффективную ширину импульсного отклика исследуемого волокна.

$\theta(L)$ моделировалось на ЭВМ для $L=100$, причем α_l и β_l выбирались для простоты принимающими лишь два значения ± 1 с вероятностью $1/2$. При каждом эксперименте вычислялось как значение дроби $\theta(L)$, так и значения ее знаменателя, который мы обозначим $W(L)$.

Целью моделирования была оценка функций распределения (ФР) $\theta(L)$ и условных функций распределения (УФР) $\theta(L)$ при условии, что $W \geq W_0$ (W_0 — параметр). Дело в том, что в экспериментах измеряется взаимная когерентность не любых двух областей в сечении волокна, а подбираются светлые пятна, т. е. области, где интенсивности W превышают некоторый уровень.

Теоретические ФР для θ были получены В. Н. Тутубалиным, который заметил, что при

$$\tau_0 = \frac{\int \tau q(\tau) d\tau}{\int q(\tau) d\tau}$$

числитель и знаменатель $\theta(L)$ становятся статистическими независимыми случайными величинами, имеющими каждая экспоненциальную ФР со своим средним значением. Используя это свойство и применяя стандартные методы теории вероятности, легко можно найти, что

$$P\{\theta_0 < \Gamma\} = \frac{\Gamma}{1 + \Gamma}; \quad (19)$$

$$P\{\theta_0 < \Gamma/W > W_0\} = 1 - \frac{\exp(-\Gamma W_0/\bar{W})}{1 + \Gamma}, \quad (20)$$

где \bar{W} — среднее значение W ,

$$M_1[W_0] \equiv M\{\theta_0/W > W_0\} = - \int_0^\infty \frac{\exp(-W_0 z)}{1 + z} dz. \quad (21)$$

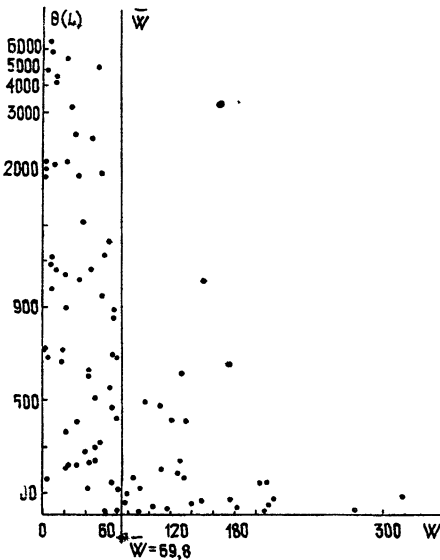


Рис. 4.

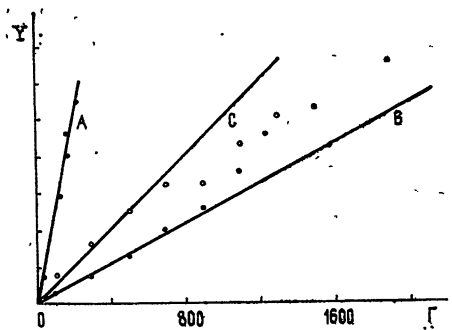


Рис. 5.

Рис. 4. Результаты статистического моделирования величин $\theta(L)$ и $W(L)$.
 Рис. 5. Проверка соответствия теоретических и эмпирических результатов; А — проверка $W(L)$ на экспоненциальный характер распределения, В — результат проверки соответствия экспериментальной ФР для $\theta(L)$ — теоретической, С — проверка соответствия экспериментальной УФР для $\theta(L)$ — теоретической.

Результаты моделирования представлены на графике рис. 4, где по оси X откладывались значения $W(L)$, а по оси Y — соответствующие им значения дроби $\theta(L)$ (общее количество точек — 95). Значение ρ^2 получилось равным 0,418. На рис. 5 (график А) представлен результат проверки того, что $W(L)$ действительно имеет экспоненциальное распределение. По оси Y отложен переменный масштаб, соответствующий ожидаемому теоретическому распределению. Кружочки представляют значения эмпирической ФР. Мы видим, что они находятся в достаточной близости от прямой $Y=X$, которая соответствовала бы идеальному совпадению эмпирической и теоретической ФР. На графике В представлен результат проверки совпадения теоретической и эмпирической ФР для $\theta(L)$. Мы видим, что совпадение получилось хорошим примерно для 70% от общего числа точек. Распределение вероятностей для очень больших значений $\theta(L)$ уже отличается от теоретического. На графике С представлен результат проверки совпадения теоретической и эмпирической УФР при условии, что $W > W$. Здесь совпадение хорошее для 85% точек. Учитывая, что общее количество точек равнялось 95, а для графика С даже 35, следует признать совпадение на графиках В и С удовлетворительным, хотя, возможно, имеются еще не понятые в настоящее время причины отклонения эмпирических ФР и УФР от теоретических при больших значениях $\theta(L)$.

В заключение приведем оценку коэффициента когерентности по формуле (16) для следующих данных:

$$M = 3 \sqrt{\ln 2}, \quad z = 100 \text{ м}, \quad \tau_{N1} = 2,8 \cdot 10^{-9} \text{ с}, \quad \Delta\omega = 5,66 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

При этом $\rho^2 = 0,418$, а $\gamma = 1 - 0,82 \cdot 10^{-3} \theta(L)$; $0,82 \cdot 10^{-3} \theta(L) \ll 1$. Для пересчета на другие значения z заметим (см. (18)), что $1 - \gamma$ имеет квадратичную зависимость от z .

Таким образом, в работе

1) приведены результаты статистического моделирования на ЭВМ случайной величины $\theta(L)$, входящей в выражение для взаимной когерентности поля на выходе лазера и поля на выходе протяженного многомодового стекловолокна;

2) результаты позволяют заранее оценивать ожидаемую степень когерентности этих полей по известному распределению показателя преломления по сечению волокна;

3) и обратно, зная экспериментально измеренное значение когерентности, можно оценить ожидаемое значение эффективной ширины импульсного отклика волокна длины z .

Автор выражает глубокую благодарность Р. Ф. Матвееву, И. П. Коршунову, В. Н. Тутубалину за ценные советы и полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Н. Борн, Э Вольф, Основы оптики, изд. Наука, М., 1973.
- 2 А Д Шатров, Изв вузов — Радиофизика, 20, № 8, 1153 (1977).
- 3 В П Мальцев, А Д Шатров, В В Шевченко, Радиотехника и электроника, 23, № 10, 2093 (1978)
- 4 М И Джигладзе, Б С Лежава, Т Я Челидзе, Оптика и спектроскопия, 43, № 6, 1163 (1977)
- 5 Л М Кучикян, П И Сидак, Оптика и спектроскопия, 43, № 3, 518 (1977).
- 6 Е М Базарный и др, Радиофизика и электроника, 21, № 6, 1304 (1976).
- 7 Ю В Гуляев и др, Квантовая электроника, 4, № 11, 2464 (1977).
- 8 М М Дедловский, И П Коршунов, П. П. Шевченко, Радиотехника и электроника, 25, № 3, 481 (1980).

TO THE PROBLEM OF THE FIELD COHERENCY STUDY IN A REGULAR
MULTIMODE FIBER GLASS FILAMENT

E. L. Efremov

A mathematical model is investigated occurred when processing measurement results of the degree of mutual field coherency of a gas laser and the field at the output of an extended fiber glass filament. Results permit to evaluate in advance the expected degree of mutual coherency of these fields over the distribution of the refracted index in the filament section.

И Н Ф О Р М А Ц И Я

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, т. XIX, № 4, 1979 года

Аннотации статей, представляющих интерес для читателей «Радиофизики»

А. В. Гуревич. Ионизация нижней ионосферы под действием мощных радиоимпульсов.

Рассчитана частота ионизации электронами молекул воздуха в сильном переменном электрическом поле. Показано, что короткий радиоимпульс высокой мощности может создать значительную искусственную ионизацию в нижней ионосфере.

Л. Ф. Черногор. К нелинейной теории эффекта Доплера радиосигналов геофизических ракет.

Рассмотрено возмущение плазмы бортовым передатчиком. Заметного увеличения температуры электронов следует ожидать при мощности передатчика $P \gtrsim 1$ Вт для частот $f \sim 1-10$ МГц. Нелинейная поправка к доплеровскому смещению частоты оказалась незначительной.

А. Е. Крупина, Ю. Я. Яшин, В. А. Яшнов. О распространении низкочастотных волн свистового диапазона в магнитосфере

Рассматривается распространение низкочастотных волн в диапазоне частот $\Omega_{H^2} \ll \omega^2 \ll \omega_{H^2}$ (ω_H и Ω_H — гирочастоты электронов и ионов соответственно) в магнитосфере и верхней ионосфере. Показана возможность существования лучевых траекторий типа гармошек на частотах $\omega < \omega_L$ (ω_L — нижнегибридная частота), определяемая наличием градиента ω_L вдоль направления геомагнитного поля

Г. С. Бочкарев. О нелинейном взаимодействии дециметровых радиоволн близких частот при наклонном распространении.