Как видно из рис. 3, 4, максимальные значения КПД и полезной мощности ИПД со ступенчатым профилем легирования в 2—2,5 раза больше, чем у ИПД с однородным легированием. Однако эти значения достигаются при значительно меньших величинах активного сопротивления. Поэтому преимущества $p^+ - n - i - p^+$-диодов могут быть реализованы при достаточно низких омических потерях в диодной структуре и внешней цепи.

Если допустить, что основные потери связаны с омическим сопротивлением R_s пассивного участка структуры, и учесть, что для эффективной работы диода в схеме необходимо $R_s < 1/2|R|$, то, пользуясь рис 3, 4, можно оценить значение произведения толщины этого участка h на его удельное сопротивление ρ.

В диапазоне $50 < j_0 < 150$ *А/см²* $\rho \cdot h$ не должно превышать 1,5—3,0 *Ом·см²*, при $\rho \approx 10^{-2}$ *Ом·см* это соответствует $h < 15 \div 30$ *мк*

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. И. Голант, А. А. Попадьин, А. С. Тагер, Изв. вузов — Радиофизика, **23**, № 2, 244 (1980).
2. E. P. Eer Nisse, Appl. Phys. Lett., **20**, 301 (1972).
3. H. W. Ruegg, IEEE Trans., **ED-15**, 577 (1968).
4. K. Kawakada, Y. Mizushima, Jap J. Appl Phys., **12**, 423 (1973).
5. G. Björkman, C. P. Snapp, Electr. Lett., **8**, 501 (1972).

Поступила в редакцию
7 мая 1979 г.

УДК 538.56 : 519.25

О «БЛИЗОСТИ» СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХ ОДНОМЕРНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

А. Л. Вировлянский, А. Н. Малахов

В данной работе рассматривается связь статистических характеристик двух одномерных марковских процессов $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$, задаваемых соответственно стохастическими уравнениями

$$\dot{x} + a(x) = \xi(t)$$

и

$$\dot{\tilde{x}} + \tilde{a}(\tilde{x}) = \xi(t),$$

где $\xi(t)$ — гауссов шум с нулевым средним и функцией корреляции

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = D\delta(t-t'),$$

$a(x)$ и $\tilde{a}(x)$ — нелинейные функции. Интуитивно ясно, что если функции $a(x)$ и $\tilde{a}(x)$ мало отличаются друг от друга (количественный критерий приведен ниже), то статистические характеристики $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ тоже должны быть близки. Мы ставим себе задачу получить формулу для оценки этой «близости».

Отправным пунктом наших рассуждений является тот факт, что плотность вероятности переходов процессов $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ можно записать в виде континуального интеграла [1-4]. Здесь мы воспользуемся следующей формулой:

$$W(x, T|x_0, 0) = \exp\left\{-\frac{1}{2D}[A(x) - A(x_0)]\right\} \int\limits_{x_0}^{x} \exp\left\{-\frac{1}{2D} \times \right.$$
$$\left. \times \int\limits_0^T [\dot{x}^2 + a^2(x)]\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^T a'(x)dt\right\} Dx(t), \tag{1}$$

что является символической записью выражения

$$W(x, T\,|\,x_0, 0) = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\overset{(N-1)}{\cdots}\int \exp\left\{-\frac{1}{2D}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{\varepsilon} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + a^2(x_{n-1})\,\varepsilon\right]\right\} \exp\left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} a'(x_{n-1})\,\varepsilon\right] \frac{dx_1 \ldots dx_{N-1}}{(2\pi D\,\varepsilon)^{N/2}} \exp\left[\frac{-A(x) + A(x_0)}{2D}\right], \tag{1a}$$

$W(x, T\,|\,x_0, 0)$ — плотность вероятности переходов из точки x_0 в точку x за время T, $\varepsilon \equiv T/N$, $x_N \equiv x$, $A(x) \equiv \int a(x)dx$. Можно проверить, что функция $W(x, T\,|\,x_0, 0)$, определяемая формулой (1) (или (1a)), удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка для процесса $x(t)$. Проще всего в этом убедиться непосредственной подстановкой правой части (1a) в уравнение Фоккера — Планка. Аналогичная проверка проводится в [1] (там речь идет об уравнении Шрёдингера). Для процесса $\tilde{x}(t)$ в формулах (1) и (1a) следует заменить $a(x)$ на $\tilde{a}(x)$.

Введем две следующие константы, характеризующие близость $a(x)$ и $\tilde{a}(x)$:

$$\alpha \equiv \max_x |a^2(x) - \tilde{a}^2(x)|, \quad \beta \equiv \max_x |a'(x) - \tilde{a}'(x)|.$$

Используя очевидные неравенства типа

$$\left|\int\limits_0^T [a^2(x) - \tilde{a}^2(x)]\,dt\right| \leqslant \alpha T,$$

$$\left|\int\limits_0^T [a'(x) - \tilde{a}'(x)]\,dt\right| \leqslant \beta T,$$

с помощью (1) легко получаем

$$\tilde{W}\exp\left(-\frac{\alpha T}{2D} - \frac{\beta T}{2}\right) \leqslant \exp\left[-\frac{A(x) - A(x_0) - \tilde{A}(x) + \tilde{A}(x_0)}{D}\right] W \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{W}\exp\left(\frac{\alpha T}{2D} + \frac{\beta T}{2}\right), \tag{2}$$

где $\tilde{W}(x, T\,|\,x_0, 0)$ — плотность вероятности переходов процесса $\tilde{x}(t)$, $\tilde{A}(x) = \int \tilde{a}(x)dx$. Формула (2)—основная формула данной работы, она дает количественную оценку близости функций W и $\tilde{W}$. С ее помощью можно получить оценку близости других статистических характеристик процессов $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$. Формула (2) может оказаться полезной для определения точности некоторых приближенных методов решения уравнения Фоккера — Планка, связанных с заменой функции $a(x)$ на близкую к ней $\tilde{a}(x)$. Следует заметить, что оценка (2) при $T\to\infty$ практически не несет никакой информации. Тем не менее при достаточно малых α и β ею есть смысл пользоваться на большом интервале времен

Обычно значения плотностей вероятности W и $\tilde{W}$ быстро спадают вне некоторого интервала Δx. Это свидетельствует о том, что траектории случайного процесса большую часть времени проводят в интервале Δx. В этом случае часто можно использовать формулу (2) с $\bar{\alpha} = \max\limits_{x\in\Delta x} |a^2(x) - \tilde{a}^2(x)|$, $\bar{\beta} = \max\limits_{x\in\Delta x} |a'(x) - \tilde{a}'(x)|$ вместо α и β. Хотя такая формула в отличие от (2) является нестрогой, она несет больше информации, если $a(x)$ и $\tilde{a}(x)$ сильно отличаются лишь вне Δx, т. е. там, где они уже «не дают вклада».

В качестве примера рассмотрим $a(x) \equiv \Delta_0 \sin k_0 x$. Такая нелинейность встречается при исследовании статистической динамики систем с фазовой автоподстройкой частоты [5, 6] Обычно в качестве начального условия берут $W(x, 0\,|\,0, 0) = \delta(x)$. С течением времени дельта-функция начинает расплываться При малых временах T этот процесс можно приближенно описать с помощью $\tilde{a}(x) = \Delta_0 k_0 x$ [5]. Уравнение Фоккера —

Планка для $\tilde{x}(t)$ легко решается, и мы получаем [6]

$$\tilde{W}(x, T\,|\,0, 0) = \sqrt{\frac{\Delta_0 k_0}{\pi D[1 - \exp(-2\Delta_0 k_0 T)]}}\exp\left[-\frac{\Delta_0 k_0}{D}\frac{x^2}{1 - \exp(-2\Delta_0 k_0 T)}\right].$$

При малых T плотность вероятности в основном сосредоточена в интервале $(-\bar{x}, \bar{x})$, где $\bar{x} = \sqrt{2DT(1 - \Delta_0 k_0 T)}$. При этом $\bar{\alpha} = \Delta_0^2 k_0^4 \bar{x}^4/3$, $\bar{\beta} = \Delta_0 k_0^3 \bar{x}^2/2$. Относительную ошибку приближенно можно оценить по формуле

$$\frac{\tilde{W}}{W} \sim \exp\left[\pm\left(\frac{1}{3}\frac{\Delta_0^2 k_0^4 \bar{x}^4}{D} + \frac{\Delta_0 k_0^3 \bar{x}^2}{2}\right)T\right].$$

Например, при $\bar{x}^2 = D/2\Delta_0 k_0$, т. е. когда $\tilde{W}$ уже достигло полуширины своего стационарного распределения,

$$\frac{\tilde{W}}{W} \sim \exp\left(\pm\, 0{,}3\frac{Dk_0}{\Delta_0}\right).$$

Видно, что при некоторых значениях параметров ошибка все еще мала. При больших временах ($T \gg 1/\Delta_0 k_0$) такой аппроксимацией пользоваться заведомо нельзя, хотя бы потому, что $x(t)$ не имеет стационарного распределения, а $\tilde{x}(t)$ имеет.

Авторы благодарны В И. Татарскому за полезные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р Фейнман, А. Хиббс, Квантовая механика и интегралы по траекториям, изд. Мир, М, 1968.
2. Р. Фейнман, Статистическая механика, изд. Мир, М, 1975.
3. А. Л. Вировлянский, А. Н. Малахов, Изв. вузов — Радиофизика, 22, № 5, 560 (1979).
4. Н Накеп, Z. Physik, **B24**, 321 (1976)
5. А Н Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Сов. радио, М., 1968.
6. В И Тихонов, М. А. Миронов, Марковские процессы, изд. Сов. радио, М., 1977.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 22 ноября 1978 г.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ «РАДИОФИЗИКИ»

В нашей статье [1], поступившей в редакцию 2 мая 1977 года, не указана дата состоявшегося в апреле 1977 г. семинара, на котором А. Е Каплан, по-видимому, впервые на основе найденных им продольно-неоднородных бегущих волн (ПНБВ) правильно рассмотрел возможность гистерезиса при падении плоской волны на прозрачную среду с отрицательной нелинейностью При этом им отмечалось, что учет слабого поглощения сохраняет гистерезисные явления. Кроме того, им указывался критерий минимальной энергии для отбора ПНБВ из континуума, и определялась область существования гистерезиса

Вывод статьи [2] о запрете гистерезиса для пучков определяется областью применимости параболического приближения, использовавшегося в работе, и носит ограниченный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Колоколов, А И Суков, Изв. вузов—Радиофизика, 21, № 9, 1309 (1977).
2. А А Колоколов, А. И. Суков, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 10, 1459 (1977).

А. А. Колоколов, А. И. Суков