

УДК 621 372.8 09

## ДИФРАКЦИЯ ВОЛНЫ $H_{10}$ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СТУПЕНЬКЕ

Ф. Г. Богданов, Г. Ш. Кеванишвили

На основе проекционного метода дается строгое решение задачи дифракции основной волноводной волны  $H_{10}$  в бесконечном прямоугольном волноводе на полубесконечной диэлектрической ступеньке вдоль боковой стенки. Приводятся и анализируются некоторые зависимости дифракционных характеристик системы от ее параметров

### ВВЕДЕНИЕ

Сочленение волноводов с различным диэлектрическим наполнением является элементом ряда волновых устройств. Представляет интерес случай, когда сочленяются полый и частично заполненный диэлектриком вдоль боковой стенки прямоугольные волноводы одинаковых поперечных размеров. Волна  $H_{10}$  является основным типом волн, которые могут распространяться в областях по обе стороны от сочленения. Рассматриваемая дифракционная задача состоит в определении физических характеристик системы при падении на сочленение волны  $H_{10}$  со стороны полого волновода, полагаемого одноמודовым.

Данная задача поставлена и частично решена в работе [1], в которой, с помощью вариационного метода, задача сводилась к бесконечной системе линейных однородных алгебраических уравнений, которая могла быть решена методом редукции. Однако до сих пор каких-либо численных результатов по рассматриваемому вопросу опубликовано не было.

В настоящей работе с помощью проекционного метода электродинамическая задача сведена к бесконечной системе линейных неоднородных алгебраических уравнений второго рода, допускающая решение методами редукции и итерации.

В настоящее время различные варианты проекционных методов успешно применяются для решения самых разнообразных волноводных задач (по этому поводу см. обзорную работу Никольского [3]). Предложенный нами вариант проекционного метода в сущности является аналогичным тому, который развит в работе [4], поскольку и в данном случае в качестве базисных функций, в отличие от других вариантов метода, используются две группы ортогональных на заданном интервале функций. Благодаря этому задачу можно свести к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода, имеющую несомненное преимущество [5] перед системами первого рода.

### 1. СИСТЕМА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛНОВОДА

Перейдем к математической формулировке задачи. Пусть имеем бесконечный прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками, вдоль боковой стенки которого помещена полубесконечная иде-

альная диэлектрическая пластина толщиной  $d$  с абсолютными проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м (рис. 1). Предположим, что на границу раздела ( $Z=0$ ) в положительном направлении оси  $Z$  со стороны полого волновода на диэлектрическую ступеньку падает волна  $H_{10}$  с компонентой

$$E_y = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-ih_1 z + i\omega t) \quad (1)$$

(Im  $h_1 < 0$ ).

Поставим задачу о нахождении рассеянного поля, возникающего в волноводе в результате дифракции волны (1) на диэлектрической ступеньке.

Составляющие поля в различных областях волновода можно записать в виде

$$E_{y1} = E_y + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{\pi m x}{a} \times \exp(ih_m z + i\omega t) \quad (z < 0); \quad (2)$$

$$E_{y2} = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \Phi_m(x) \times \exp(-ih'_m z + i\omega t) \quad (z > 0) \quad (3)$$

$$(\text{Im } h_m < 0, \text{ Im } h'_m < 0),$$

где  $h_m = \sqrt{k_0^2 - (\pi m/a)^2}$ ,  $k_0$  — волновое число свободного пространства,  $a$  — ширина волновода,  $h'_m$  — продольное волновое число волны  $H_{m0}$  в волноводе с диэлектриком, причем оно является решением трансцендентного уравнения [1, 2]:

$$\frac{\text{tg}(\sqrt{k^2 - h_m'^2} d)}{\sqrt{k^2 - h_m'^2}} + \frac{\text{tg}[(a-d)\sqrt{k_0^2 - h_m'^2}]}{\sqrt{k_0^2 - h_m'^2}} = 0; \quad (4)$$

$$\Phi_m(x) = \begin{cases} \sin q_m d \frac{\sin p_m(a-x)}{\sin p_m(a-d)} & \text{при } d \leq x \leq a, \\ \sin q_m x & \text{при } 0 \leq x \leq d \end{cases}, \quad (5)$$

$$q_m = (k^2 - h_m'^2)^{1/2}, \quad p_m = (q_m^2 + k_0^2 - k^2)^{1/2}.$$

Здесь  $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu_0}$ . Последовательность коэффициентов  $A_m$  и  $B_m$  подлежит определению.

Используя условия сшивания полей на границе раздела ( $Z=0$ ) волноводов, приходим к следующей системе функциональных (сумматорных) уравнений относительно искомых коэффициентов  $A_m$  и  $B_m$ :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( A_m \sin \frac{\pi m x}{a} - B_m \Phi_m(x) \right) = - \sin \frac{\pi x}{a}, \quad (6)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( A_m h_m \sin \frac{\pi m x}{a} + B_m h'_m \Phi_m(x) \right) = h_1 \sin \frac{\pi x}{a}.$$

Заметим, что входящие в эту систему координатные функции образуют на интервале  $[0, a]$  ортогональную систему, и для них справедливы следующие соотношения:

$$\int_0^a \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n x}{a} dx = \frac{a}{2} \delta_{mn}; \quad (7)$$

$$\int_0^a \Phi_m(x) \Phi_n(x) dx = \frac{a}{2} R_m \delta_{mn}, \quad (8)$$

где

$$R_m = \frac{d}{a} + \frac{\left(1 - \frac{d}{a}\right) \sin^2 q_m d}{\sin^2 [(a-d) \sqrt{q_m^2 - \chi^2}]} + \frac{\chi^2 \sin^2 q_m d}{2a q_m (q_m^2 - \chi^2)}, \quad (9)$$

причем  $\chi^2 = q_m^2 - p_m^2 = \omega^2(\varepsilon - \varepsilon_0)\mu_0$ .

Условия (7) и (8) позволяют легко трансформировать систему функциональных уравнений в бесконечную систему линейных неоднородных алгебраических уравнений либо для коэффициентов  $A_m$ , либо для  $B_m$ . Так, например, эта система для последовательности  $A_m$  имеет следующий вид:

$$A_n = b_n + \sum_{m \neq n}^{\infty} A_m Z_{mn} \quad (10)$$

$(n = 1, 2, 3, \dots),$

где

$$b_n = \frac{\delta_{1n} h_1}{1 - \gamma_{nn}} + Z_{n1}, \quad Z_{nm} = - \frac{\gamma_{nm}}{1 - \gamma_{nn}}, \quad \gamma_{nm} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h'_s T_{sn} T_{sm}}{h_n R_s},$$

$$T_{mn} = \frac{2}{a} \int_0^a \Phi_m(x) \sin \frac{\pi n x}{a} dx = \quad (11)$$

$$= - \frac{2\chi^2}{a^2} \frac{\pi n \sin(q_m d) \cos\left(\frac{\pi n d}{a}\right) - q_m a \cos(q_m d) \sin\left(\frac{\pi n d}{a}\right)}{\left[ q_m^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \right] \left[ q_m^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \chi^2 \right]}.$$

Поскольку имеют место очевидные оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{m, n=1}^{\infty} |Z_{nm}|^2 < \infty,$$

то свободные члены системы (10) принадлежат пространству  $l_2$ , а матрица  $\|Z_{nm}\|$  определяет в этом же пространстве линейный непрерывный оператор; в таком случае исследование бесконечной системы (10) сводится к исследованию конечной системы [5]. Другими словами, систему (10) можно решить методом редукции, а приближенное решение при этом будет стремиться к точному с ростом шага редукции.

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численное решение системы (10) методом редукции нами было проведено на ЭВМ (БЭСМ-6), одновременно исследовался вопрос о сходимости алгоритма. На рис. 2 изображена зависимость модуля коэффициента отражения  $|A_1|$  от количества  $N$  решаемых уравнений в усеченной системе при наборе параметров волновода  $s = d/a = 0,25$ ,  $q = 2a/\lambda = 1,5$  и  $\epsilon'_r = \epsilon/\epsilon_0 = 5,4$  ( $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}$ ).

Ту же зависимость для более широкого набора параметров  $\epsilon'_r$ ,  $s$  и  $q$  иллюстрирует таблица.

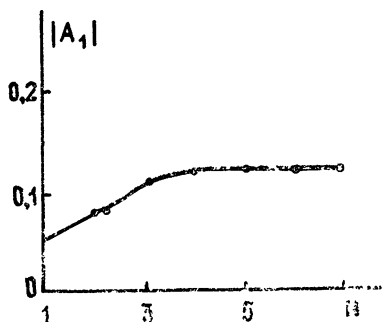


Рис. 2.

Таблица

Параметры системы			Модуль коэффициента отражения		
$\epsilon'_r$	$q$	$s$	$N = 5$	$N = 15$	$N = 20$
2,1	1,25	0,25	0,07567861	0,07568231	0,07568233
		0,5	0,25450606	0,25451480	0,25451479
		0,75	0,32329501	0,32329684	0,32329684
5,4	1,75	0,25	0,05478709	0,05479696	0,05479696
		0,5	0,11178842	0,11176150	0,11176092
		0,75	0,22424131	0,22425010	0,22425011
5,4	1,25	0,5	0,43117412	0,43079058	0,43078660
		0,75	0,55678271	0,55680176	0,55680165

Численный материал показывает, что для получения вполне удовлетворительной точности результатов достаточно ограничиться порядком редукции  $N = 5$ .

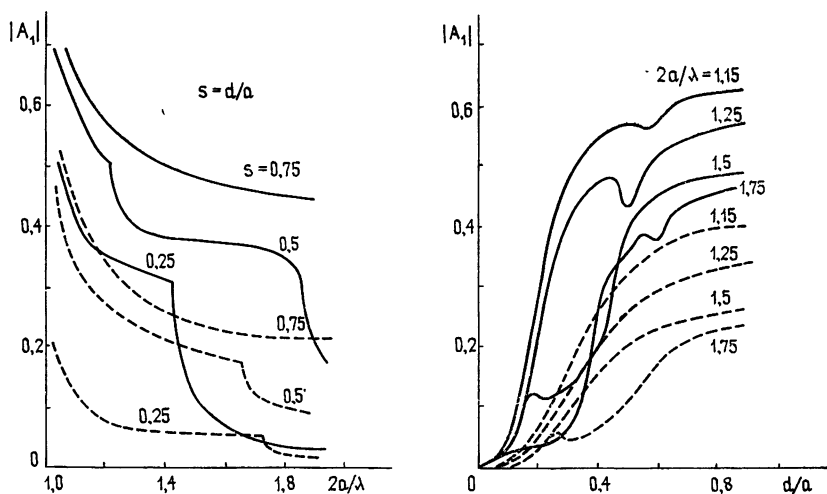


Рис. 3.

На рис. 3 и 4 построены графики зависимостей модуля  $|A_1|$  и фазы ( $\varphi = \arg A_1$ ) коэффициента отражения от относительной ширины

$q = 2a/\lambda$  и коэффициента заполнения  $s = d/a$  волновода при  $\epsilon_r' = 2,1$  (пунктир) (тефлон) и  $\epsilon_r' = 5,4$  (слюда, сплошные кривые). Из графиков видно, что коэффициент отражения  $|A_1|$  возрастает с увеличением коэффициента заполнения  $s$ , относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_r'$  и длины волны  $\lambda$ . Характерно наличие скачков и минимумов модуля и фазы коэффициента отражения, что связано с возбуждением волны типа  $H_{20}$  в волноводе. Интересно, что при больших заполнениях скачки и минимумы кривых отсутствуют, а фаза  $\varphi$  близка к  $\pi$ , что приближает систему к случаю, когда часть волновода полностью заполнена диэлектриком.

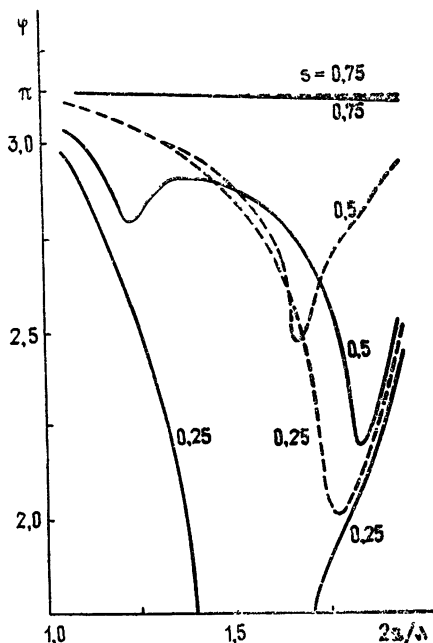


Рис. 4.

Другая важная дифракционная (энергетическая) характеристика волновода есть коэффициенты трансформации волны  $H_{10}$  в волну  $H_{m0}$ . Этот коэффициент определяется как отношение мощностей прошедшей и падающей волн. Можно показать, что он выражается формулой

$$T_m' = \frac{h_m'}{h_1} |B_m|^2 R_m, \tag{12}$$

причем  $B_m$  определяется через  $A_m$  посредством соотношения

$$B_m = \frac{T_{m1}}{R_m} + \frac{1}{R_m} \sum_{s=1}^{\infty} A_s T_{ms}.$$

На рис. 5 с помощью формулы (12) построены графики зависимости коэффициентов  $T_1$  (сплошная кривая) и  $T_2$  (штриховая кривая) от  $d/a$  при различных  $2a/\lambda$ , причем для рис. 5а —  $\epsilon_r' = 2,1$ , а для рис. 5б —  $\epsilon_r' = 5,4$ .

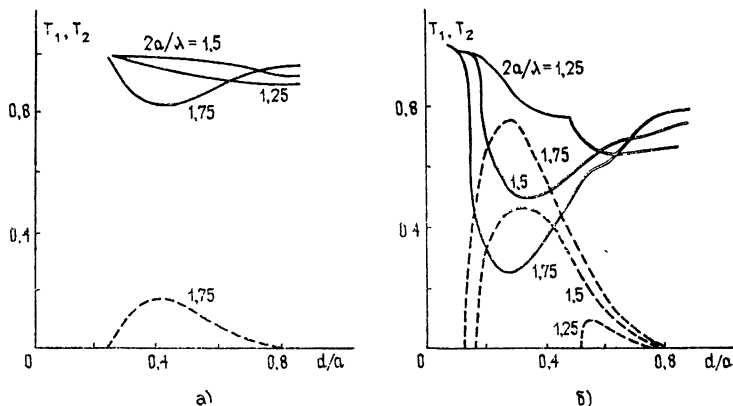


Рис. 5.

Из рисунка видно, что коэффициент прохождения  $T_1$  по мощности волны  $H_{10}$  максимален при малых заполнениях. При  $s = 0,2 \div 0,4$  происходит интенсивное преобразование энергии волны  $H_{10}$  в энергию  $H_{20}$ , которое тем сильнее, чем выше  $\epsilon'$  и меньше длина волны.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю В Егоров, Частично заполненные прямоугольные волноводы, изд. Сов. радио, М., 1967
2. Л. Левин, Современная теория волноводов, ИЛ, М., 1954.
3. В В Никольский, Изв вузов — Радиофизика, 20, № 1, 5 (1977).
4. Г Ш Кеванишвили, Тр Тбилисского госуниверситета, Физика, 188, 45 (1977).
5. В. П Шестопапов, Л. Н. Литвиненко, С. М Масалов, В. Г. Сологуб, Дифракция волн на решетках, изд ХГУ, Харьков, 1973.

Тбилисский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
15 июня 1979 г.

DIFFRACTION OF  $H_{10}$  WAVE BY A DIELECTRIC STEP

*F. G. Bogdanov, G. Sh. Kevanishvili*

Based on the projection method, a strict solution is given for the problem of diffraction of the principle waveguide  $H_{10}$  wave in an infinite rectangular waveguide by a semi-infinite dielectric step along a side wall. Some dependences of diffraction characteristics of the system on its parameter are given and analysed.