ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1980*

УДК 535.2

ДИСПЕРСИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ СМЕЩЕНИЙ ГЕОМЕТРООПТИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ В ПЛАВНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ФЛУКТУАЦИЯМИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Г. В. Пермитин, А. А. Фрайман

Предложен способ расчета дисперсии поперечных смещений геометрооптических лучей, пригодный для плавной зависимости среднего показателя преломления среды от координат. Возможности метода иллюстрируются различными примерами.

Дисперсии флуктуаций фазы, углов прихода волн и поперечных смещений лучей являются важными характеристиками излучения, распространяющегося в средах со случайными неоднородностями. Хотя по своей сути эти характеристики являются геометрооптическими, область их применения выходит за рамки приближения геометрической оптики. Так, например, в работах [1–3] показано, что, зная решение задачи о распространении волнового пучка в регулярной плавно неоднородной среде и величину среднеквадратичных смещений луча, вызванных рассеянием на крупномасштабных неоднородностях, можно рассчитать распределение средней по ансамблю реализаций плотности энергии поля в областях фокусировки, т. е. в окрестности каустик. Более того, знание дисперсии фазы и поперечных смещений лучей позволяет воспроизводить приближенную структуру каустик флуктуирующего излучения, а следовательно, величину и распределение волнового поля в отдельных наиболее типичных реализациях [4].

При вычислении дисперсии флуктуаций фазы наличие регулярного изменения показателя преломления не вносит дополнительных принципиальных трудностей по сравнению со случаем постоянного значения средней диэлектрической проницаемости. Иначе обстоит дело с вычислением среднеквадратичных смещений луча (и связанной с ними дисперсии флуктуаций углов прихода волн). Стандартная методика [5–7], сводящаяся к интегрированию флуктуационного набега фазы вдоль невозмущенных лучей и определению производных фазового распределения по поперечным координатам, в принципе, может, конечно, быть обобщена на среды с изменяющимся средним значением показателя преломления, но при этом значительно возрастают вычислительные трудности в связи со сложностью краевой задачи для лучевых уравнений в неоднородной среде. В настоящей работе предлагается способ расчета дисперсии поперечных смещений лучей, основанный на усреднении решения упрощенного уравнения лучей в криволинейной системе координат, связанной с некоторым опорным лучом в регулярно неоднородной среде. Применимость предлагаемой методики определяется рамками малоуглового (параксиального) приближения: угол θ между возмущенным лучом и опорным (невозмущенным) должен быть достаточно мал ($\theta \ll 1$), отклонение луча от опорного должно быть мало по сравнению с характерным масштабом регулярной неоднородности среды (радиусом кривизны луча). Для простоты рассматривается двумерная скалярная задача для монохроматического волнового поля $U(x, z)$, описываемого уравнением

$$\Delta U + k_0^2[\varepsilon_0(x, z) + \varepsilon_1(x, z)]U = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon_0(x, z)$ — среднее значение диэлектрической проницаемости, $\varepsilon_1(x, z)$ — флуктуации диэлектрической проницаемости. Предполагается, что $|\varepsilon_1| \ll \varepsilon_0$ и что характерный масштаб регулярной неоднородности L, размер случайных неоднородностей l и длина волны в среде $\lambda = 2\pi/k_0\sqrt{\varepsilon_0}$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$L \gg l \gg \lambda. \tag{2}$$

1. Семейство лучей, соответствующих волновому уравнению (1), описывается уравнением

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}(\nabla\varepsilon_0 + \nabla\varepsilon_1). \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет интеграл $\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}\right|^2 = \varepsilon(\boldsymbol{r})$, из которого следует, что переменная τ связана с длиной луча s соотношением $ds = \sqrt{\varepsilon}\, d\tau$ (в изотропной плазме τ имеет смысл группового пути).

Пусть нам известен некоторый луч (опорный) в регулярной среде с $\varepsilon = \varepsilon_0(\boldsymbol{r})$, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_0}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\nabla\varepsilon_0(\boldsymbol{r}) \tag{3'}$$

с начальными условиями $\boldsymbol{r}_0(0) = \boldsymbol{r}^{(0)}$, $\frac{d\boldsymbol{r}_0}{d\tau}(0) = \boldsymbol{p}^{(0)}$. Поперечное смещение луча во флуктуирующей среде относительно опорного определяется выражением $\sigma = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)$, где $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной нормали к опорному лучу, $\boldsymbol{r}_1$ — решение (3), в окрестности точки $\boldsymbol{r}^{(0)}$ совпадающее с опорным лучом $\boldsymbol{r}_0$. Дифференцируя σ два раза по τ, используя (3), (3') и формулы Серре — Френе, отбрасывая члены второго порядка по σ и ε_1, получаем

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + \left[\frac{3}{4}\frac{(\partial\varepsilon_0/\partial n)^2}{\varepsilon_0} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varepsilon_0}{\partial n^2}\right]\sigma = \frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial n}, \tag{4}$$

где производные $\partial\varepsilon_0/\partial n$ берутся в точке на опорном луче, т. е. при $n = 0$. Производная $\partial\varepsilon_1/\partial n$, вообще говоря, должна браться на флуктуирующем луче, однако, в силу сделанных выше предположений о малости ε_1 и плавности регулярных неоднородностей (2), величина σ мало меняется на расстояниях порядка радиуса корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости l, и $\partial\varepsilon_1/\partial n$ в (4) можно считать случайной функцией, локально зависящей только от τ.

Однородное уравнение (4) (с $\partial\varepsilon_1/\partial n = 0$) является достаточно хорошо известным [8–10] уравнением для дифференциального нормального сечения лучевой трубки в неоднородной среде (в [8] оно записано в переменных (s, n) и содержит член с первой производной; в [10] дано обобщение этого уравнения на среды с кубичной нелинейностью). Фундаментальная система решений однородного уравнения (4) $\sigma_1(\tau)$, $\sigma_2(\tau)$ имеет простой физический смысл: $\sigma_1(\tau)$ $(\sigma_1(0) = 1,\ \sigma_1'(0) = 0)$ — дифференциальное сечение лучевой трубки, образованной первоначально параллельными лучами; $\sigma_2(\tau)$ $(\sigma_2(0)=0,\ \ \sigma_2'(0)=1)$ — сечение трубки, образованной лучами, расходящимися из одной точки. Вронскиан данной фундаментальной системы $W=\sigma_1\sigma_2'-\sigma_1'\sigma_2=1$.

Решение неоднородного уравнения (4) с нулевыми начальными условиями имеет вид

$$\sigma(\tau)=\frac{1}{2}\sigma_2(\tau)\int\limits_0^{\tau}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial n}(x)\,\sigma_1(x)\,dx-\frac{1}{2}\sigma_1(\tau)\int\limits_0^{\tau}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial n}(x)\,\sigma_2(x)\,dx. \tag{5}$$

Возводя (5) в квадрат и усредняя по ансамблю реализаций $\varepsilon_1(\boldsymbol{r})$, для среднего квадрата поперечных смещений получаем

$$\begin{aligned}\overline{\sigma^2}(\tau)=\frac{1}{4}\iint\limits_0^{\tau}\Gamma_{\varepsilon_1'}(x,\ y)\left[\sigma_2(\tau)\sigma_1(x)-\sigma_2(x)\sigma_1(\tau)\right]\times\\ \times\left[\sigma_2(\tau)\sigma_1(y)-\sigma_2(y)\sigma_1(\tau)\right]dx\,dy,\end{aligned} \tag{6}$$

где $\Gamma_{\varepsilon_1'}(x,\ y)=\overline{\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial n}(x)\,\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial n}(y)}$ — корреляционная функция нормальных к лучу производных от флуктуаций диэлектрической проницаемости. Делая в (6) стандартную замену переменных, считая длину трассы $\tau\gg l$ и полагая, для конкретности, корреляционную функцию флуктуаций диэлектрической проницаемости гауссовой $\left(\Gamma_{\varepsilon_1}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})=\right.$ $=\overline{\varepsilon_1^2}(\boldsymbol{r})\exp\left[-\frac{\Delta r^2}{l^2(\boldsymbol{r})}\right]$, где $\overline{\varepsilon_1^2}(\boldsymbol{r})$, $l(\boldsymbol{r})$ — плавные в масштабе l функ- $\left.\text{ции}\right)$, можно упростить выражение для $\overline{\sigma^2}(\tau)$*:

$$\overline{\sigma^2}(\tau)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int\limits_0^{\tau}\frac{\overline{\varepsilon_1^2}(x)}{l(x)}\left[\sigma_1(x)\,\sigma_2(\tau)-\sigma_1(\tau)\,\sigma_2(x)\right]^2dx. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что в среде с $\varepsilon_0=1$, $\overline{\varepsilon_1^2}=\mathrm{const}$, $l=\mathrm{const}$ фундаментальная система уравнения (4) имеет вид $\sigma_1(\tau)=1$, $\sigma_2(\tau)=\tau$ и выражение (7) переходит в хорошо известное [5–7]

$$\overline{\sigma^2}(z)=\frac{\sqrt{\pi}}{6}\,\overline{\varepsilon_1^2}\,\frac{z^3}{l}. \tag{8}$$

Прежде чем переходить к рассмотрению конкретных примеров, сделаем одно очевидное замечание: член со второй производной от ε_0 в (4) может иметь любой знак и, соответственно, оказывать фокусирующее либо дефокусирующее действие. Эффекты, связанные с кривизной лучей, всегда оказывают фокусирующее действие и ослабляют рост дисперсии поперечных смещений луча.

Пример 1. Фокусирующая линзоподобная среда (волноводный канал)

$$\varepsilon_0=1-h^2x^2.$$

Для опорного луча $x=0$ фундаментальная система решений однородного уравнения (4) имеет вид

---

* Конкретный вид функции корреляции Γ_{ε_1} не является в данном случае принципиальным и сказывается только на значении коэффициента перед интегралом.

$$\sigma_1(\tau) = \cos h\tau, \qquad \sigma_2(\tau) = \frac{1}{h} \sin h\tau. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7) и считая $\overline{\varepsilon_1^2} = \mathrm{const}$, $l = \mathrm{const}$, получаем

$$\overline{\sigma^2}(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\overline{\varepsilon_1^2}}{h^2 l} \frac{\tau}{2} \left(1 - \frac{\sin 2h\tau}{2h\tau}\right). \tag{10}$$

На начальном участке трассы ($2h\tau \ll 1$) выражение (10) совпадает с формулой (8) для регулярно однородной среды. На больших расстояниях ($2h\tau \gg 1$) $\overline{\sigma^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \overline{\varepsilon_1^2} \frac{\tau}{h^2 l}$, т. е. рост дисперсии смещений луча существенно замедляется из-за фокусирующего действия регулярной неоднородности.

Пример 2. Дефокусирующая линзоподобная среда (лучи Педерсена)

$$\varepsilon_0 = a(z) + h^2 x^2.$$

Выбирая в качестве опорного луча кривую, совпадающую с максимумом параболического слоя (луч Педерсена [11]), имеем

$$\overline{\sigma^2}(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\overline{\varepsilon_1^2}}{h^2 l} \frac{\tau}{2} \left(\frac{\mathrm{sh}\, 2h\tau}{2h\tau} - 1\right), \tag{11}$$

где $\tau = \int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{a(z)}}$. На начальном участке трассы (11), как и (10), переходит в (8); однако при $h\tau > 1$ дисперсия поперечных смещений луча экспоненциально нарастает вдоль трассы (выражение (11) применимо до тех пор, пока $\overline{\sigma^2} h^2 < 1$). Этот пример демонстрирует «неустойчивость» лучей Педерсена.

Пример 3. Линейный слой диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_0(z) = 1 - \alpha z.$$

Для опорного луча, выходящего из плоскости $z = 0$ под углом θ_0 к оси z ($x = p_0 \tau$, $z = \tau[q_0 - (\alpha\tau/4)]$), фундаментальная система решений уравнения (4) имеет вид

$$\sigma_1(\tau) = \left(1 - \frac{1}{2} \alpha\tau q_0 - \frac{1}{4} \alpha^2 \tau^2 p_0^2\right) \Big/ \sqrt{\varepsilon_0(\tau)},$$

$$\sigma_2(\tau) = \tau \left(1 - \frac{1}{2} \alpha \tau q_0\right) \Big/ \sqrt{\varepsilon_0(\tau)}, \tag{12}$$

$$\varepsilon_0(\tau) = 1 - \alpha\tau q_0 + \frac{1}{4} \alpha^2 \tau^2,$$

где $p_0 = \sin\theta_0$, $q_0 = \sqrt{1 - p_0^2}$.

Для описания статистических свойств среды выберем, для определенности, следующую модель: $\overline{\varepsilon_1^2}(\boldsymbol{r}) = \nu^2 [1 - \varepsilon_0(\boldsymbol{r})]^2$, $\nu = \mathrm{const}$, $l = \mathrm{const}$. Такая модель довольно часто употребляется при решении задач о распространении радиоволн в ионосфере Земли и соответствует предположению о пропорциональности флуктуаций электронной концентрации ее среднему значению. Подставляя $\overline{\varepsilon_1^2}(r)$ и (12) в (7), получаем

$$\overline{\sigma^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\nu^2}{\alpha^3 l}\,F(\alpha\tau),$$

$$F(y) = \frac{1}{\varepsilon_0(y)}\int\limits_0^y \frac{\left(q_0 t - \frac{1}{4}t^2\right)(y-t)^2\left[1 - \frac{1}{2}q_0(y+t) + \frac{1}{4}yt\right]^2}{1 - q_0 t + \frac{1}{4}t^2}\,dt. \tag{13}$$

Интеграл в (13) вычисляется аналитически, но мы не будем приводить соответствующего довольно громоздкого выражения и ограничимся только графическим построением $F(y)$ для различных углов падения θ_0 на рис. 1; звездочки на кривых указывают место касания невозмущенного луча каустики. Пунктиром на рис. 1 нанесена зависимость соответствующим образом нормированного среднего квадрата поперечных смещений луча в регулярно однородной среде с $\varepsilon_0 = 1$, $\overline{\varepsilon_1^2} = \nu^2$. Как видно из рис. 1, в неоднородной среде дисперсия поперечных смещений лучей может сильно увеличиваться, особенно для лучей, выходящих под малыми углами θ_0 к градиенту диэлектрической проницаемости, поскольку они попадают в область малых значений $\varepsilon(y)$. Использование для оценок формулы для однородной среды (8) может привести к неправильному результату.

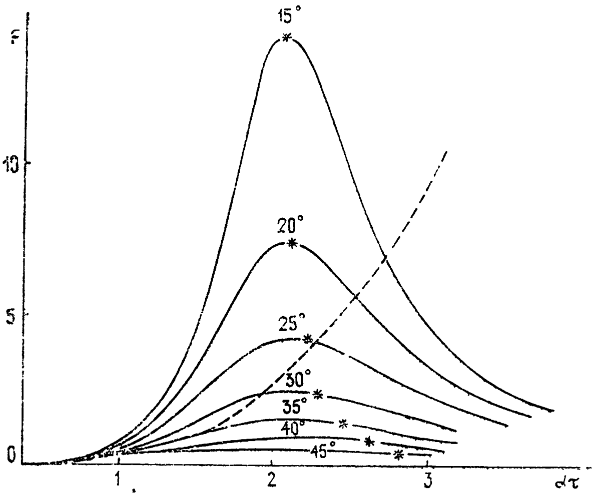

Рис. 1.

Из рассмотренных примеров следует, что в плавно неоднородной среде поведение среднего квадрата отклонений лучей определяется конкуренцией трех эффектов. Во-первых, это уменьшение диэлектрической проницаемости среды вдоль луча, приводящее к увеличению пространственного разноса лучей, вышедших из одной точки под углом друг к другу. Во-вторых, фокусирующее действие среды, приводящее к уменьшению роста $\overline{\sigma^2}(\tau)$ с расстоянием. В-третьих, изменение угла рассеяния одинаковыми по величине неоднородностями, расположенными в различных местах лучевой трассы, из-за изменения диэлектрической проницаемости окружающей среды. В результате совместного действия всех трех эффектов возникает специфическое для неоднородной среды поведение $\overline{\sigma^2}(\tau)$, зависимость которого от параметров задачи может быть рассчитана в малоугловом приближении по формуле (7).

2. Для иллюстрации эффектов, к которым может приводить обсуждавшееся выше поведение дисперсии флуктуаций поперечных смещений лучей, рассмотрим задачу о флуктуационном уширении гауссова волнового пучка, распространяющегося в плоском линейном слое диэлектрической проницаемости *(пример 3)*.

Как показано в [2, 3], в малоугловом приближении, зная распределение волнового поля в некотором сечении пучка в регулярной (т. е. без учета флуктуаций показателя преломления) задаче и дисперсию поперечных смещений луча в этом сечении, можно рассчитать распределение средней плотности энергии флуктуирующего излучения в этом сечении:

$$\overline{|U(n,\tau)|^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\sigma^2}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |U_0(\xi,\tau)|^2 \exp\left[-\frac{(n-\xi)^2}{2\overline{\sigma^2}(\tau)}\right] d\xi. \qquad (14)$$

Считая распределение невозмущенного квадрата поля гауссовым с полушириной a, $|U_0(n,\tau)|^2 = |U_0(0,\tau)|^2 \exp\left[-\frac{n^2}{2a^2(\tau)}\right]$, получаем из (14) следующее выражение для полуширины распределения средней плотности энергии флуктуирующего излучения*:

$$a^2_{фл} = a^2(\tau) + \overline{\sigma^2}(\tau). \qquad (15)$$

В регулярно неоднородной среде первоначально гауссов пучок с полушириной $a(\tau=0)=a_0$ остается гауссовым на протяжении всей трассы распространения, если выполнены условия безаберрационного приближения, которые для линейного слоя имеют вид [9]

$$(k_0 L)^{1/3} \ll k_0 a_0 \ll (k_0 L)^{2/3}, \qquad (16)$$

где L — величина порядка $1/\alpha$, зависящая, вообще говоря, от угла падения. В этом же приближении [9]

$$a^2(\tau) = a_0^2 \sigma_1^2 + \frac{4\sigma_2^2}{k_0^2 a_0^2}. \qquad (17)$$

На рис. 2 нанесены зависимости $a^2(\tau)$ (сплошная линия) и $\overline{\sigma^2}(\tau)$ (пунктирная линия) от безразмерной длины $\alpha\tau$ для следующих значений параметров: $k_0 a_0 = 30$, $\alpha a_0 = 3\cdot10^{-2}$, $\alpha l \doteq 10^{-2}$, $\overline{\nu^2} = 10^{-5}$, $\theta_0 = 30°$. Как видно из рис. 2, на начальном участке трассы ($\alpha\tau < 1{,}4$) флуктуационным уширением можно пренебречь. Затем существует интервал расстояний ($1{,}4 < \alpha\tau < 2{,}6$), где, в силу уменьшения регулярной ширины пучка $a^2(\tau)$ и быстрого роста $\overline{\sigma^2}$, эти величины сравниваются, после чего полная ширина пучка начинает определяться только флуктуационным слагаемым в (15). Наконец, достаточно далеко ($\alpha\tau \gg 2{,}6$) величина a^2 за-за сильной дифракционной расходимости начинает резко нарастать, а $\overline{\sigma^2}$, наоборот, в силу обсуждавшихся выше причин, уменьшаться. В результате на больших расстояниях ширина распределения

---

* Выражение (15) для статистически однородной среды было получено в работах [12, 13].

средней плотности энергии определяется регулярным слагаемым в (15) $a(\tau)$, хотя волновое поле, конечно, не становится при этом регулярным.

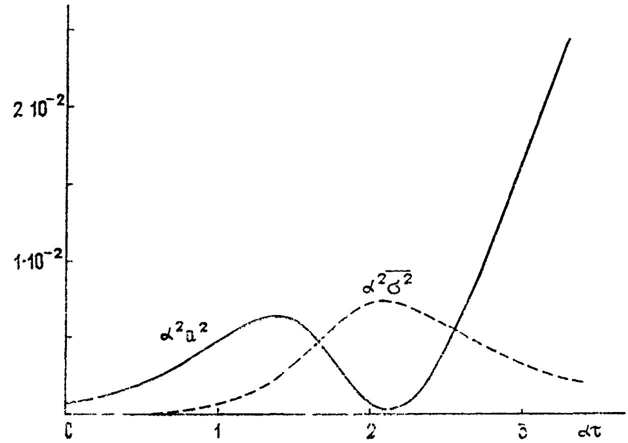

Рис. 2.

В заключение заметим, что если использованное в данной работе предположение о скалярности волнового поля не является определяющим, то двумерность исследуемой системы является принципиальной. В произвольной трехмерно неоднородной среде, где существенна не только кривизна, но и кручение лучей, порядок уравнения для поперечных смещений лучей повышается со второго до четвертого. Тем не менее, полученные здесь результаты применимы для довольно широкого класса реальных трехмерных систем, в которых лучи (регулярные) являются плоскими (или почти плоскими) кривыми. К таким системам относятся квазиплоские, квазицилиндрические и квазисферические слои типа, например, земной ионосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Баранов, Ю. А. Кравцов, Изв вузов — Радиофизика, **12**, № 10, 1500 (1969).
2. Г В. Пермитин, А А Фрайман, Изв вузов — Радиофизика, **12**, № 12, 1836 (1969)
3. А. А. Фрайман, Изв вузов — Радиофизика, **16**, № 8, 1235 (1973).
4. М А. Миллер, Г. В. Пермитин, А А. Фрайман, Изв. вузов — Радиофизика, **21**, № 11, 1603 (1978).
5. Л А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд АН СССР, М, 1958.
6. В И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М, 1967.
7. Л. А Чернов, Волны в случайно-неоднородных средах, изд. Наука, М., 1975.
8. В М. Бабич, В. С Булдырев, Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, изд Наука, М., 1972.
9. Г. В. Пермитин, Изв. вузов — Радиофизика, **16**, № 2, 254 (1973)
10. С. Н. Власов, С Н. Гурбатов, Изв. вузов — Радиофизика, **19**, № 8, 1149 (1976)
11. J M. Kelso, Radio Ray Propagation in the Ionosphere, Mc Graw-Hill, 1964.
12. Л. С Долин, Изв вузов — Радиофизика, **11**, № 6, 840 (1968); **9**, № 1, 61 (1966).
13. З. И. Фейзулин, Ю. А Кравцов, Изв. вузов — Радиофизика, **10**, № 1, 68 (1967).

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
23 января 1979 г.

DISPERSION OF TRANSVERSE SHIFTINGS OF GEOMETRICAL RAYS IN SMOOTHLY INHOMOGENEOUS MEDIA WITH FLUCTUATIONS OF THE REFRACTION INDEX

G. V. Permitin, A. A. Fraiman

A method of calculation is suggested for the dispersion of transverse shiftings of geometrical rays which is suitable for the smooth dependence of a medium average refraction index on the coordinates. Possibilities of the method is illustrated by different examples.

Аннотации депонированных статей

УДК 621.372.823

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СИММЕТРИЧНЫХ *E*-ВОЛН В КРУГЛОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ, ПОКРЫТОМ РЕЗИСТИВНОЙ ПЛЕНКОЙ

С. Б. Раевский

В статье приводятся результаты рассмотрения особенностей распространения симметричных E-волн в круглом диэлектрическом волноводе, покрытом резистивной пленкой. Описывается поведение решений дисперсионного уравнения в комплексной плоскости поперечных волновых чисел, приводятся дисперсионные характеристики и характеристики затухания. Определяются области существования поверхностных, вытекающих волн и несобственных волн Зоммерфельда Показывается, что общей особенностью симметричных волн в круглом диэлектрическом волноводе, покрытом резистивной пленкой, является расширение области существования замедленных несобственных волн (сужение области вытекающих волн) при увеличении проводимости пленки и уменьшении относительной диэлектрической проницаемости волновода

Статья депонирована в ВИНИТИ,
рег. № 93-80. Деп. от 7 января 1980 г.