ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 2 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 538.56 : 519.25

О СТАТИСТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

А. И. Саичев

Предлагается способ вычисления статистики отдельных собственных чисел одномерной случайно-неоднородной краевой задачи, основанный на сведении краевой задачи к задаче Коши и последующем использовании математического аппарата марковских процессов. В приближении дельта-коррелированных случайных неоднородностей выводится и в некоторых предельных случаях решается уравнение, определяющее вероятностные распределения отдельных собственных чисел и среднюю плотность собственных чисел. Указываются некоторые физические явления, при описании которых необходимо знать статистические характеристики отдельных собственных чисел случайно-неоднородной краевой задачи.

1. К необходимости исследования статистики уровней энергии, собственных чисел, мод в ограниченных случайно-неоднородных системах сводятся многие задачи статистической физики. Это, например, задача о статистике уровней энергии электрона в хаотических решетках [1, 2]. Сюда относится и задача распространения электромагнитных, внутренних и других волн в случайно-неоднородных волноводах. В общем случае неодномерных реальных систем с неодномерными случайными неоднородностями анализ статистики собственных чисел наталкивается на большие трудности. Однако в одномерных системах (одномерных хаотических решетках, прямоугольных волноводах с плоскослоистыми случайными неоднородностями) удается выработать алгоритм вычисления статистических характеристик собственных чисел, а для некоторых из них получить довольно простые аналитические выражения.

Математически типичная задача анализа статистики собственных чисел в одномерных системах сводится к исследованию собственных чисел краевой задачи, состоящей из уравнения

$$\varphi'' + \lambda\varphi = V(x)\varphi \tag{1}$$

и двухточечных граничных условий, которые, для определенности, зададим в следующем виде:

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0. \tag{2}$$

Входящая в (1) $V(x)$ — случайная функция, имеющая в каждой конкретной задаче определенный физический смысл. Для электрона в хаотической решетке $V(x)$ описывает хаотичность потенциала, для волн в случайно-неоднородных волноводах $V(x)$ описывает флуктуации показателя преломления и т. д.

Вследствие случайности $V(x)$ оказываются случайными и значения собственных чисел краевой задачи (1), (2) λ_n $(n=1, 2, \ldots;\ \lambda_{n+1} > \lambda_n)$. Полное статистическое описание собственных чисел дается, очевидно, всевозможными совместными вероятностными распределениями значений собственных чисел с различными номерами:

$$W_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) = \left\langle \prod_{j=1}^{k} \delta(\lambda_j - \lambda_{n_j}) \right\rangle.$$

Здесь λ_{n_j} — случайные значения собственных чисел с номерами n_j, а λ_j — переменные плотности вероятности. В большинстве физических приложений, однако, достаточно знать более простые статистические характеристики собственных чисел. Например, их одномерные плотности вероятности $W_n(\lambda; L) = \langle \delta(\lambda - \lambda_n) \rangle$ или еще менее подробную статистическую характеристику — плотность собственных чисел (см., например, [1, 2])

$$\beta(\lambda; L) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\lambda; L). \tag{3}$$

2. Приведем пример физических явлений, при расчете которых необходимо знать одномерные вероятностные распределения собственных чисел и, в то же время, совершенно не достаточно знания только плотности собственных чисел $\beta(\lambda; L)$. Рассмотрим, для определенности, задачу возбуждения волн частоты ω в плоском волноводе, направленном вдоль оси y и ограниченном плоскостями $x=0$, $x=L$. Пусть диэлектрическая проницаемость внутри волновода меняется по закону $\varepsilon = \varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}(x)$, где $\tilde{\varepsilon}(x)$ — флуктуационная часть диэлектрической проницаемости. Поле данной частоты внутри волновода представляет собой набор мод, каждая из которых представима в виде $E = \varphi(x) \exp(i\omega t + iky)$, где $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям (2) (для волны ТМ-типа). В данном случае

$$\lambda = \varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2, \quad V(x) = \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\varepsilon}(x).$$

Одним из наиболее важных практических вопросов работы волновода является вопрос о том, будет ли распространяться в волноводе волна данной частоты. Очевидно, волна частоты ω возбудится, если только $\lambda_1 < \lambda^*$, где $\lambda^* = \varepsilon_0 \omega^2 / c^2$. Наоборот, волны частоты ω не распространяются в волноводе, если выполняется обратное неравенство $\lambda_1 > \lambda^*$. Таким образом, важная физическая характеристика работы волновода — вероятность того, что на данной частоте в волноводе не возбуждается ни одной бегущей моды, выражается через $W_1(\lambda; L)$ и равна

$$P(0, \lambda^*; L) = \int_{\lambda^*}^{\infty} W_1(\lambda; L) d\lambda = 1 - \int_{-\infty}^{\lambda^*} W_1(\lambda; L) d\lambda. \tag{4}$$

Найдем теперь $P(n, \lambda^*; L)$ — вероятность того, что на данной частоте в волноводе распространяется ровно n мод. Очевидно, она равна вероятности того, что выполняются неравенства $\lambda_n < \lambda^*$, $\lambda_{n+1} > \lambda^*$. На языке плотностей вероятности это означает, что

$$\begin{gathered} P(n, \lambda^*; L) = \int_{-\infty}^{\lambda^*} d\lambda_1 \int_{\lambda^*}^{\infty} d\lambda_2 \, W_{n, n+1}(\lambda_1, \lambda_2; L) = \\ = \int_{-\infty}^{\lambda^*} W_n(\lambda_1) d\lambda_1 - \int_{-\infty}^{\lambda^*} \int_{-\infty}^{\lambda^*} W_{n, n+1}(\lambda_1, \lambda_2; L) d\lambda_1 d\lambda_2. \end{gathered} \tag{5}$$

По определению $\lambda_{n+1} > \lambda_n$, так что $W_{n, n+1}(\lambda_1, \lambda_2; L) \equiv 0$ как только $\lambda_1 > \lambda_2$. Учтя это свойство плотностей вероятности соседних собственных чисел, последний член в правой части равенства (5) можно переписать так:

$$\int_{-\infty}^{\lambda^*}\int_{-\infty}^{\lambda^*} W_{n,n+1}(\lambda_1, \lambda_2; L)d\lambda_1 d\lambda_2 = \int_{-\infty}^{\lambda^*} d\lambda_2 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} W_{n,n+1}(\lambda_1, \lambda_2; L)d\lambda_1 = \int_{-\infty}^{\lambda^*} W_{n+1}(\lambda_2; L)d\lambda_2.$$

Подставляя последнее равенство в (5), получим для вероятности возбуждения в волноводе ровно n мод частоты ω окончательное выражение:

$$P(n, \lambda^*; L) = \int_{-\infty}^{\lambda^*} W_n(\lambda; L)d\lambda - \int_{-\infty}^{\lambda^*} W_{n+1}(\lambda; L)d\lambda. \tag{6}$$

Как легко видеть, из (4), (6), $P(n, \lambda; L)$ удовлетворяет условию нормировки:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n, \lambda; L) \equiv 1.$$

Если нас не интересует детальная статистика числа мод, возбужденных в волноводе, а только среднее их число, то нам достаточно знания плотности собственных чисел $\beta(\lambda; L)$ (3). Действительно,

$$\langle N(\lambda^*; L)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} nP(n, \lambda^*; L) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\lambda^*} W_n(\lambda; L)d\lambda = L\int_{-\infty}^{\lambda^*} \beta(\lambda; L)d\lambda. \tag{7}$$

Но уже средний квадрат и дисперсию числа мод $\beta(\lambda; L)$ не определяет.

3. Перейдем к статистическому анализу собственных чисел стохастической краевой задачи (1), (2). Перед этим заметим, что для определения вероятностных распределений каждого отдельного уровня необходимо перейти от уравнения (1) к уравнениям для функций $\rho(x)$, $\theta(x)$, связанных с $\varphi(x)$ следующими равенствами: $\varphi = \rho \sin\theta$, $\varphi' = \nu\rho\cos\theta$ $(\nu > 0)$. Уравнения для ρ и φ имеют вид

$$(\ln \rho)'_x = \frac{1}{2}\left[\nu - \frac{\lambda}{\nu} + \frac{1}{\nu}V(x)\right]\sin 2\theta; \tag{8а}$$

$$\theta'_x = \frac{1}{2}\left(\nu + \frac{\lambda}{\nu}\right) + \frac{1}{2}\left(\nu - \frac{\lambda}{\nu}\right)\cos 2\theta - \frac{1}{\nu}V(x)\sin^2\theta. \tag{8б}$$

Пусть $\theta(x, \lambda)$ — решение уравнения (8б) с граничным условием

$$\theta(0, \lambda) = 0, \tag{9}$$

обеспечивающим автоматическое выполнение первого из граничных условий (2) $\varphi(0) = 0$. Второе граничное условие (2) $\varphi(L) = 0$ выполняется, если $\theta(L, \lambda) = \pi n$. Покажем, что последнее равенство удовлетворяется при $\lambda = \lambda_n$, где λ_n — n-е собственное число краевой задачи (1), (2). По определению, λ_n — искомое n-е собственное число, если соответствующее ему решение уравнения (1) $\varphi(x) = \rho(x)\sin\theta(x, \lambda_n)$ удовлетворяет условиям (2) и $n+1$ раз обращается в нуль в интервале $x \in [0, L]$. Как видно из уравнения (8а), $\rho > 0$. Поэтому, чтобы $\varphi(x)$ удовлетворяла перечисленным условиям, необходимо и достаточно, чтобы $\theta(x, \lambda)$ удовлетворяла условию (9), равенству $\theta(L, \lambda) = \pi, n$ и при изменении x от 0 до L один и только один раз пересекала каждый из уровней πk, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Из уравнения (8б) видно, что $\theta'_x(x, \lambda)|_{\theta=\pi k} = \nu > 0$, чем доказывается справедливость последнего свойства $\theta(x, \lambda)$. Таким образом, корнем уравнения $\theta(L, \lambda) = \pi n$ действительно является λ_n — n-е собственное число краевой задачи (1), (2). Очевидно, вероятностное распределение λ_n равно

$$W_n(\lambda; L) = \langle \delta(\lambda - \lambda_n) \rangle = \langle \theta'_\lambda(L, \lambda) \delta[\theta(L, \lambda) - \pi n] \rangle. \quad (10)$$

Здесь учтено, что, как следует из (8б), $\theta'_\lambda > 0$. Введем еще обычное вероятностное распределение решений уравнения (8б) вместе с (9):

$$f(\theta; x, \lambda) = \langle \delta[\theta - \theta(x, \lambda)] \rangle.$$

Дифференцируя это равенство по λ, интегрируя по θ и сопоставляя полученное выражение при $x = L$ с правой частью (10), получим формулу

$$W_n(\lambda; L) = -\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-\infty}^{\pi n} f(\theta; L, \lambda) d\theta, \quad (11)$$

выражающую вероятностное распределение значений n-го собственного числа краевой задачи (1), (2) через вероятностное распределение $\theta(x, \lambda)$ при $x = L$. Если аппроксимировать $V(x)$ — гауссовой дельта-коррелированной функцией, то случайная функция $\theta(x, \lambda)$, удовлетворяющая стохастическому уравнению (8б) с дельта-коррелированным процессом в правой части и граничному условию Коши (9), будет марковским процессом вдоль оси x, а значит $f(\theta; L, \lambda)$ будет удовлетворять уравнению ЭФПК.

Заметим, что если $V(x)$ — пуассоновский дельта-коррелированный процесс, то $f(\theta; L, \lambda)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Колмогорова — Феллера. Если же $V(x)$ — марковский процесс, то $V(x)$, $\theta(x, \lambda)$ образует марковскую двумерную совокупность, и для совместной плотности вероятности V, θ также удается записать уравнение ЭФПК. Во всех этих случаях вычисление вероятностных распределений собственных чисел сведется, согласно (11), к решению соответствующих уравнений типа ЭФПК.

Отметим еще, что формулу (11) нетрудно обобщить на случай совместных вероятностных распределений разных собственных чисел, определяющих, например, статистику числа мод, возбужденных в заданном интервале волновых чисел $k \in [k_1, k_2]$, а также на случай более общих, чем (2), краевых условий.

4. В дальнейшем, для простоты, будем полагать, что $V(x)$ — гауссова дельта-коррелированная случайная функция

$$\langle V(x) V(x') \rangle = 2D\delta(x - x').$$

Соответственно, вероятностное распределение $\theta(x, \lambda)$ — $f(\theta; x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению ЭФПК. Перед тем как записать его, заметим, что $W_n(\lambda; L)$, очевидно, не зависит от вспомогательного параметра ν, значение которого можно выбирать из соображений удобства. Поэтому, полагая для определенности $\lambda > 0$ и выбрав $\nu = \sqrt{\lambda}$, запишем уравнение ЭФПК относительно f в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \sqrt{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{D}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^2 \theta f \right\}, \quad f(\theta; 0, \lambda) = \delta(\theta). \quad (12)$$

Из (12) и (11) в данном случае следует еще одно полезное равенство, выражающее $W_n(\lambda;\ L)$ через решение уравнения (12):

$$W_n(\lambda;\ L) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{\lambda}\int\limits_0^L f(\pi n;\ x,\ \lambda)dx\right]. \tag{13}$$

5. Решение уравнения (12) в общем случае неизвестно. Однако в некоторых предельных случаях удается решить его и сделать некоторые заключения о статистике собственных чисел. Например, при достаточно больших λ $(\lambda^{3/2}/D \gg 1)$ можно перейти от уравнения (12) к усредненному по периоду $\pi/\sqrt{\lambda}$ уравнению (см., например, [3]). Решив усредненное уравнение и подставив его решение в (13), будем иметь

$$W_n(\lambda;\ L) = \sqrt{\frac{L}{3\pi D}}\exp\left[-\frac{L}{3D}(\lambda-\lambda_{n0})^2\right], \quad \lambda_{n0} = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2. \tag{14}$$

Обсудим следующее из (14) и (3) выражение для плотности собственных чисел при $\lambda^{3/2}/D \gg 1$:

$$\beta(\lambda;\ L) = \frac{1}{\sqrt{3\pi DL}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{L}{3D}(\lambda-\lambda_{n0})^2\right]. \tag{15}$$

Перед этим заметим, что метод нахождения плотности собственных чисел $\beta(\lambda;\ L)$, предложенный в [1, 2], позволил вычислить лишь $\beta_\infty(\lambda) = \beta(\lambda;\ \infty)$ [2]. В частности, из результатов работы [2] следует, что при $\lambda^{3/2}/D \gg 1$

$$\beta_\infty(\lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}}. \tag{16}$$

Одно из преимуществ статистического анализа вероятностных распределений каждого отдельного собственного числа, предложенного в данной работе, состоит в том, что удается детально проследить характер стремления $\beta(\lambda;\ L)$ при увеличении L к предельному закону (16). Так, из (15) нетрудно видеть, что при $\lambda \ll DL$ расстояния между центрами распределений $W_n(\lambda;\ L)$ $\lambda_{n0} = \left(\dfrac{\pi n}{L}\right)^2$ много меньше стандарта этих распределений $\sqrt{3D/2L}$ и сумма (15) представляет собой плавную функцию λ, равную (16). В противном случае $\lambda \gg DL$ вероятностные распределения соседних собственных чисел практически не перекрываются, и плотность собственных чисел $\beta(\lambda;\ L)$ представляет собой дискретный ряд гауссовых пиков одинаковой амплитуды. При $L \to \infty$ граница областей плавного и дискретного изменения $\beta(\lambda;\ L)$ уходит в бесконечность и $\beta(\lambda;\ L\to\infty)$ при любых $\lambda > D^{2/3}$ совпадает с (16).

6. Покажем еще, что предложенный в данной работе метод анализа статистики собственных чисел позволяет вычислить и найденную в [2] при любых λ предельную плотность собственных чисел $\beta_\infty(\lambda)$. Для этого заметим, что, согласно (3), (13), плотность собственных чисел можно записать в виде

$$\beta(\lambda;\ L) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{\lambda}\,\frac{1}{L}\int\limits_0^L \Phi(0;\ x,\ \lambda)dx\right], \tag{17}$$

где $\Phi(\theta;\ x,\ \lambda)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(\theta+\pi n;\ x,\ \lambda)$. При выводе формулы (17) учтено, что $f(\theta;\ x,\ \lambda)=0$ при $\theta\leqslant 0$. Очевидно, $\Phi(\theta;\ L,\ \lambda)$ удовлетворяет уравнению (12), условию нормировки

$$\int\limits_0^\pi \Phi(\theta;\ L,\ \lambda)d\theta=1$$

и периодическим граничным условиям

$$\Phi(0;\ L,\ \lambda)=\Phi(\pi;\ L,\ \lambda). \tag{18}$$

При $L\to\infty$ $\beta(\lambda;\ L)$ перестает зависеть от L, и формула (17) переходит в

$$\beta_\infty(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\left[\sqrt{\lambda}\,\Phi_\infty(0;\ \lambda)\right], \tag{19}$$

где $\Phi_\infty(\theta;\ \lambda)$ удовлетворяет следующему из (12) уравнению:

$$\frac{d\Phi_\infty}{d\theta}=\frac{D}{\lambda^{3/2}}\frac{d}{d\theta}\left\{\sin^2\theta\frac{d}{d\theta}\left[\sin^2\theta\Phi_\infty\right]\right\}, \tag{20}$$

условию нормировки и граничному условию (18). Решение уравнения (20) нетрудно найти. Подставляя его в (19), получим плотность собственных чисел, ранее найденную в [2]. В частности, формула (16) следует из (19), (20) как следствие нулевого приближения решения уравнения (20) методом последовательных приближений по малому параметру $\mu=D/\lambda^{3/2}\ll 1$: $\Phi_\infty^0=1/\pi$. Действительно, подставив Φ_∞^0 в (19), получим выражение (16) для плотности собственных чисел.

Отметим в заключение, что при $L\gg 1/\sqrt[3]{D}$ мы получим правильное выражение для $\beta(\lambda;\ L)$, сшивая найденную в [2] предельную плотность собственных чисел $\beta_\infty(\lambda)$ при $\lambda<DL$ с плотностью собственных чисел (15) при $\lambda>DL$.

Автор благодарен А. Н. Малахову и Б. С. Абрамовичу за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1 H. L. Frish, S. P. Lloyd, Phys. Rev., **120**, 1175 (1960).
2. B. I. Halperin, Phys Rev., **139**, 104 (1965).
3 В И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 29 июня 1978 г.

STATISTICS OF PROPER NUMBERS IN ONE-DIMENSIONAL RANDOMLY INHOMOGENEOUS BOUNDARY PROBLEM

A. I Saichev

A method is proposed for calculating reduction the statistics of separate proper numbers of one-dimensional randomly inhomogeneous boundary problem, based on reduction of a boundary problem to Cauchy problem and the following use of the mathematics of Markov processes In the approximation of delta-correlated random inhomogeneities an equation is derived and solved in some cases which define the probable distribution of separate proper numbers and the mean density of proper numbers Some physical phenomena are specified in description of which it is necessary to know statistical characteristics of separate proper numbers of a randomly inhomogeneous boundary problem