ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 2 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 538.56 : 539.12

ЧЕРЕНКОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ГОРИЗОНТАЛЬНО ДВИЖУЩИМИСЯ ИСТОЧНИКАМИ. I

В. Д. Липовский

Получены кинематические условия излучения при равномерном горизонтальном движении источника акустико-гравитационных волн. Указано на особенности излучения в области с «отрицательной» групповой скоростью Методом реакции излучения вычислено распределение интенсивности по частоте и углу в пространстве поперечных волновых чисел для произвольного источника массы. В качестве примера детально исследовано сверхзвуковое движение источника, распределенного по Гауссу.

Отдельные вопросы, связанные с темой работы, рассматривались, например, в [1–5]. Наше исследование посвящено малоизученным аспектам явления — классификации типов излучения, определению кинематических (интерференционных) условий, вычислению интенсивности излучения. Оценка последней не только представляет самостоятельный интерес, но и полезна при постановке задачи о рассеянии электромагнитных волн на ионосферных неоднородностях, создаваемых движущимися источниками акустико-гравитационных волн (АГВ).

1. Малые колебания изотермической атмосферы описываются следующей системой линеаризованных гидродинамических уравнений [6]:

$$\partial \rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho_0 \boldsymbol{v}) = q(\boldsymbol{r}, t), \quad \nabla p_0 = \rho_0 \boldsymbol{g},$$
$$\rho_0\, \partial \boldsymbol{v}/\partial t + \nabla p - \rho \boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}, t), \quad p_0/p_{00} = \rho_0/\rho_{00} = \exp(-z/H), \quad (1)$$
$$\partial p/\partial t + (\boldsymbol{v}, \nabla p_0) - c_s^2[\partial \rho/\partial t + (\boldsymbol{v}, \nabla \rho_0)] = (\gamma - 1) h(\boldsymbol{r}, t),$$

где $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{v}$ — скорость, p и ρ — отклонения давления и плотности от равновесных значений p_0 и ρ_0, возникающие под действием источников массы q, импульса $\boldsymbol{f}$ и энергии h, γ — отношение удельных теплоемкостей, $c_s = (\gamma g H)^{1/2}$ — скорость звука, H — высота изотермической атмосферы, $\boldsymbol{g}$ — ускорение силы тяжести. Нами выбрана декартова система координат с осью z, направленной против силы тяжести, причем высота отсчитывается от произвольно выбранного уровня $z=0$, а ρ_{00} и p_{00} — невозмущенные плотность и давление на этом уровне. Из (1) следует уравнение для величины $P = p \exp(k_0 z)$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Box - \frac{\omega_a^2}{c_s^2}\right) + \omega_b^2 \Delta_2\right] P = - e^{k_0 z} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_b^2\right)\left(\frac{\partial q}{\partial t} - \operatorname{div} f\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega_b^2}{g^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - g\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial t} - g f_z\right)\right], \quad (2)$$

где $\Box = \Delta - c_s^{-2}\, \partial^2/\partial t^2$, $\Delta_2 = \Delta - \partial^2/\partial z^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $\omega_a = c_s/2H$ —

частота отсечки акустических волн, $\omega_b = (\gamma - 1)^{1/2} g/c_s$ — частота Брента — Вяисяля, $k_0 = 1/2H$ — обратная длина дисперсии.

Приведем закон сохранения для системы (1) — после обычных преобразований имеем

$$\frac{d}{dt}\int\left[\frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{p^2}{2\rho_0 c_s^2} + \frac{(p - c_s^2\rho)^2}{2(\gamma - 1)\rho_0 c_s^2}\right] d^3 r + \int p\, \boldsymbol{v}\, d\Sigma = \\ = \int\left[\frac{pq}{\rho_0} + \boldsymbol{f}\boldsymbol{v} + (\gamma - 1)\frac{ph}{\rho_0 c_s^2} + (p - c_s^2\rho)\frac{h}{\rho_0 c_s^2}\right] d^3\boldsymbol{r}, \tag{3}$$

где $d\Sigma$ — элемент поверхности, окружающий рассматриваемый объем. Уравнение (3) с правой частью, равной нулю, является известным законом сохранения для АГВ в отсутствие внешних источников [7]. Величина, стоящая в правой части (3), характеризует работу источников против индуцируемых ими полей (работу силы радиационного трения).

2. Выясним кинематические условия излучения АГВ горизонтально движущимся источником, т. е. найдем совместные решения уравнений

$$L(\boldsymbol{k}, \omega) = \omega^4 - (c_s^2 k^2 + \omega_a^2)\omega^2 + c_s^2\omega_b^2(k^2 - k_z^2) = 0, \\ \omega = \boldsymbol{k}\boldsymbol{V}_0 = k_x V_0. \tag{4}$$

В (4) $L(\boldsymbol{k}, \omega)$ пропорционально фурье-образу дифференциального оператора в левой части (2), V_0 — скорость движения источника. Введем в $\boldsymbol{k}$-пространстве сферическую систему координат:

$$k_x = k\cos\vartheta, \quad k_y = k\sin\vartheta\cos\chi, \quad k_z = k\sin\vartheta\sin\chi.$$

Из системы (4) следует эквивалентное ей интерференционное условие — уравнение для определения черенковского угла

$$\cos^2\vartheta = n^{-2}(\omega, \vartheta, \chi) M^{-2}, \tag{5}$$

где $M = V_0/c_s$ — число Маха, $n = c_s k/\omega$ — показатель преломления. В безграничной изотермической атмосфере существуют две ветви волн: акустические при $\omega > \omega_a$ и гравитационные при $\omega < \omega_b$. Для $1 < \gamma < 2$ выполняется неравенство $\omega_a > \omega_b$, и в интервале между этими частотами находится полоса непропускания. Показатель преломления АГВ определяется первым уравнением (4):

$$n^2(\omega, \vartheta, \chi) = (\omega^2 - \omega_a^2)/[\omega^2 - \omega_b^2(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\cos^2\chi)]. \tag{6}$$

Анализ (5) и (6) показывает, что следует различать три области значений числа Маха: 1) $M > 1$, 2) $\omega_b/\omega_a < M < 1$ и 3) $M < \omega_b/\omega_a$. Для воздуха $\gamma = 1{,}4$ и $\omega_b/\omega_a \approx 0{,}90$. Будем обозначать величины, относящиеся к этим областям, соответственно индексами $j = 1, 2, 3$. Выражение для черенковского угла имеет вид

$$\cos^2\vartheta_j = (1 + k_j^2 V_0^2/\omega^2)^{-1}, \tag{7}$$

где величины k_j^2 будут определены ниже. При $M > 1$

$$k_1^2(\omega, \chi) = \omega^2(\omega^2 - \Omega_0^2)/[\alpha^2 V_0^2(\omega^2 - \omega_c^2)] > 0, \tag{8}$$

где $\alpha^2 = (M^2 - 1)^{-1}$, $\Omega^2 = \alpha^2(M^2\omega_a^2 - \omega_b^2)$, а $\omega_c = \omega_b\cos\chi$. При $\omega > \Omega_0$ имеет место черенковское излучение акустической ветви АГВ, причем из (7) и (8) следует, что конус излучения является некруговым. Пороговая частота Ω_0 является монотонно убывающей функцией числа Маха, при M, близких к 1, она неограниченно возрастает, а при $M \gg 1$ стремится к ω_a. Черенковский угол для гравитационной ветви при $M > 1$ также определяется (7) и (8), но здесь $\omega < |\omega_c| < \omega_b$. Порог излучения по скорости в этом случае отсутствует, а волновые фронты являются участками некруговой конической поверхности. Если $\omega_b/\omega_a < M < 1$, то излучение акустических волн отсутствует, а условие излучения гравитационных волн имеет вид (7) с

$$k_2^2(\omega, \chi) = \omega^2(\omega^2 + \Gamma_0^2)/[\beta^2 V_0^2(\omega_c^2 - \omega^2)] > 0, \tag{9}$$

где $\beta^2 = (1 - M^2)^{-1}$, $\Gamma_0^2 = \beta^2(M^2\omega_a^2 - \omega_b^2)$. Свойства излучения гравитационной ветви здесь такие же, как и при $M > 1$. При $M < \omega_b/\omega_a$ излучаются только гравитационные волны, причем

$$k_3^2(\omega, \chi) = \omega^2(\omega^2 - \omega_0^2)/[\beta^2 V_0^2(\omega_c^2 - \omega^2)] > 0. \tag{10}$$

В (10) частота $\omega_0 = \beta(\omega_b^2 - M^2\omega_a^2)^{1/2}$ является монотонно убывающей функцией числа Маха, при $M = 0$ $\omega_0 = \omega_b$ и при $M = \omega_b/\omega_a$ $\omega_0 = 0$. В рассматриваемом диапазоне скоростей выполняется неравенство $\omega_0 < \omega_b$ и излучение существует при $\min(\omega_0, |\omega_c|) < \omega < \max(\omega_0, |\omega_c|)$, т. е. геометрия волновых фронтов является довольно сложной. Более детальный анализ этого случая будет дан ниже, при изучении особенностей излучения.

3. Одной из интересных особенностей черенковского излучения в анизотропных средах является существование спектрально-угловых областей с «отрицательной» групповой скоростью: в них проекции волнового вектора и групповой скорости, перпендикулярные направлению движения, имеют разные знаки [8]. Если при этом среда находится в основном состоянии (отсутствуют волны с отрицательной энергией), то поток энергии в волновой зоне направлен от источника (принцип Мандельштама), причем отвод энергии осуществляется опережающими потенциалами [9]. Оказывается, эта особенность имеет место для черенковского излучения гравитационной ветви АГВ.

Выпишем выражение для фазовых скоростей АГВ*

$$\begin{aligned} u_x &= \omega k_x/k^2 = (c_s^2/n^2)(k_x/\omega), \\ u_\perp &= \omega k_\perp/k^2 = (c_s^2/n^2)(k_x/\omega), \end{aligned} \tag{11}$$

где n^2 имеет вид (6), а $\boldsymbol{k}_\perp = (k_y, k_z)$. Групповые скорости для АГВ определяются формулами

$$w_x = \frac{c_s^2(\omega^2 - \omega_b^2)k_x}{(2\omega^2 - c_s^2k^2 - \omega_a^2)\,\omega}, \quad w_\perp = \frac{c_s^2(\omega^2 - \omega_c^2)k_\perp}{(2\omega^2 - c_s^2k^2 - \omega_a^2)\,\omega}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следуют знаковые соотношения:

$$\operatorname{sgn}(u_\perp w_\perp) = \operatorname{sgn}[(2\omega^2 - c_s^2k^2 - \omega_a^2)(\omega^2 - \omega_c^2)]; \tag{13}$$

$$\operatorname{sig}(u_x w_x) = \operatorname{sgn}[(2\omega^2 - c_s^2k^2 - \omega_a^2)(\omega^2 - \omega_b^2)]. \tag{14}$$

---

* Напомним, что везде при анализе дисперсионного уравнения мы считаем $\omega > 0$ (излучение энергии источником) в отличие от ситуации при вычислении интенсивности, где отрицательно-частотная часть в интегралах Фурье необходима для вещественности полей.

Положив $\omega = \boldsymbol{k}\boldsymbol{V}_0$ в правой части (13), мы получим правило выбора решений (2). Соотношение (14) при $\omega = \boldsymbol{k}\boldsymbol{V}_0$ позволяет определить направленность потока энергии по отношению к движению излучателя. Эти подстановки и последующий анализ показывают, что для всех режимов движения ($j = 1, 2, 3$)

$$\begin{gathered} \operatorname{sgn}(u_{\perp j} w_{\perp j}) = \operatorname{sgn} f_j(\omega, \chi), \\ \operatorname{sgn}(u_{xj} w_{xj}) = \operatorname{sgn}[f_j(\omega, \chi) g_j(\omega, \chi)], \\ f_j(\omega, \chi) = g_j(\omega, \chi) + h_j(\omega, \chi), \end{gathered} \tag{15}$$

причем в интересующих нас областях $k_j^2 > 0$ справедливы равенства

$$\operatorname{sgn} h_j = \operatorname{sgn} g_j = \operatorname{sgn}(\partial k_j^2/\partial \omega). \tag{16}$$

Приведем для определенности явный вид функций g_j и h_j, входящих в (15), (16), при $M < \omega_b/\omega_a$ ($j = 3$):

$$h_3 = -\omega^4 + 2\omega^2\omega_c^2 - \omega_0^2\omega_c^2, \quad g_3 = \beta^2(\omega_b^2 - \omega^2)(\omega_c^2 - \omega^2).$$

Напомним, что в этом случае излучение существует при $k_3^2 > 0$, т. е. при $\min(\omega_0, |\omega_c|) < \omega < \max(\omega_0, |\omega_c|)$. Если $|\cos\chi| < \omega_0/\omega_b$, то $h_3 < 0$ и из (15) и (16) следует, что решение (2) в спектрально-угловой области $|\omega_c| < \omega < \omega_0$ имеет вид опережающих потенциалов. При $\omega_0 < \omega < |\omega_c|$ полином $h_3 > 0$, т. е. решение (2) выражается через запаздывающие потенциалы. Анализ других диапазонов скоростей производится совершенно аналогично, причем отмеченная выше экзотика (опережающие потенциалы и, следовательно, направленный вперед конус излучения) не наблюдается.

Другая возможная особенность черенковского излучения в анизотропных средах состоит в том, что энергия может излучаться под тупым углом к направлению движения. Из (15) и (16) следует, что энергия для обеих ветвей АГВ и любой скорости движения всегда излучается под острым углом (ср. с [8]).

4. Вычислим интенсивность излучения АГВ горизонтально движущимся излучателем, причем ограничимся источником массы $q = q(x - V_0 t, \boldsymbol{r}_\perp)$, где $\boldsymbol{r}_\perp = (y, z)$. Интенсивность имеет вид

$$I = \int d^3 r p q/\rho_0 = \rho_{00}^{-1} \int d^3 r\, P q \exp(k_0 z). \tag{17}$$

Перейдя к фурье-представлению в (2) и (17) и выполнив стандартные преобразования, получим

$$I_j = \frac{1}{\rho_{00} V_0} \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \omega(\omega^2 - \omega_b^2) \operatorname{Im} \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{|F(\omega, \boldsymbol{k}_\perp)|^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)(k_\perp^2 - k_j^2)}. \tag{18}$$

В (19) индекс $j = 1, 2, 3$, как и ранее, отмечает различные диапазоны скоростей движения, величины k_j^2 определены в (8)—(10), а $F(\omega, \boldsymbol{k}_\top)$ — формфактор источника:

$$F(\omega, \boldsymbol{k}_\perp) = \int d^2 r_\perp dx\, q(x, \boldsymbol{r}_\perp) \exp(-i\omega x/V_0 - i\boldsymbol{k}_\perp \boldsymbol{r}_\perp + k_0 z). \tag{19}$$

Очевидно, что внутренний интеграл в (18) становится комплексным при $k_j^2 > 0$, что соответствует условиям излучения (8)—(10). Для определения его мнимой части воспользуемся условием излучения в форме принципа причинности (согласно терминологии [9]), т. е. произведем замену в k_j^2 вида $\omega \to \omega + i\varepsilon$, где $\varepsilon \to 0$. При этом

$$k_j^2(\omega,\ \chi) \to k_j^2(\omega + i\varepsilon,\ \chi) = k_j^2(\omega,\ \chi) + i\varepsilon\partial k_j^2/\partial\omega. \tag{20}$$

Учитывая (18), (20) и известную модификацию формулы Сохоцкого

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{x - i\xi\varepsilon} = P\frac{1}{x} + i\pi\,\mathrm{sgn}\,(\xi)\,\delta(x),$$

получим распределение интенсивности черенковского излучения АГВ по частоте и углу в $\boldsymbol{k}_\perp$-пространстве для произвольного горизонтально движущегося источника массы

$$I_j = \frac{1}{8\pi^2\rho_{00}V_0}\int d\omega\, d\chi\, \frac{\omega^2 - \omega_b^2}{\omega^2 - \omega_c^2}\,\omega\,\mathrm{sgn}\,(\partial k_j^2/\partial\omega) \times \\ \times\, \theta(\omega)\theta(k_j^2)\,|\,F(\omega,\ k_j,\ \chi)\,|^2, \tag{21}$$

где $\theta(x)$ — функция Хэвисайда. Разумеется, при выводе (21) мы ограничивались источниками $q(x,\ \boldsymbol{r}_\perp)$, обеспечивающими существование интегралов (18) и (19). Фигурирующая в (21) знаковая функция дает положительность работы силы радиационного трения и в то же время согласно (16) определяет выбор решений (2). Таким образом, в данной задаче прослеживается эквивалентность принципа причинности и принципа Мандельштама, доказанная в общем случае в [9].

Для точечного источника интенсивность излучения расходится, т. е. необходимо обрезание интеграла (21) в областях, где рассматриваемая теория становится неприменимой. Рассмотрим, например, излучение акустической ветви АГВ и положим $q = q_0\delta(x - V_0 t)\,\delta(\boldsymbol{r}_\perp)$ (q_0 — расход массы в единицу времени), тогда $F = q_0$ и

$$I_{1,a} = \frac{q_0^2}{8\pi^2\rho_{00}V_0}\int\limits_{\Omega_0}^{\omega_{\max}} d\omega\,\omega(\omega^2 - \omega_b^2)\int\limits_0^\pi \frac{d\chi}{\omega^2 - \omega_b^2\cos^2\chi} = \\ = \frac{q_0^2}{8\pi\rho_{00}V_0}\left[\omega(\omega^2 - \omega_b^2)^{1/2} - \omega_b^2\ln\left|\,\omega/\omega_b + (\omega^2/\omega_b^2 - 1)^{1/2}\right|\right]\Bigg|_{\Omega_0}^{\omega_{\max}}, \tag{22}$$

где $\omega_{\max}$ — частота обрезания спектра. Эта расходимость ($\sim\omega^2$ при $\omega\to\infty$) соответствует ультразвуковой «катастрофе» и не является специфически необходимой для АГВ: она существует и для обычного звука [10]. «Катастрофа» в гравитационной ветви возникает при $\omega\to\omega_c$ и носит полюсный характер, что присуще анизотропным средам, имеющим резонансное направление. Из (21) при $F = q_0$ следует, что в этом случае интенсивность расходится логарифмически. Оба рассмотренных типа расходимостей связаны с когерентным взаимодействием волны с точечным источником — уменьшение взаимодействия возможно путем учета, например, вязких потерь либо учетом конечных размеров излучателя [6, 11, 12]. Мы будем считать, что характерный масштаб распределения источника превосходит длину свободного пробега — тогда работает второй из указанных выше механизмов обрезания спектра. При этом для источника малых размеров зависимость интенсивности от характерных масштабов излучателя будет универсальной с точностью до численных коэффициентов порядка единицы, зависящих от конкретного закона «размазывания» взаимодействия.

5. Рассмотрим в качестве примера гауссово распределение источника массы

$$q(x-V_0 t,\ \boldsymbol{r}_\perp)=\frac{q_0}{\pi^{3/2}a^2 b}\exp[-r_\perp^2/a^2-(x-V_0 t)^2/b^2], \tag{23}$$

где q_0 — расход массы, а a и b — пространственные масштабы распределения источника. Величина $|F|^2$ из (18), соответствующая выражению (23), имеет вид

$$|F(\omega,\ \boldsymbol{k}_\perp)|^2=q_0^2\exp\left[-\frac{1}{2}(k_\perp^2 a^2-k_0^2 a^2+\omega^2 b^2/V_0^2)\right]. \tag{24}$$

Подставив (24) в (21) с заменой $k_\perp^2$ на $k_j^2(\omega,\ \chi)$ и выполнив интегрирование по углу [13], получим спектральное распределение интенсивности излучения. При $M>1$ полная интенсивность акустической ветви АГВ определяется формулой

$$\begin{aligned} I_{1,a}&=\frac{q_0^2}{4\pi\rho_{00}V_0}\exp(k_0^2 a^2/2)\int\limits_{\Omega_0}^{\infty}d\omega(\omega^2-\omega_b^2)^{1/2}I_0\times\\ &\times\left[\frac{\omega_b^2 a^2(\omega^2-\Omega_0^2)}{4V_0^2\alpha^2(\omega^2-\omega_b^2)}\right]\exp\left[-\frac{\omega^2 b^2}{2V_0^2}-\frac{a^2(\omega^2-\Omega_0^2)(2\omega^2-\omega_b^2)}{4V_0^2\alpha^2(\omega^2-\omega_b^2)}\right], \end{aligned} \tag{25}$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя. Полная интенсивность гравитационных волн в этом же диапазоне скоростей имеет вид

$$\begin{aligned} I_{1,g}&=\frac{q_0^2}{4\pi^2\rho_{00}V_0}\exp(k_0^2 a^2/2)\int\limits_{0}^{\omega_b}d\omega(\omega_b^2-\omega^2)^{1/2}K_0\times\\ &\times\left[\frac{\omega_b^2 a^2(\Omega_0^2-\omega^2)}{4V_0^2\alpha^2(\omega_b^2-\omega^2)}\right]\exp\left[-\frac{\omega^2 b^2}{2V_0^2}-\frac{a^2(\Omega_0^2-\omega^2)(2\omega^2-\omega_b^2)}{4V_0^2\alpha^2(\omega_b^2-\omega^2)}\right], \end{aligned} \tag{26}$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда. Интенсивность излучения гравитационных волн при $\omega_b/\omega_a<M<1$ функционально имеет вид выражения (26) с заменой $(\Omega_0^2-\omega^2)\alpha^{-2}$ на $(\omega^2+\Gamma_0^2)\beta^{-2}$ в аргументе цилиндрической функции и в соответствующем члене в экспоненте. И, наконец, при $M<\omega_b/\omega_a$ интенсивность гравитационной ветви также определяется формулой (26), если в ней заменить

$$(\Omega_0^2-\omega^2)\alpha^{-2}\quad\text{на}\quad|\omega-\omega_0^2|\,\beta^{-2}.$$

Интегралы (25) и (26) точно не вычисляются, поэтому выделим параметр, по которому можно произвести их разложение. Ограничимся случаем сверхзвукового движения (индекс $j=1$ в дальнейшем опускаем), тогда таким параметром является

$$\sigma=\Omega_0^2/\omega_b^2-1\doteq\frac{M^2\delta^2}{(M^2-1)(1-\delta^2)},$$

где величина $\delta^2=1-\omega_b^2/\omega_a^2$ характеризует относительную ширину полосы непропускания изотермической атмосферы. Для воздуха $\gamma=1,4$, $\delta^2=(2-\gamma)^2/\gamma^2\approx0{,}20$, и при $M\gg1$ параметр $\sigma\approx0{,}25$. Впрочем такое значение он принимает уже при $M=3$, т. е. при числах Маха, не близких к единице, удобно разлагать (25) и (26) по возрастающим степеням σ*. Выпишем соответствующее разложение для интенсивности акустических волн:

* Эта же величина может использоваться в качестве параметра разложения при $M\ll1$.

$$I_a = \frac{q_0^2 \omega_b^2}{16\pi^{1/2} \rho_{00} V_0} \exp(k_0^2 a^2/2 + \sigma\lambda - \nu) \sum_{m=0}^{\infty} c_m(\lambda, \mu)\sigma^m,$$

$$c_m = (-1)^m (1 - 2m)(m!)^{-2} \lambda^m \nu^{m-1} \Phi(1/2, m+1; \lambda)\Psi(1/2, m; \nu), \quad (27)$$

$$\lambda = k_0^2 a^2 (1 - \delta^2)(M^2 - 1)/2M^2, \quad \mu = k_0^2 b^2 (1 - \delta^2)/2M^2,$$

$$\nu = \lambda + \mu.$$

В формулах (27) Φ и Ψ — вырожденные гипергеометрические функции. Техника получения (27) приведена в Приложении 1. В формуле (27) можно положить $\lambda = 0$ $(a = 0)$, тогда, сохранив сингулярные по $\mu \ll 1$ члены, получим [13]

$$I_a = \frac{q_0^2 V_0}{4\pi\rho_{00} b^2} \left[1 + \frac{k_0^2 b^2}{2M^2} (1 - \delta^2) \left| \ln (k_0 b (1 - \delta^2)^{1/2}/M) \right| \right]. \quad (28)$$

Второй член в квадратной скобке в (28) мал и сохранен для наглядности сопоставления с формулой (22). Действительно, считая в (23) $\omega_{\max} \gg \Omega_0$, нетрудно убедиться в том, что она совпадает с выражением (28), причем $\omega_{\max} = 2^{1/2} V_0/b$.

Интенсивность гравитационных волн при больших числах Маха определяется следующим выражением:

$$I_g = \frac{q_0^2 \omega_b^2}{16\pi^{1/2} \rho_{00} V_0} \exp(k_0^2 a^2/2 - \sigma\mu - \nu) \sum_{m=0}^{\infty} d_m(\lambda, \mu, \sigma)\sigma^m,$$

$$d_m = (-1)^m [\Gamma(m) m!]^{-1} \nu^{m-1} \Phi(1/2, m; \nu(1 + \sigma)) \times \quad (29)$$

$$\times [\Psi(3/2 - m, 1; \lambda) + 2\lambda\Psi(3/2 - m, 2; \lambda)],$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, а остальные обозначения имеют тот же смысл, что и в (27). Неопределенность в нулевом члене (29) может быть раскрыта по известной формуле [13]. Выражение (29) является, как и (27), степенным разложением по σ, в чем легко убедиться, применив к функции Φ теорему сложения для вырожденных гипергеометрических функций [13], но в данном случае в этом нет необходимости. Положив в (29) $b = 0$ и удержав сингулярный по $\lambda \ll 1$ член, имеем [13]

$$I_g = \frac{q_0^2 \omega_b^2}{8\pi\rho_{00} V_0} \left| \ln (k_0 a (1 - \delta^2)^{1/2} (M^2 - 1)^{1/2}/M) \right|. \quad (30)$$

Оценим отношение интенсивностей I_g/I_a для источника с малыми характерными масштабами распределения $(\lambda, \mu \ll 1)$: для этого устремим их к нулю независимо друг от друга, сохраняя в (27) и (29) сингулярные члены или члены, содержащие неопределенности. Следует различать три возможных случая: 1) $\mu \ll \lambda \ll 1$, 2) $\mu \sim \lambda \ll 1$ и 3) $\lambda \ll \mu \ll 1$ или

$$1)\ b \ll a (M^2 - 1)^{1/2} \ll 2^{3/2} MH (1 - \delta^2)^{-1/2}; \quad (31)$$

$$2)\ b \sim a (M^2 - 1)^{1/2} \ll 2^{3/2} MH (1 - \delta^2)^{-1/2}; \quad (32)$$

$$3)\ a (M^2 - 1)^{1/2} \ll b \ll 2^{3/2} MH (1 - \delta^2)^{-1/2}. \quad (33)$$

Несложный анализ (27) и (29) с учетом известных свойств функций Φ и Ψ [13] показывает, что возникающие неопределенности имеют вид $\lambda \ln \mu$ или $\mu \ln \lambda$. При этом в случаях, описываемых неравенствами (31) и (32), отношение I_g/I_a пренебрежимо мало и только при выполнении (33) $I_g/I_a \sim 1$, если $\mu |\ln \lambda|/2 \sim 1$, или, в явном виде, при

$$a \sim 2^{3/2} M H (1 - \delta^2)^{-1/2} (M^2 - 1)^{-1/2} \exp\left[- 8M^2 H^2 (1 - \delta^2)^{-1} b^{-2}\right]. \quad (34)$$

При $\gamma = 1,4$ входящий в (31)—(34) множитель $2^{3/2}(1 - \delta^2)^{-1/2} \approx 3{,}13$. Таким образом, при больших числах Маха и малых размерах излучателя интенсивности акустических и гравитационных волн сравнимы, если продольный масштаб распределения источника значительно превосходит его поперечный масштаб (в смысле оценок (33) и (34)). Разумеется, этот результат согласуется с качественными интерференционными соображениями.

Представляет интерес выяснить поведение интенсивности на пороге излучения — для акустической ветви при $M \to 1$. Близость M к единице означает наличие больших параметров $\sigma \gg 1$ и $\sigma\mu = k_0^2 b^2 \times \delta^2/[2(M^2 - 1)] \gg 1$. Соответствующий анализ (Приложение 2) показывает, что

$$I_a = \frac{q_0^2 V_0}{4\pi\rho_{00} b^2} \exp\left[-\frac{k_0^2 b^2 \delta^2}{2(M^2 - 1)}\right]\{1 + O(\sigma^{-1}, (\sigma\mu)^{-1/2})\}, \quad (35)$$

т. е. интенсивность излучения на пороге экспоненциально мала. Отметим, что предэкспоненциальный множитель в (35) совпадает с (28), если в последней опустить логарифмический член. Однако формула (35) связана с законом распределения источника (23) и не претендует на универсальность.

Оценка интенсивности гравитационной ветви при $M \to 1$ показывает, что для $\mu \ll 1$, $\sigma\lambda \ll 1$*

$$I_g = \frac{q_0^2 \omega_b^2}{8\pi\rho_{00} V_0} \,|\ln (k_0 a \delta)|\, [1 + O(\sigma^{-1})]. \quad (36)$$

Таким образом, при $M \approx 1$ $(M > 1)$ в основном излучаются гравитационные волны, чего и следовало ожидать, так как у них в этом случае нет порога излучения. Далее, из формул (30) и (36) следует, что интенсивность излучения гравитационных волн при околозвуковых скоростях значительно больше, чем при гиперзвуковом режиме движения.

Очевидно, что изложенные в работе построения позволяют проводить аналогичные расчеты и оценки интенсивностей для других диапазонов скоростей, пространственных распределений и типов источников АГВ.

Автор признателен Г. И. Григорьеву, В. П. Докучаеву, В. Н. Красильникову и В. В. Тамойкину за полезные замечания и обсуждение результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Интеграл, входящий в (25), очевидной подстановкой может быть приведен к интегралу типа свертки:

$$J = \frac{1}{2}\, \omega_b^2 \sigma^{3/2} e^{\lambda\sigma - \mu} J_1, \quad J_1 = \int_0^1 \frac{dt \exp\left(-\frac{\sigma\nu}{1-t} - \lambda t/2\right) I_0(\lambda t/2)}{\sqrt{1 - t + \sigma}\,(1 - t)^2}. \quad (37)$$

* Величина $\sigma\lambda = k_0^2 a^2 \delta^2/2$ не зависит от $(M^2 - 1)$.

Величины λ, σ, μ и ν определены в основном тексте. В интеграле (37) содержится лишний радикал, избавиться от которого удобно подстановкой вида

$$(1 - t + \sigma)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \exp\left[-\xi(1 - t + \sigma)\right]. \tag{38}$$

Теперь для трансформант Лапласа компонент свертки можно взять табличные значения [14], применить к (37) теорему о свертке для преобразования Лапласа и учесть (38) — тогда

$$J_1 = \frac{1}{\sigma\nu\sqrt{\pi}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \frac{e^p}{\sqrt{p(p+\lambda)}} \int_0^\infty d\xi \frac{e^{-\sigma\xi}}{\sqrt{\xi}} \sqrt{4\sigma\nu(p+\xi)} \times$$
$$\times K_1\left(\sqrt{4\sigma\nu(p+\xi)}\right) \quad (c > 0), \tag{39}$$

где $K_s(x)$ — функция Макдональда порядка s. Тривиальной модификацией имеющихся в [13] результатов для рядов типа Неймана можно получить следующую формулу:

$$(\xi + \eta)^{s/2} K_s\left(\sqrt{\xi + \eta}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \xi^m}{2^m m!} \eta^{(s-m)/2} K_{m-s}\left(\sqrt{\eta}\right) \tag{40}$$
$$(|\xi| < |\eta|).$$

Разложим формально подынтегральное выражение в (39) в ряд согласно формуле (40), считая $|p| < |\xi|$, и проинтегрируем почленно полученное разложение. Возникающие при этом интегралы сводятся к известным представлениям для вырожденных гипергеометрических функций [13]:

$$\int_0^\infty d\xi\, K_{m-1}\left(2\sqrt{\sigma\nu\xi}\right) \xi^{-m/2} e^{-\sigma\xi} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\, \sigma^{(m-2)/2} \nu^{(m-1)/2} \times$$
$$\times \Gamma(3/2 - m) \Psi(1/2, m; \nu), \tag{41}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Продеформировав в интегралах по p контур интегрирования в левую полуплоскость, имеем [13]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp \frac{e^p}{\sqrt{p+\lambda}} p^{m-1/2} = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{-\lambda} \lambda^m}{m!\Gamma(1/2 - m)} \Phi(1/2, m+1; \lambda). \tag{42}$$

Объединив формулы (37), (39)—(42), немедленно приходим к выражению (27).

Вычисление интеграла в (26) совершенно аналогично, но более громоздко, поэтому мы его приводить не будем.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Для получения асимптотики (35) удобно исходить из формулы (39) Приложения 1, положив в ней $\lambda = 0$ $(\lambda \sim (M^2 - 1))$:

$$J_1 \approx \frac{2}{\sqrt{\pi\sigma\mu_0}} \int_0^\infty d\xi \frac{J_2(\xi)}{\sqrt{\xi}} e^{-\sigma\xi}, \quad J_2(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dp \frac{e^p}{p} \sqrt{p+\xi} \times$$
$$\times K_1\left(2\sqrt{\sigma\mu(p+\xi)}\right). \tag{43}$$

Интеграл J_2 в (43) при $\sigma\mu \gg 1$ может быть вычислен методом перевала; заменив функцию Макдональда ее асимптотикой, получим

$$J_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2(\sigma\mu)^{1/4}} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} (p+\xi)^{1/4} p^{-1} \exp\left[p - 2\sqrt{\sigma\mu(p+\xi)}\right] \times \times (1 + O((\sigma\mu)^{-1/2})). \quad (44)$$

Найдя в (44) точку перевала $p_0 = \sigma\mu - \xi$ и принимая во внимание необходимость построения равномерной асимптотики с учетом близости полюса и точки перевала (последующее интегрирование по ξ), имеем

$$J_2 = \frac{1}{2} \exp(-\sigma\mu - \xi - \eta^2) \int\limits_{\eta}^{\infty} d\zeta\, e^{-\zeta^2}, \qquad \eta = \frac{p_0}{2\sqrt{\sigma\mu}}. \quad (45)$$

Оставшееся интегрирование по ξ с учетом (45) при больших σ, $\sigma\mu$ несложно — результатом его будет основной член асимптотики J_1 и, следовательно, формула (35).

Техника получения оценки (36) аналогична: дважды применив теорему о свертке для преобразования Лапласа к интегралу, входящему в (26), его можно представить в виде двойного контурного интеграла, к которому применимы стандартные асимптотические методы. Основной член асимптотики не зависит от параметра $(M^2 - 1)$, и в нем можно положить $\mu = 0$ и $\sigma\lambda \ll 1$, откуда и следует (36).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Голицын, В. И. Кляцкин, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 3, № 10, 1044 (1967).
2. G. Chimonas, W. R Peltier, Planet. Space Sci., 8, № 3, 599 (1970).
3. J. W. Miles, Geophys. Fluid Dyn., 2, № 1, 125 (1971).
4. K. C. Peat, T. N. Stevenson, J. Fluid Mech., 70, pt. 4, 673 (1975).
5. B. S. H. Rarity, Quart J. Roy. Met. Sos, 99, 673 (1973).
6. Г. С. Голицын, Г. И. Григорьев, В. П. Докучаев, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 13, № 9, 926 (1977).
7. А. С. Монин, А. М. Обухов, Изв. АН СССР, серия геофизическая, № 11, 1360 (1958).
8. В. Е. Пафомов, Труды ФИАН, 16, 94 (1961).
9. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, Проблемы теоретической физики (сборник памяти И. Е. Тамма), изд. Наука, М., 1972, стр. 267.
10. В. П. Докучаев, ЖЭТФ, 43, вып. 2 (8), 595 (1962).
11. В. П. Докучаев, ПММ, 30, вып. 6, 1006 (1966).
12. Г. И. Григорьев, В. П. Докучаев, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 6, № 7, 678 (1970).
13. Г. Бэйтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т. I, II, изд Наука, М., 1965—1966.
14. Г. Бэйтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, т. I, изд. Наука, М., 1969.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 11 марта 1979 г.

CHERENKOV RADIATION OF ACOUSTICAL GRAVITATIONAL WAVES BY HORIZONTALLY MOVING SOURCES

V. D. Lipovskij

Kinematic radiation conditions have been obtained at the uniform horizontal motion of a source of acoustical gravitational waves. Peculiarities of radiation are specified in the region with a «negative» group velocity. By the method of the radiation reaction the frequency and angle intensity distribution are calculated in the space of transverse wave numbers for an arbitrary source of the mass. As an example, the supersonic motion of the source having Gaussian distribution is studied in detail.