ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 621.372.81

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДОЙ В ВОЛНОВОДЕ

М. И. Капчинский

Решена задача об отражении и преломлении волноводных E-волн на границе полубесконечной анизотропной среды — одноосного кристалла с главной оптической осью, параллельной оси волновода. Получены выражения поперечных компонент полей через продольные, формулы для частот и амплитуд отраженной и преломленной волн. Подробно рассмотрено отражение от замагниченного электронного пучка. Выведено условие усиления отраженной волны и условие полного отражения. Показано, что полное отражение при большом усилении возможно только на закритических токах.

В работе [1] была решена задача о взаимодействии волноводной электромагнитной волны с движущейся полубесконечной изотропной средой. Мы покажем, как, пользуясь этим же методом, можно обобщить результаты [1] на случай простейшей анизотропной среды — одноосного кристалла с главной оптической осью, параллельной оси волновода.

Пусть регулярный волновод произвольной односвязной формы поперечного сечения с образующими, параллельными оси z, заполнен движущейся средой в области $z \geqslant \beta c t$, где βc — скорость движения среды. Тензор диэлектрической проницаемости в системе покоя среды имеет вид

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix}.$$

Магнитная проницаемость в системе покоя среды равна μ. На границу раздела вакуум — среда со стороны вакуума падает E-волна произвольной моды с продольной компонентой

$$E_{z0} = E_0 \psi(x, y) \exp[-i(\omega_0 t - h_0 z)], \quad (1)$$

где $\psi(x, y)$ — собственная функция краевой задачи для поперечного сечения волновода с собственным значением $\varkappa$ (индекс моды для простоты опущен). Отраженную и преломленную волны запишем в виде

$$E_{z1} = E_1 \psi(x, y) \exp[-i(\omega_1 t + h_1 z)]; \quad (2)$$

$$E_{z2} = E_2 \psi(x, y) \exp[-i(\omega_2 t - h_2 z)]. \quad (3)$$

Частота и продольное волновое число отраженной волны [1]

$$\omega_1 = \gamma^2 [\omega_0 (1 + \beta^2) - 2 h_0 \beta c], \quad (4)$$

$$h_1 = \gamma^2 \frac{1}{c} \left[h_0 (1 + \beta^2) - 2\omega_0 \frac{\beta}{c} \right].$$

Здесь $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Дисперсионные уравнения для прошедшей волны можно получить из приведенных в [2] соотношений для электромагнитных колебаний в анизотропных средах, если положить там

$$g = 0, \quad \Delta_\perp E_z = -\varkappa^2 E_z, \quad \Delta_\perp B_z = -\varkappa^2 B_z.$$

Для E-волн

$$\omega_{2E}^2 - \varkappa^2 c^2 \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} - h_{2E}^2 c^2 + \gamma^2 (\varepsilon_\perp \mu - 1) \Phi^2 = 0, \qquad (5)$$

где $\Phi = \omega_0 - h_0 \beta c = \omega_1 + h_1 \beta c = \omega_2 - h_2 \beta c$ — фазы всех трех волн на границе раздела.

Для H-волн новых эффектов не возникает, так как при отсутствии компоненты E_z анизотропия никак не проявляется, и роль скаляра ε в изотропных средах здесь играет $\varepsilon_\perp$.

Решения дисперсионного уравнения для E-волн имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_{2E} &= \gamma^2 \left[\Phi + \beta \sqrt{\varepsilon_\perp \mu \Phi^2 - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} c^2 \varkappa^2} \right], \\ h_{2E} &= \gamma^2 \frac{1}{c} \left[\beta\Phi + \sqrt{\varepsilon_\perp \mu \Phi^2 - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} c^2 \varkappa^2} \right]. \end{aligned} \qquad (6)$$

Знаки перед радикалом в (6) выбраны так, чтобы было $\beta_{\text{гр}\,2} > \beta$ — условие отвода энергии от границы раздела.

Формулы для поперечных компонент полей можно получить из соответствующих выражений [1], произведя там формальную замену $\varepsilon \to \varepsilon_\perp$, $\varkappa^2 \to \varkappa^2 \dfrac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}$.

Применяя граничные условия электродинамики движущихся сред [3], найдем амплитуды отраженной E_1- и преломленной E_2-волн:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\varepsilon_\perp h_0 c - h_2 c - \beta (\varepsilon_\perp - 1) \gamma^2 \Phi}{\varepsilon_\perp h_1 c + h_2 c + \beta (\varepsilon_\perp - 1) \gamma^2 \Phi} E_0, \\ E_2 &= \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \frac{(h_1 c + h_0 c) E_0}{\varepsilon_\perp h_1 c + h_2 c + \beta (\varepsilon_\perp - 1) \gamma^2 \Phi}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Аналогично расчету в [1] можно найти условие, при котором E-волна не будет испытывать отражения от среды (условие Брюстера в волноводе). Потребовав $E_1 = 0$, найдем

$$\omega_{0\,\text{Бр}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel - 1} + \beta \sqrt{\varepsilon_\parallel \mu - 1}}{\sqrt{\varepsilon_\parallel (\varepsilon_\perp - \mu)(1 - \beta^2)}} c\varkappa. \qquad (8)$$

Рассмотрим подробнее конкретный пример среды с такой анизотропией — холодную плазму или электронный пучок в бесконечно сильном магнитном поле. Компоненты тензора $\hat{\varepsilon}$ в системе покоя среды имеют вид $\varepsilon_\perp = 1$, $\varepsilon_\parallel = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$, где ω_p — плазменная частота. Магнитная проницаемость $\mu = 1$. В лабораторной системе [3] $\varepsilon_\parallel = 1 - \omega_p^2/\gamma^2\Phi^2$, Дисперсионное уравнение для E-волн имеет вид

$$\omega_{2E}^2 - \frac{\varkappa^2 c^2}{1 - \omega_p^2/\gamma^2 \Phi^2} - h_{2E}^2 c^2 = 0. \tag{9}$$

Из (9) найдем частоту и продольное волновое число прошедшей волны:

$$\begin{aligned} \omega_{2E} &= \gamma^2 \left[\Phi + \beta \sqrt{\Phi^2 - \frac{\varkappa^2 c^2}{\gamma^2 - \omega_p^2/\Phi^2}}\right], \\ h_{2E} &= \gamma^2 \frac{1}{c} \left[\beta\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \frac{\varkappa^2 c^2}{\gamma^2 - \omega_p^2/\Phi^2}}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Видно, что при $\Phi^2 - \dfrac{\varkappa^2 c^2}{\gamma^2 - \omega_p^2/\Phi^2} < 0$ волна в среде будет затухать.

Условие затухания можно переписать следующим образом:

$$\beta_{\text{гр}} - \beta < \frac{\omega_p}{\gamma\omega_0} < 1 - \beta\beta_{\text{гр}}. \tag{11}$$

Здесь $\beta_{\text{гр}} = h_0 c/\omega_0$ — групповая скорость падающей волны.

Введем коэффициент отражения волны от среды R_E, равный отношению потоков энергии в отраженной и падающей волнах. Он равен [1] $R_E = \omega_1 h_1 \mid E_1 \mid^2/\omega_0 h_0 \mid E_0 \mid^2$. В нашем случае

$$R_E = \gamma^4 (1 + \beta^2 - 2\beta\beta_{\text{гр}})(1 + \beta^2 - 2\beta\beta_{\text{гр}}^{-1}) \left| \frac{h_0 c - \beta\omega_0 - \Gamma}{h_0 c - \beta\omega_0 + \Gamma} \right|^2. \tag{12}$$

Здесь

$$\Gamma = \sqrt{\Phi^2 - \frac{\varkappa^2 c^2}{\gamma^2 - \omega_p^2/\Phi^2}}.$$

При выполнении условия (11), т. е. при полном отражении волны от среды, формула (12) упрощается:

$$R_E = \gamma^4 (1 + \beta^2 - 2\beta\beta_{\text{гр}})(1 + \beta^2 - 2\beta\beta_{\text{гр}}^{-1}). \tag{13}$$

Из (11) следует, что при убегающем движении среды можно легко добиться полного отражения волны, взяв $\beta \leqslant \beta_{\text{гр}}$. Коэффициент отражения в этом случае $R_E = -(1-\beta)/(1+\beta)$, т. е. вектор Пойнтинга в отраженной волне направлен в ту же сторону, что и в падающей волне. Чтобы получить большой коэффициент отражения при положительном направлении вектора Пойнтинга в отраженной волне, необходимо $\beta < 0$, т. е. встречное движение среды. Условие полного отражения имеет вид

$$\mid \beta \mid + \beta_{\text{гр}} < \frac{\omega_p}{\gamma\omega_0} < 1 + \mid \beta \mid \beta_{\text{гр}}. \tag{14}$$

Покажем, что условию (14) в случае электронного пучка удовлетворить нелегко. Пусть имеется волновод круглого сечения радиуса r. В волноводе со скоростью $-\beta c$ движется электронный пучок тока I, заполняющий весь волновод. Тогда в лабораторной системе координат

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m\gamma} = \frac{4c^2}{r^2} \frac{I}{\mid \beta \mid \gamma I_0},$$

где
$$I_0 = \frac{mc^3}{e} = 17 \text{ кА}.$$

Условие (14) выполнится при

$$\frac{I}{|\beta|\gamma I_0} > \frac{(|\beta| + \beta_{\text{гр}})^2}{4}\gamma^2\frac{\omega_0^2 r^2}{c^2}.$$

Поскольку в волноводе $\omega_0^2 = c^2\varkappa^2/(1-\beta_{\text{гр}}^2)$, а $\varkappa r$ в круглом волноводе — корень функции Бесселя, наименьшее значение которого равно $\nu_1 = 2{,}405$, то для полного отражения необходимо

$$\frac{I}{|\beta|\gamma I_0} > \frac{(|\beta| + \beta_{\text{гр}})^2}{4(1-\beta_{\text{гр}}^2)}\gamma^2\nu_1^2, \tag{15}$$

т. е. нужны токи существенно больше предельных.

Кроме этого расчета выделим случай $R_E > 1$, т. е. усиление по мощности, когда отраженная волна несет энергию больше падающей. Соответствующие формулы аналитически сложны. В ультрарелятивистском пределе ($\beta \to -1$) получим

$$\frac{\omega_p}{\gamma\omega_0} > (1+\beta_{\text{гр}})\left[\frac{2\sqrt{\beta_{\text{гр}}}}{1-\beta_{\text{гр}}+2\sqrt{\beta_{\text{гр}}}}\right]^{1/2}. \tag{16}$$

Пересчет для тока дает

$$\frac{I}{|\beta|\gamma I_0} > \frac{1+\beta_{\text{гр}}}{4(1-\beta_{\text{гр}})}\gamma^2\nu_1^2\frac{2\sqrt{\beta_{\text{гр}}}}{1-\beta_{\text{гр}}+2\sqrt{\beta_{\text{гр}}}}. \tag{17}$$

Коэффициент отражения в ультрарелятивистском пределе

$$R_E = \frac{(1-\beta_{\text{гр}})^2}{4\beta_{\text{гр}}}\frac{\omega_p^4}{[\gamma^2\omega_0^2(1+\beta_{\text{гр}})^2 - \omega_p^2]^2}. \tag{18}$$

Это выражение справедливо при $\omega_p \neq \gamma\omega_0(1+\beta_{\text{гр}})$. Когда же знаменатель в (18) близок к нулю ($< 2(1+\beta_{\text{гр}})/\gamma^2$), то мы находимся в условиях, при которых выполняется (14) и надо применять соответствующий предел формулы (13):

$$R_E = 4\gamma^4\frac{(1+\beta_{\text{гр}})^2}{\beta_{\text{гр}}}. \tag{19}$$

Из формул (17)—(19) следует, что для эффективного усиления волны при отражении от замагниченного электронного пучка лучше выбирать маленькие значения $\beta_{\text{гр}}$, т. е. рабочая частота ω_0 должна быть близка к критической. Это позволяет одновременно снизить предел по току пучка и увеличить коэффициент отражения.

Автор благодарен Л. А. Юдину за интерес к этой работе и обсуждение затронутых в ней вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Д Газазян, Э. М. Лазиев, А. Д. Тер-Погосян, Изв. вузов — Радиофизика, **21**, № 10, 1517 (1978).
2. А И. Ахиезер и др., Труды Второй международной конференции по мирному

использованию атомной энергии, Женева, 1958; Доклады советских ученых, М., Атомиздат, 1959, стр. 184.
3. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, УФН, 114, вып. 4, 569 (1974).

Поступила в редакцию
10 апреля 1979 г.

INTERACTION BETWEEN AN ELECTROMAGNETIC WAVE AND MOVING HALF-INFINITE ANISOTROPIC MEDIUM IN A WAVEGUIDE

M. I. Kapchinskiy

A problem is solved on reflection and refraction of waveguide E-waves at the boundary of a moving half-infinite anisotropic medium — one-axis-crystal with the principle optical axis which is parallel to the waveguide axis. Expressions of transverse field component expressed through the longitudinal ones, formulas for the frequencies and amplitudes of a reflected and refracted waves have been derived. Reflection from a magnetized electron beam is considered in detail. Condition of a reflected wave amplification and a complete reflection are found. It is shown that a complete reflection with a large amplification is possible only at supercritical currents.