ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 538.576.4

# УРАВНЕНИЕ ЛУЧЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ПРИНЦИП ФЕРМА В ДВИЖУЩИХСЯ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

*Г. Ф. Глинский*

Получено уравнение лучевой поверхности для электромагнитных волн, распространяющихся в движущейся среде с произвольной анизотропией диэлектрической и магнитной проницаемостей. Для рассматриваемых сред в приближении геометрической оптики сформулирован вариационный принцип Ферма. В качестве примера рассматриваются лучи в произвольном гравитационном поле и движущейся неоднородной среде.

Несмотря на то, что вопросу распространения электромагнитных волн в движущихся средах посвящено значительное количество работ (см. [1]), до недавнего времени отсутствовал единый подход к решению данной проблемы. В самом общем виде уравнение поверхности волновых векторов для неоднородной движущейся среды с произвольной анизотропией диэлектрической $\varepsilon$ и магнитной $\mu$ проницаемостей было получено в [2].

Не менее важное значение, как известно, имеет и вторая характеристическая форма, определяющая дуальную по отношению к поверхности волновых векторов лучевую поверхность [3]. В настоящей работе будет представлен вывод уравнения лучевой поверхности для движущихся сред с произвольной анизотропией $\varepsilon$ и $\mu$ в отсутствие дисперсии*. Наряду с этим мы рассмотрим важнейший принцип геометрической оптики — принцип Ферма для движущейся неоднородной анизотропной среды, скорость переноса которой, а также диэлектрическая и магнитная проницаемости не зависят явно от времени. Насколько нам известно, этот вопрос практически не освещался в литературе. Отметим только работы [5, 6], в которых принцип Ферма рассматривался для двух частных случаев — покоящейся среды со сферической симметрией и медленно движущейся изотропной среды.

## 1. ЛУЧЕВОЙ ВЕКТОР И УРАВНЕНИЕ ЛУЧЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Уравнения Максвелла в движущейся анизотропной среде могут быть представлены в следующей инвариантной форме [2]**:

$$\frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x^k}\left(e^{iklm} F_{lm}\right) = 0. \tag{1}$$

* Вопросы, связанные с наличием частотной и пространственной дисперсий, обсуждались ранее в [4].

** Здесь и далее латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а греческие 1, 2, 3.

В отсутствие дисперсии тензор индукции $H^{ik}$ и тензор напряженности поля $F_{ik}$ связаны соотношениями

$$H^{ik} = \varepsilon^{iklm} F_{lm}; \tag{2}$$

$$F_{ik} = \mu_{iklm} H^{lm}. \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon^{iklm}$ — материальный тензор, в общем случае зависящий от координат и времени, $\mu_{iklm}$ — тензор, обратный ему.

Аналогично [2] введем трехмерные величины, изменив при этом некоторые обозначения:

$$\begin{gathered}
E_\alpha = F_{0\alpha}, \qquad B^\alpha = -\frac{1}{2} e^{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma}, \\
D^\alpha = -H^{0\alpha}, \qquad H_\alpha = -\frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} H^{\beta\gamma}, \\
\varepsilon^{\alpha\beta} = -2\varepsilon^{0\alpha0\beta}, \qquad \chi^\alpha_{\cdot\beta} = e_{\beta\gamma\sigma}\varepsilon^{0\alpha\gamma\sigma}, \\
(1/\mu)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e_{\alpha\gamma\sigma} e_{\beta\lambda\rho} \varepsilon^{\gamma\sigma\lambda\rho}, \\
\mu^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e^{\alpha\gamma\sigma} e^{\beta\lambda\rho} \mu_{\gamma\sigma\lambda\rho}, \\
(1/\varepsilon)_{\alpha\beta} = -2\mu_{0\alpha0\beta}, \qquad \theta_\alpha^{\cdot\beta} = e^{\beta\gamma\sigma}\mu_{0\alpha\gamma\sigma}.
\end{gathered} \tag{4}$$

В трехмерной форме уравнения (2) и (3) принимают вид

$$\begin{gathered}
D^\alpha = a^{\alpha\beta} E_\beta + c^{\alpha\beta} H_\beta, \\
B^\alpha = c^{\beta\alpha} E_\beta + b^{\alpha\beta} H_\beta;
\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}
E_\alpha = h_{\alpha\beta} D^\beta + q_{\alpha\beta} B^\beta, \\
H_\alpha = q_{\beta\alpha} D^\beta + p_{\alpha\beta} B^\beta,
\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered}
a^{\alpha\beta}(1/\varepsilon)_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \qquad b^{\alpha\beta}(1/\mu)_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \\
c^{\alpha\beta} = a^{\alpha\gamma}\theta_\gamma^{\cdot\beta} = b^{\beta\gamma}\chi^\alpha_{\cdot\gamma}, \\
h_{\alpha\beta}\varepsilon^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha, \qquad p_{\alpha\beta}\mu^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha, \\
q_{\alpha\beta} = -p_{\beta\gamma}\theta_\alpha^{\cdot\gamma} = -h_{\alpha\gamma}\chi^\gamma_{\cdot\beta}.
\end{gathered} \tag{7}$$

В работе [2] показано, что для плоской высокочастотной монохроматической волны, где все величины, характеризующие поле, пропорциональны $\exp[i(k_\alpha x^\alpha - \omega t)]$, шесть независимых уравнений Максвелла сводятся к следующим:

$$\begin{gathered}
e^{\alpha\beta\gamma} n_\beta H_\gamma = -D^\alpha, \\
e^{\alpha\beta\gamma} n_\beta E_\gamma = B^\alpha,
\end{gathered} \tag{8}$$

где

$$n_\alpha = \frac{c}{\omega} k_\alpha. \tag{9}$$

Условие разрешимости системы (8) с учетом (6) приводит к уравнению Френеля — уравнению поверхности волновых векторов

$$Q(n_\alpha) = \det | a^{\alpha\lambda} - (e^{\beta\alpha\gamma} n_\beta - c^{\alpha\gamma})(e^{\sigma\lambda\eta} n_\sigma - c^{\lambda\eta})(1/\mu)_{\eta\gamma} | = 0. \quad (10)$$

Для характеристики лучей, как известно, вводится лучевой вектор $V^\alpha$, направление которого совпадает с направлением вектора групповой скорости $\partial\omega/\partial k_\alpha$ и по абсолютной величине определяемый соотношением [3]

$$n_\alpha V^\alpha = 1. \quad (11)$$

Можно показать, что он численно равен вектору групповой скорости, отнесенному к скорости света в вакууме. Действительно, дифференцируя (9), получим

$$\delta k_\alpha = \frac{1}{c} \frac{\partial\omega}{\partial k_\beta} \delta k_\beta n_\alpha + \frac{\omega}{c} \delta n_\alpha . \quad (12)$$

Если обе части этого уравнения умножить на $V^\alpha$, а также воспользоваться соотношением (11) и учесть, что лучевой вектор перпендикулярен поверхности волновых векторов [3], т. е. при заданном $\omega$

$$V^\alpha \delta n_\alpha = 0, \quad (13)$$

легко получить

$$V^\alpha = \frac{1}{c} \frac{\partial\omega}{\partial k_\alpha} . \quad (14)$$

Докажем, что в движущихся анизотропных средах, так же как и в покоящихся, вектор Пойнтинга перпендикулярен поверхности волновых векторов, т. е. его направление совпадает с направлением лучевого вектора. Доказательство можно осуществить методом, приведенным в [3].

Продифференцируем выражение (8)

$$\begin{aligned} e^{\alpha\beta\gamma} \delta n_\beta H_\gamma + e^{\alpha\beta\gamma} n_\beta \delta H_\gamma &= -\delta D^\alpha , \\ e^{\alpha\beta\gamma} \delta n_\beta E_\gamma + e^{\alpha\beta\gamma} n_\beta \delta E_\gamma &= \delta B^\alpha . \end{aligned} \quad (15)$$

Умножим первое из них на $E_\alpha$, а второе на $H_\alpha$. Складывая оба равенства с учетом (8), получим

$$2e^{\alpha\beta\gamma} \delta n_\beta E_\alpha H_\gamma = B^\alpha \delta H_\alpha + D^\alpha \delta E_\alpha - E_\alpha \delta D^\alpha - H_\alpha \delta B^\alpha ; \quad (16)$$

$\delta D^\alpha$ и $\delta B^\alpha$ могут быть определены через соответствующие вариации полей $\delta E_\alpha$ и $\delta H_\alpha$ из формулы (5). Подстановка приводит к следующему результату*:

$$e^{\alpha\beta\gamma} E_\alpha H_\gamma \delta n_\beta = 0. \quad (17)$$

Таким образом, направление вектора Пойнтинга совпадает с направлением лучевого вектора $V^\alpha$, а следовательно,

$$\begin{aligned} E_\alpha V^\alpha &= 0, \\ H_\alpha V^\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Для вывода уравнения лучевой поверхности перепишем уравнения поля (8) в несколько иной форме:

$$n_\alpha H_\beta - n_\beta H_\alpha = - e_{\gamma\alpha\beta} D^\gamma , \quad (19)$$

* Мы использовали условия $b^{\alpha\beta} = b^{\beta\alpha}$ и $a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha}$, вытекающие из симметрии материального тензора [2].

$$n_\alpha E_\beta - n_\beta E_\alpha = e_{\gamma\alpha\beta} B^\gamma .$$

Умножим обе части уравнений (19) на $V^\alpha$ и воспользуемся соотношениями (11), (18) и (6). В результате получим следующую систему уравнений относительно векторов $D^\alpha$ и $B^\alpha$:

$$\begin{aligned} (V^\beta e_{\beta\alpha\gamma} - q_{\alpha\gamma}) B^\gamma &= h_{\alpha\gamma} D^\gamma , \\ (V^\beta e_{\beta\alpha\gamma} + q_{\gamma\alpha}) D^\gamma &= - p_{\alpha\gamma} B^\gamma . \end{aligned} \tag{20}$$

Легко проверить, что уравнения (20) получаются из уравнений для векторов напряженности поля (8) и (5) при замене

$$E_\alpha \to D^\alpha , \quad H_\alpha \to B^\alpha , \quad n_\alpha \to V^\alpha , \quad a^{\alpha\beta} \to h_{\alpha\beta}, \quad b^{\alpha\beta} \to p_{\alpha\beta}, \quad c^{\alpha\beta} \to q_{\alpha\beta} . \tag{21}$$

Осуществляя эту замену в (10), сразу же получаем уравнение лучевой поверхности

$$Q'(V^\alpha) = \det | h_{\alpha\lambda} - (e_{\beta\alpha\gamma} V^\beta - q_{\alpha\gamma}) (e_{\sigma\lambda\eta} V^\sigma - q_{\lambda\eta}) \mu^{\eta\gamma} | = 0. \tag{22}$$

В [2] показано, что двулучепреломление в рассматриваемой точке отсутствует, если локально выполняются условия

$$\begin{aligned} a^{\alpha\beta} &= k^2 b^{\alpha\beta} , \\ c^{\alpha\beta} &= - c^{\beta\alpha} , \end{aligned} \tag{23}$$

где $k$ — некоторая постоянная. Можно показать, что эти условия эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} &= \frac{1}{k^2} p_{\alpha\beta} , \\ q_{\alpha\beta} &= - q_{\beta\alpha} . \end{aligned} \tag{24}$$

При выполнении последних уравнение лучевой поверхности (22) — в общем случае четвертой степени относительно $V^\alpha$ — распадается на два одинаковых уравнения второго порядка

$$\det \left| h_{\alpha\gamma} - i \frac{1}{k} (V^\beta e_{\beta\alpha\gamma} - q_{\alpha\gamma}) \right| = 0 . \tag{25}$$

## 2. ПРИНЦИП ФЕРМА В ДВИЖУЩИХСЯ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Известно, что в стационарных условиях уравнение распространения лучей может быть получено из принципа Ферма. Согласно этому принципу, истинная траектория луча между двумя фиксированными точками $a$ и $b$ определяется из условия минимума затрачиваемого времени [7]

$$\delta S = \delta \int_a^b dx^0 = 0 . \tag{26}$$

Дифференциал времени $dx^0 = cdt$, стоящий под знаком интеграла, должен быть выражен соответствующим образом через дифференциалы координат и локальную скорость света.

Пусть $dx^\alpha$ — дифференциалы координат вдоль луча, тогда лучевой вектор (вектор групповой скорости) можно записать как $V^\alpha = dx^\alpha / dx^0$. Уравнение лучевой поверхности (22) является уравнением четвертой степени относительно $V^\alpha$. Если его решить относительно $dx^0$, то мы

получим четыре корня и, следовательно, четыре вариационных принципа для определения траектории лучей. Они соответствуют прямому и обратному направлениям распространения лучей для двух различных поляризаций света*.

В качестве примера рассмотрим распространение лучей в гравитационном поле, в равномерно движущейся изотропной и покоящейся анизотропной средах.

В гравитационном поле $\varepsilon^{iklm}=g^{iklm}$ (обозначения в [2]). Так как двулучепреломление отсутствует, то уравнение поверхности лучей сводится к уравнению (25), в котором необходимо положить $k=1$, $V^\beta = \sqrt{\gamma}\, dx^\beta / \sqrt{g_{00}}\, dx^0$, $h_{\alpha\gamma} = -(1/g_{00}g^{00})\, g_{\alpha\gamma}$, $q_{\alpha\gamma} = (\sqrt{\gamma}/g^{00}\sqrt{g_{00}}) \times e_{\beta\alpha\gamma}\, g^{0\beta}$. В результате получим

$$g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}\, dx^0\, dx^\alpha + g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = 0. \qquad (27$$

Из (27) следует известный принцип Ферма для световых лучей в гравитационном поле [8]

$$\delta S_\pm = \delta \int \left( -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\, dx^\alpha \pm \frac{\sqrt{\gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta}}{\sqrt{g_{00}}} \right) = 0. \qquad (28)$$

Используя (25), а также формулы, приведенные в [2], нетрудно получить уравнение поверхности лучей для равномерно движущейся вдоль оси $x^1$ со скоростью $v$ изотропной среды

$$h_{11}(V^1)^2 + h_{22}(V^2)^2 + h_{33}(V^3)^2 - 2h_{11}\, c^1\, V^1 - \beta = 0. \qquad (29)$$

Здесь

$$h_{11} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad h_{22} = h_{33} = \frac{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}{\varepsilon - \dfrac{1}{\mu}\dfrac{v^2}{c^2}},$$

$$c^1 = \frac{(\varepsilon\mu - 1)\dfrac{v}{c}}{\varepsilon\mu - \dfrac{v^2}{c^2}}, \qquad \beta = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{1 - \varepsilon\mu\dfrac{v^2}{c^2}}{\varepsilon\mu - \dfrac{v^2}{c^2}},$$

$\varepsilon$ и $\mu$ — диэлектрическая и магнитная проницаемости неподвижной среды.

Траектории лучей в данном случае определяются из вариационного принципа

$$\delta S_\pm = \delta \int \left( -\frac{h_{11}\, c^1}{\beta}\, dx^1 \pm \sqrt{\varepsilon\mu\varkappa^2 (dx^1)^2 + \varepsilon\mu\varkappa\, [(dx^2)^2 + (dx^3)^2]} \right) = 0, \qquad (30)$$

где $\varkappa = \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right) \Big/ \left(1 - \varepsilon\mu\dfrac{v^2}{c^2}\right)$. Если скорость среды $v$ превышает скорость света в данной среде ($\varkappa < 0$), то из (30) следует известный результат, согласно которому траектории лучей лежат внутри локального конуса с углом раствора $\theta$ [1]:

---

* В рассматриваемом приближении геометрической оптики поляризация света вдоль луча адиабатически изменяется в соответствии с изменением $\varepsilon^{iklm}$.

$$\operatorname{tg}\theta < \sqrt{\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\varepsilon\mu\frac{v^2}{c^2}-1}}. \tag{31}$$

В общем случае движущейся среды с произвольной анизотропией $\varepsilon$ и $\mu$ подынтегральное выражение в (26) получается достаточно громоздким. Мы рассмотрим частный случай неподвижной одноосной (ось $x^3$) среды, магнитная проницаемость которой $\mu$, а тензор диэлектрической проницаемости имеет главные значения $\varepsilon_\perp$ и $\varepsilon_\parallel$. Уравнение поверхности лучей (уравнение (22)) при этом распадается на два независимых уравнения второй степени, и мы имеем два вариационных принципа для обыкновенного и необыкновенного лучей, соответственно

$$\delta S_1 = \delta \int \sqrt{\varepsilon_\perp \mu}\sqrt{(dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2} = 0; \tag{32}$$

$$\delta S_2 = \delta \int \sqrt{\varepsilon_\parallel \mu[(dx^1)^2+(dx^2)^2]+\varepsilon_\perp \mu (dx^3)^2} = 0. \tag{33}$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, Эйнштейновский сборник — 1974, изд. Наука, М., 1976.
2. Г Ф. Глинский, Изв. вузов — Радиофизика, 21, № 10, 1498 (1978).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
4. В. Г. Полевой, С. М. Рытов, УФН, 125, № 3, 549 (1978); Ю. А. Кравцов, ЖЭТФ, 55, № 4 (10), 1470 (1968).
5. О. Н. Найда, Изв. вузов — Радиофизика, 12, № 4, 569 (1969).
6. N. L. Balazs, Opt. Soc. America, 45, 63 (1955).
7. А. Зоммерфельд, Оптика, ИЛ, М., 1953, стр. 459.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М., 1973, стр. 324.


Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию 30 декабря 1978 г.

## RAY SURFACE EQUATION AND FERMAT'S PRINCIPLE IN MOVING ANISOTROPIC MEDIA

*G. F. Glinskij*

Ray surface equation has been obtained for electromagnetic waves propagating in a moving medium with an arbitrary anisotropy of dielectric and magnetic permittivities. The variation Fermat's principle is formulated for media considered in the geometrical optics approximation. Rays in an arbitrary gravitation field and in a moving inhomogeneous medium are considered as an example.