ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 533.951.7

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПАКЕТА СО СЛУЧАЙНЫМ ШУМОМ В УРАВНЕНИИ БЮРГЕРСА

С. С. Моисеев, А. В. Тур, В. В. Яновский

В работе изучается взаимодействие детерминированного пакета со случайным шумом. Получены точные усредненные уравнения для пакета и аналитические выражения, описывающие его эволюцию. Вычислен коэффициент турбулентной вязкости.

Во многих физических экспериментах наблюдается картина нелинейного взаимодействия детерминированного сигнала со случайным шумом (см. библиографию [1]). Поэтому в ряде работ [2–4] рассматриваются такие процессы на конкретных примерах, принадлежащих различным областям физики. В частности, в нелинейной акустике рассматривается взаимодействие монохроматического сигнала со случайным шумом при описании процесса уравнением $\frac{\partial V}{\partial x} = V\frac{\partial V}{\partial y}$ [5, 1]. При этом показано, что аномальное затухание звука может быть вызвано наличием случайного шума. Естественное объяснение, приведенное в [6], заключается в том, что при взаимодействии с шумом энергия волны переходит в шум.

В настоящей работе изучается взаимодействие произвольной детерминированной компоненты со случайным фоном в рамках уравнения Бюргерса. Предложен метод, позволяющий впервые получить уравнение, точно описывающее эволюцию детерминированной компоненты в условиях сильной связи. Для произвольного детерминированного сигнала получены явные аналитические выражения. Показано, что затухание связано с возникновением турбулентной вязкости, которую удается вычислить точно. При решении задачи естественно считать заданными начальные характеристики как детерминированной части, так и случайного процесса. Таким образом, при $t=0$ нам заданы профиль детерминированной компоненты скорости $\tau(x)$ и начальные характеристики случайного процесса, которые мы будем описывать характеристическим функционалом [7] случайного шума при $t=0$:

$$\varphi[y] = \left\langle \exp\left(i \int_{-\infty}^{\infty} y(x)\, V_0(x)\, dx \right) \right\rangle, \tag{1}$$

где скобки означают усреднение по полю случайной компоненты скорости $V_0(x)$, вбрасываемой в систему при $t=0$. Знание характеристического функционала означает задание всех начальных корреляционных моментов случайного шума.

Далее будем считать $\langle V_0(x) \rangle = 0$, т. е. имитируем флуктуационное поле скорости (из дальнейшего будет ясно, что такое предположение несущественно). Тогда под эволюцией пакета будем понимать изменение $\langle V \rangle$ со временем, где усреднение проводится по всевозможным реализациям фона в начальный момент времени $t=0$. Следовательно, мы рассмотрим последующую эволюцию пакета, вброшенного одновременно со случайными возмущениями при $t=0$, в соответствии с уравнением Бюргерса.

Остановимся несколько подробнее на способе решения. Ясно, что в анализируемой задаче сохраняются некоторые динамические черты, свойственные решениям уравнения Бюргерса, и проявляются характерные статистические свойства. Последние возникают в результате действия некоторого статистического оператора на основное состояние, являющееся решением рассматриваемого уравнения с динамическими начальными условиями. Эта точка зрения приводит к простой математической форме, допускающей обобщение и на ряд более сложных уравнений. Опишем технику, позволяющую вычислить статистический оператор явно.

Для изучения эволюции пакета (т. е. для вычисления $\langle V\rangle$) воспользуемся решением уравнения Бюргерса с начальным условием

$$V|_{t=0} = V_0(x) + \tau(x).$$

Именно это решение и нужно усреднить для получения $\langle V\rangle$,

$$\langle V\rangle \equiv \langle V(x,\ t;\ [V_0+\tau])\rangle.$$

Здесь и далее в квадратных скобках отмечается функциональная зависимость от соответствующих начальных условий.

Для выполнения усреднения по полю V_0 используем оператор функционального сдвига [8], с помощью которого представим $V(x,\ t;\ [V_0+ +\tau])$ в виде

$$V(x,\ t,\ [V_0+\tau]) = \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} V_0(z)\frac{\delta}{\delta\tau(z)}\,dz\right)V(x,\ t,\ [\tau]),$$

где $\delta/\delta\tau(z)$ — вариационная производная по τ. Тогда операция усреднения приводит к соотношению

$$\langle V\rangle = \left\langle \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} V_0(z)\frac{\delta}{\delta\tau(z)}\,dz\right)\right\rangle V(x,\ t;\ [\tau]), \tag{2}$$

где $V(x,\ t;\ [\tau])$ — решение уравнения Бюргерса с начальным условием $\tau(x)$ детерминированной компоненты.

Легко видеть, что функциональный оператор, возмущающий основное состояние, представляет собой характеристический функционал (1) заданного случайного процесса, в котором $iy(z)$ заменяется вариационной производной $\delta/\delta\tau(z)$; т. е.

$$\langle V\rangle = \varphi\left[\frac{\delta}{i\delta\tau}\right]V(x,\ t;\ [\tau]). \tag{3}$$

Вид оператора φ известен, так как по постановке задачи характеристический функционал задан.

Рассмотрим в качестве простого примера случай гауссова случайного процесса (отметим, что последующие вычисления могут быть проделаны и в случае произвольного φ), тогда φ имеет вид

$$\varphi\left[\frac{\delta}{i\delta\tau}\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\langle V_0(z)\,V_0(z')\rangle\frac{\delta^2}{\delta\tau(z)\,\delta\tau(z')}\,dz\,dz'\right). \tag{4}$$

Таким образом, в этом случае

$$\langle V\rangle = \exp\left(\frac{1}{2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\langle V_0(z)V_0(z')\rangle\frac{\delta^2}{\delta\tau(z)\,\delta\tau(z')}\,dzdz'\right)V(x,\ t;\ [\tau]). \quad (5)$$

Рассуждая аналогично, легко получить соотношения и для других корреляционных моментов, например,

$$\langle VV'\rangle = \varphi\left[\frac{\delta}{i\,\delta\tau}\right]V(x,\ t;\ [\tau])\,V(x',\ t,\ [\tau]),$$

или в частном случае, рассматриваемом нами,

$$\langle VV'\rangle = \exp\left(\frac{1}{2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\langle V_0(z)V_0(z')\rangle\frac{\delta^2}{\delta\tau(z)\,\delta\tau(z')}\,dzdz'\right)\times$$
$$\times V(x,\ t,\ [\tau])\,V(x',\ t,\ [\tau]). \quad (6)$$

Таким образом, мы пришли к схеме, описанной ранее.

Для определения $\langle V\rangle$ необходимо вычислить результат действия оператора, стоящего в экспоненте, на основное состояние $V(x,\ t;\ [\tau])$. Для этого воспользуемся разложением $\langle V_0(z)\,V_0(z')\rangle$ в виде ряда

$$\langle V_0(z)\ V_0(z')\rangle = b_{ij}\,z^i(z')^j. \quad (7)$$

По повторяющимся индексам проводится суммирование. Последующие вычисления будем проводить по следующей схеме. Используя (7), представим оператор, стоящий в экспоненте, в виде суммы более простых операторов. Действие этих операторов на основное состояние легко изучается в общем виде. После вычисления результата их действия на $V[\tau]$ проведем обратное сворачивание с учетом (7), в итоге получим результат действия изучаемого оператора на основное состояние.

Таким образом, процедура разложения (7) носит промежуточный характер и привлекается для упрощения вычислений. Следуя описанному плану, запишем оператор, стоящий в экспоненте, в виде разложения по более простым операторам:

$$\hat{T} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty}\langle V_0(z)\ V_0(z')\rangle\frac{\delta^2}{\delta\tau(z)\,\delta\tau(z')}\,dzdz' =$$
$$= b_{ij}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} z^i\frac{\delta}{\delta\tau(z)}\,dz\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} z^j\frac{\delta}{\delta\tau(z)}\,dz\right) \equiv b_{ij}\hat{I}^i\hat{I}^j. \quad (8)$$

Следовательно, для вычисления действия оператора $\hat{T}$ на $V[\tau]$ необходимо изучить действие оператора $\hat{I}^i$ на $V[\tau]$.

Перейдем к вычислению $\hat{I}^i V$, учитывая, что $V = -2\mu\dfrac{\partial}{\partial x}\ln\psi$ (ψ — решение уравнения теплопроводности с соответствующими начальными условиями (см., например, [9]). Тогда

$$\hat{I}^i V = -2\mu\frac{\partial}{\partial x}(\hat{I}^i\ln\psi) = -2\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varphi}\hat{I}^i\psi\right). \quad (9)$$

Используя явный вид ψ, получим

$$\hat{I}^i\psi = -\frac{(i+1)^{-1}}{2\mu\sqrt{4\pi\mu t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu t}-\frac{1}{2\mu}\int_0^{\xi}\tau(\eta)\,d\eta\right)\xi^{i+1}\,d\xi. \tag{10}$$

Учитывая рекуррентное соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu t}-\frac{1}{2\mu}\int_0^{\xi}\tau(\eta)\,d\eta\right)\xi^{i+1}\,d\xi = \left(x+2\mu t\frac{\partial}{\partial x}\right)\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu t}-\frac{1}{2\mu}\int_0^{\xi}\tau(\eta)\,d\eta\right)\xi^{i}\,d\xi, \tag{11}$$

представим (10) в виде

$$\hat{I}^i\psi = -\frac{1}{2\mu(i+1)}\left(x+2\mu t\frac{\partial}{\partial x}\right)^{i+1}\psi. \tag{12}$$

Перестановочное соотношение

$$\left(x+2\mu t\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = \psi\left(x-tV+2\mu t\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

(которое легко получить, учитывая, что $-2\mu\psi_x = \psi V$) позволяет записать (12) как

$$\hat{I}^i\psi = -\frac{\psi}{2\mu(i+1)}\left(x-tV+2\mu t\frac{\partial}{\partial x}\right)^i(x-tV).$$

Подставляя полученное соотношение в (9), получаем

$$\hat{I}^iV[\tau] = \frac{1}{i+1}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x-tV+2\mu t\frac{\partial}{\partial x}\right)^i(x-tV)\right]. \tag{13}$$

Таким образом, результат действия оператора $\hat{I}^i$ на V представлен в виде нелинейного дифференциального оператора.

Далее рассмотрим случай, когда динамическая вязкость μ, стоящая в уравнении Бюргерса, исчезающе мала. Причина интереса к этому случаю понятна. С одной стороны, вычислительный аспект упрощается, с другой стороны, основной интерес представляет состояние при $\mathrm{Re}\to\infty$, что и соответствует рассматриваемому случаю.

В пределе $\mu\to 0$ для волн разряжения соотношение (13) упрощается и принимает вид

$$\hat{I}^iU = \frac{1}{i+1}\frac{\partial}{\partial x}(x-tU)^{i+1}, \tag{14}$$

где $U = \lim\limits_{\mu\to 0} V(x, t, [\tau])$. Отметим, что такое состояние существует (см., например, [10]) и является обобщенным решением уравнения Хопфа — Лакса.

Используя соотношение (14), вычислим, наконец, действие оператора $\hat{T}$ на U:

$$\hat{T}U = b_{ij}\hat{I}^i\hat{I}^jU = b_{ij}(x-tU)^i(-t\hat{I}^jU) =$$
$$= -t\frac{\partial}{\partial x}\left[b_{ij}(x-tU)^i(x-tU)^j(1-tU_x)\right].$$

Сворачивая полученное выражение с помощью (7), получим

$$\hat{T} U \doteq - t \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} B(x - tU, x - tU)(1 - tU_x) \right], \tag{15}$$

где

$$B(x, x') = \langle V_0(x) V_0(x') \rangle .$$

Рассмотрим подробнее случай однородного при $t=0$ случайного фона. Тогда $\langle V_0(x) V_0(x') \rangle = B(x - x')$, и в этом случае (15) принимает вид

$$\hat{T} U = t^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{B(0)}{2} U . \tag{16}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае соотношение (5) записывается как

$$\langle U \rangle = \exp\left(\frac{t^2 B(0)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) U(x, t; [\tau]) . \tag{17}$$

Результат действия полученного дифференциального оператора легко вычислить, используя его представление (аналогичное [11]) в виде оператора сдвига:

$$\exp\left(\frac{t^2 B(0)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} + \sqrt{\frac{B(0)}{2}}\, t \xi \frac{\partial}{\partial x} \right) d\xi . \tag{18}$$

Используя (18), найдем (17):

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/4} U\left(x + \sqrt{\frac{B(0)}{2}}\, t \xi, t; [\tau] \right) d\xi . \tag{19}$$

Полученное соотношение описывает изменение пакета при взаимодействии со случайной компонентой скорости в случае однородного при $t=0$ фона и исчезающе малой вязкости.

Особенно наглядный вид соотношение (19) принимает в «k»-представлении. Применяя фурье-преобразование к (19) и учитывая, что фурье-преобразование свертка есть произведение фурье-образом, получим

$$\langle U \rangle_k = \exp\left(-\frac{k^2 t^2}{2} B(0) \right) U_k . \tag{20}$$

Соотношение (20) характеризует эволюцию спектрального состава пакета. Оно указывает на наличие двух процессов, связанных с динамикой и статистикой задачи. Легко видеть, что генерация гармоник с более высокими «k» происходит почти как и в динамической задаче при отсутствии фона. Однако экспоненциальный множитель приводит к быстрому затуханию гармоник с большими «k» (за счет стохастизации пакета). Таким образом, его действие аналогично действию вязкости μ в динамической задаче. Следовательно, естественно говорить о наличии турбулентной вязкости величины $tB(0)$ для детерминированной компоненты.

К вопросу интерпретации естественно возвратиться еще раз после получения замкнутого уравнения для детерминированной компоненты.

Для получения такого уравнения необходимо вычислить парный коррелятор. Его вычисление вполне аналогично вычислению $\langle V\rangle$. Поэтому приведем результат вычисления, упуская громоздкие выкладки:

$$\langle U^2\rangle = \exp\left(\frac{B(0)t^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(U^2 - 2B(0)t\frac{\partial}{\partial x}U\right) + B(0). \qquad (21)$$

Легко проверить, что соотношения (17) и (21), будучи подставлены в незамкнутое уравнение Бюргерса с исчезающе малой вязкостью, усредненное по полю V_0, удовлетворяют уравнению тождественно, а при $t=0$ удовлетворяют соответствующим начальным условиям.

Соотношение (21) с учетом (17) запишем в виде

$$\langle U^2\rangle = \exp\left(\frac{B(0)t^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)U^2 - 2B(0)t\frac{\partial\langle U\rangle}{\partial x} + B(0). \qquad (22)$$

Таким образом, для замыкания уравнения

$$\frac{\partial\langle U\rangle}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial\langle U^2\rangle}{\partial x} = 0 \qquad (23)$$

достаточно выразить $\exp\left(B(0)\frac{t^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)U^2$ через $\langle U\rangle$. Эту задачу легко выполнить, используя (17). Действуя на него обратным оператором, разрешим соотношение относительно U:

$$U = \exp\left(-B(0)\frac{t^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\langle U\rangle.$$

Далее, учитывая интегральное представление оператора (18), получим

$$\exp\left(\frac{B(0)t^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)U^2 =$$

$$= \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}{4}\right)\left\langle U\left(x+\sqrt{\frac{B(0)}{2}}\,t(\xi_3+i\xi_1),\ t\right)\right\rangle\times$$

$$\times\left\langle U\left(x+\sqrt{\frac{B(0)}{2}}\,t(\xi_3+i\xi_2),\ t\right)\right\rangle d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.$$

Подставляя полученное выражение в (22), выразим $\langle U^2\rangle$ интегродифференциальным образом через $\langle U\rangle$, что позволяет замкнуть уравнение (23) и получить уравнение для эволюции детерминированной компоненты:

$$\frac{\partial\langle U\rangle}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial x}\times$$

$$\times\left\{\left\langle U\left(x+\sqrt{\frac{B(0)}{2}}\,t(\xi_3+i\xi_1),\ t\right)\right\rangle\left\langle U\left(x+\sqrt{\frac{B(0)}{2}}\,t(\xi_3+\right.\right.\right. \qquad (24)$$

$$\left.\left.\left.+\,i\xi_2),\ t\right)\right\rangle\right\} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = B(0)t\frac{\partial^2\langle U\rangle}{\partial x^2}.$$

Уравнение (24) описывает эволюцию усредненного пакета. Оно показывает, что приведенная ранее интерпретация справедлива. Действительно, в замкнутом уравнении для пакета возникает «вязкий» член с коэффициентом вязкости величиной $tB(0)$. Отметим, что в нулевом приближении основной вклад в интегралы дают точки $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. При этом уравнение принимает вид уравнения Бюргерса с турбулентной вязкостью $tB(0)$ (см. [4]):

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial t} + \langle U \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x} = tB(0) \frac{\partial^2 \langle U \rangle}{\partial x^2},$$

что показывает близость процессов генерации высших гармоник в уравнении (24) к соответствующим процессам в динамическом уравнении при отсутствии фона.

Следует ожидать, что при отличной от нуля вязкости соотношения (17) и (21) сохраняют свой вид, только основное состояние будет решением уравнения Бюргерса с $\mu \neq 0$ (такие соотношения удовлетворяют начальным условиям при $t=0$ и незамкнутому уравнению для $\langle V \rangle$ и $\langle V \rangle^2$ с отличной от нуля вязкостью).

Перейдем теперь к анализу поведения произвольного пакета. Избегая громоздких выкладок, изложим результат с помощью простых физических соображений, уже не прибегая к суммированию рядов, как в предыдущем случае.

Начнем с построения динамического решения при $\mu \to 0$ (т. е. при $\mathrm{Re} \to \infty$). Такое решение, как хорошо известно [10], есть обобщенное решение квазилинейного уравнения Хопфа — Лакса, обладающее определенными свойствами. А именно, до пересечения характеристик это решение совпадает с классическим решением квазилинейного уравнения, при пересечении образуются разрывы, но сохраняется площадь под решением — $\int\limits_{-\infty}^{\infty} V(x, t)\, dx = \mathrm{const}$ — со временем. Эти условия по сути уже однозначно определяют обобщенное решение. Действительно, соотношение

$$V(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tau(\xi)\, \delta(\xi - x + t\tau(\xi))\, \theta\left(t \int\limits_{\xi}^{x} \tau(\eta)\, d\eta - \frac{(x-\xi)^2}{2t}\right)\left(1 + t\frac{\partial \tau(\xi)}{\partial \xi}\right) d\xi \tag{25}$$

удовлетворяет приведенным условиям для начальных условий $\tau(x)$, зануляющихся на правом конце с отличной от нуля производной и одним максимумом (эти ограничения, строго говоря, нужны для простоты анализируемых далее выражений. Аналогичная формула для произвольного τ содержит большее число интегралов и в этой работе приводиться не будет). Легко заметить, что δ-функция осуществляет перенос начальной скорости по характеристике, а стоящая под интегралом θ-функция «следит» за сохранением нужного интеграла площади под решением. Таким образом, (25) является обобщенным решением уравнения Хопфа — Лакса с начальным условием $V|_{t=0} = \tau(x)$ и, следовательно, решением уравнения Бюргерса при $\mu \to 0$ (соответствующую теорему о связи обобщенных решений с решением уравнения Бюргерса см., например, в [10]).

Перейдем теперь к построению статистических характеристик, т. е. к анализу эволюции усредненного пакета. Для выполнения усреднения запишем (25) в более удобной форме. Используя фурье-преобразование δ- и θ-функций,

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\left(\frac{i}{k} + \pi\delta(k)\right) dk,$$

запишем (25) в виде

$$V(x, t) = \frac{1}{4\pi^2}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \tau(\xi)\left(1 + t\frac{\partial\tau(\xi)}{\partial\xi}\right)\left(\frac{i}{k_2} + \pi\delta(k_2)\right) \times$$
$$\times \exp\left[ik_1(\xi - x + t\tau(\xi)) + ik_2\left(\int\limits_{\xi}^{x}\tau(\eta)\,d\eta - \frac{(x-\xi)^2}{2t}\right)\right] d\xi\, dk_1 dk_2. \tag{26}$$

Таким образом, действие вариационных производных на (26) сводится к их действию на собственные функции. Поэтому, учитывая (3), легко получить

$$\langle V\rangle = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{i}{k_2} + \pi\delta(k_2)\right)\exp\left(ik_1(\xi - x) - ik_2\frac{(x-\xi)^2}{2t}\right) \times$$
$$\times\left[\frac{\delta}{\delta y}\left(1 + t\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\delta}{\delta y(\xi)}\right)\varphi_0\right]\Bigg|_{y(p)=k_1t\,\delta(p-\xi)+k_2\theta(x-p)\,\theta(p-\xi)} dk_1dk_2d\xi. \tag{27}$$

Таким образом, эволюция усредненного пакета полностью определяется соотношением (27). Единственное существенное предположение, используемое при выводе (27), — это $\mathrm{Re}\to\infty$. В случае гауссова однородного начального поля скорости простой вид характеристического функционала позволяет выполнить интегрирование по k_1 и k_2 и получить в этом случае

$$\langle V\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,t^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\xi)}{\sqrt{B(\xi,\xi)}}\exp\left(-\frac{\varkappa^2}{2t^2B(\xi,\xi)}\right)\times$$
$$\times\left[1 - \Phi\left(\frac{\gamma}{t\sqrt{2}\,\delta^{1/2}}\right)\right]\left[1 + t\frac{\partial\tau(\xi)}{\partial\xi} - \frac{B(\xi,\xi)_\xi}{B(\xi,\xi)}\varkappa\right]d\xi -$$
$$-\frac{1}{2\pi t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\xi)}{\sqrt{B(\xi,\xi)\,\delta}}\int\limits_{\xi}^{x}B(\xi,p)_\xi\,dp\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{\varkappa^2}{2t^2B(\xi,\xi)} - \frac{\gamma^2}{2t^2\delta}\right)d\xi. \tag{28}$$

Здесь введены обозначения:

$$\varkappa = \xi - x + t\tau(\xi),$$

$$\gamma = \frac{(\xi - x)^2}{2} - t\int\limits_{\xi}^{x}\tau(p)\,dp + \frac{\varkappa}{B(\xi,\xi)}\int\limits_{\xi}^{x}B(\xi,p)\,dp,$$

$$\delta = \iint\limits_{\xi}^{x}B(p,p_1)\,dp\,dp_1 - \frac{1}{B(\xi,\xi)}\left(\int\limits_{\xi}^{x}B(\xi,p)\,dp\right)^2.$$

Соотношение (27) показывает, что, как и в предыдущем случае, происходит размытие разрывов в среднем (так как их наличие было связано с наличием δ- и θ-функций), что говорит о возникновении турбулентной вязкости в уравнении для усредненного пакета. Однако в последнем случае турбулентная вязкость носит более сложный характер, связанный со взаимодействием пакета с фоном.

Вообще говоря, сложность выражения для $\langle V\rangle$ связана с описанием единым образом, по сути дела, нескольких физических задач (разделение которых можно осуществить по амплитудам фона и пакета).

Рассмотрим далее некоторые асимптотические соотношения, характеризующие пакет. В основном нас будет интересовать поведение хорошо определенного пакета при больших временах. Переходя в (28) к безразмерным переменным $\eta=\xi/t\sqrt{B(0)}$ и вводя безразмерные параметры $\varepsilon=\dfrac{x}{t\sqrt{B(0)}}$, $\Delta_1=\dfrac{\sqrt{B(0)}\,t}{L}$, $\Delta_2=\dfrac{\sqrt{B(0)}\,t}{l}$, $h=\dfrac{\tau_0}{B(0)}$ ($B(0)$, τ_0 — амплитуды коррелятора и пакета, а L, l — характерные масштабы фона и пакета соответственно), получаем в случае однородного начального поля скорости

$$\langle V\rangle=\sqrt{B(0)}\left[\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\varepsilon-\eta)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\eta-\varepsilon+h\tau(\Delta_2\eta)\right]^2\right\}\times\right.$$
$$\times\left\{1-\Phi\left[\frac{\frac{1}{2}(\eta-\varepsilon)^2-h\int_\eta^\varepsilon\tau(\Delta_2 p)dp+(\eta-\varepsilon+h\tau(\Delta_2\eta))\int_0^{\varepsilon-\eta}b(\Delta_1 z)\,dz}{\sqrt{2}\left(\iint_\eta^\varepsilon b(\Delta_1(z-z_1))\,dzdz_1-\left(\int_\eta^\varepsilon b(\Delta_1(\eta-p))\,dp\right)^2\right)^{1/2}}\right]\right\}\times$$
$$\times\left(1+h\frac{\partial\tau(\Delta_2\eta)}{\partial\eta}\right)d\eta-\tag{29}$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\varepsilon-\eta)\left[1-b\left(\Delta_1(\eta-\varepsilon)\right)\right]}{\left[\iint_\eta^\varepsilon b(\Delta_1(p-p_1))\,dpdp_1-\left(\int_\eta^\varepsilon b\left(\Delta_1(\eta-p)\right)dp\right)^2\right]^{1/2}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\eta-\varepsilon+h\tau(\Delta_2\eta)\right)^2-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\left[\frac{(\eta-\varepsilon)^2}{2}-h\int_\eta^\varepsilon\tau(\Delta_2 z)\,dz+(\eta-\varepsilon+h\tau(\Delta_2\eta))\int_\eta^\varepsilon b(\Delta_1(\eta-p))\,dp\right]^2}{2\left[\iint_\eta^\varepsilon b(\Delta_1(p-p_1))\,dpdp_1-\left(\int_\eta^\varepsilon b\left(\Delta_1(\eta-p)\right)dp\right)^2\right]}\right\}d\eta\right].$$

Таким образом, у нас возникает четыре безразмерных параметра. Рассмотрим случай $\Delta_1\ll 1$, что означает изучение пакета при t, меньших характерного времени эволюции фона. Оценивая δ при $\Delta_1\ll 1$ с учетом того, что $(\varepsilon-\eta)$ не очень велико, за счет обрезающей экспоненты в (29) легко получить

$$\delta\approx-\left.\frac{\partial^2 b}{\partial\eta^2}\right|_{\eta=0}\frac{1}{4}\,\Delta_1^2(\varepsilon-\eta)^4.$$

Пренебрегая в (29) экспоненциально малыми членами, получаем

$$\langle V\rangle = \frac{\sqrt{B(0)}}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon-\eta)\exp\left[-\frac{1}{2}(\eta-\varepsilon+h\tau(\Delta_2\eta))^2\right]\times$$
$$\times\left\{1-\Phi\left[\frac{\dfrac{(\eta-\varepsilon)^2}{2}-h\int\limits_{\eta}^{\varepsilon}\tau(\Delta_2 p)\,dp+(\eta-\varepsilon+h\tau(\Delta_2\eta))\left[\varepsilon-\eta+\dfrac{\Delta_1^2}{6}(\varepsilon-\eta)^3\dfrac{\partial^2 b}{\partial\eta^2}\Big|_0\right]}{\Delta_1\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 b}{\partial\eta^2}\Big|_{\eta=0}\right)(\varepsilon-\eta)^2}\right]\right\}\times$$
$$\times\left(1+h\frac{\partial\tau(\Delta_2\eta)}{\partial\eta}\right)d\eta. \tag{30}$$

Соотношение (30) совпадает при $L\to\infty$ с (17), что указывает на применимость уравнения (24) к произвольному пакету в этом пределе (это соответствует стохастизации пакета за счет случайных систем отсчета).

Рассмотрим случай $h\ll 1$, т. е. пакет малой амплитуды. В этом случае в первом порядке по h с учетом того, что τ отлично от нуля только в области $[0, l]$, получаем

$$\langle V\rangle = \frac{\tau_0}{2\sqrt{2\pi}}\left[1-\Phi\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}\,\Delta_1\sqrt{\dfrac{\partial^2 b}{\partial\eta^2}\Big|_0}}\right)\right]\int\limits_0^{1/\Delta_2}(\varepsilon-\eta)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{(\eta-\varepsilon)^2}{2}\right)\left[\frac{\partial\tau(\Delta_2\eta)}{\partial\eta}-2\tau(\Delta_2\eta)(\varepsilon-\eta)\right]d\eta. \tag{31}$$

И, наконец, в случае $\Delta_2\gg 1$ (времена, большие по сравнению со временем опрокидывания пакета), оценивая интеграл в (31), получим (пренебрегая $\tau(0)$)

$$\langle V\rangle \approx \frac{\tau_0}{2\sqrt{2\pi}}\left[1-\Phi\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}\,\Delta_1\sqrt{\dfrac{\partial^2 b}{\partial\eta^2}\Big|_0}}\right)\right]\times$$
$$\times\,\varepsilon\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\frac{\partial\tau(z)}{\partial z}\Big|_0. \tag{32}$$

Таким образом, в этом приближении и в нулевом по Δ_1 получаем

$$\langle V\rangle \sim \varepsilon\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\right),$$

что соответствует возникновению вязкого затухания при больших ε. Отметим, что нарушение автомодельности по Δ_1 происходит не аналитическим образом. Возникающая экспоненциальная поправка служит примером неразложимой в ряд функции в окрестности $\Delta_1\ll 1$. Другие предельные случаи могут быть изучены аналогично на соответствующем этапе по соотношениям (29)—(31).

Авторы признательны Б. Б. Кадомцеву за обсуждение и полезные замечания к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. В. Руденко, С. И. Солуян, Теоретические основы нелинейной акустики, изд. Наука, М., 1975
2. Мощные ультразвуковые поля, под ред. Л. Д. Розенберга, изд. Наука, М., 1968.

3. С. А. Ахманов, Изв. вузов — Радиофизика, **17**, № 4, 541 (1974).
4. С. С. Моисеев, А. В. Тур, В. В. Яновский, Изв. вузов — Радиофизика, **20**, № 7, 1033 (1977).
5. О. В. Руденко, А. С. Чиркин, ЖЭТФ, **67**, № 15 (11), 1903 (1974).
6. В. А. Красильников, О. В. Руденко, А. С. Чиркин, Акуст. ж., **21**, № 1, 124 (1975).
7. А. С. Монин, Я. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. II, изд. Наука, М., 1976.
8. В. И. Кляцкин, Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами, изд. Наука, М., 1975.
9. В. И. Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах, изд. Наука, М., 1973.
10. Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, Системы квазилинейных уравнений и их применение к газовой динамике, изд. Наука, М., 1968.
11. Г. В. Ефимов, Нелокальные взаимодействия квантованных полей, изд. Наука, М., 1977.

Поступила в редакцию
10 октября 1978 г.,
после доработки
24 июля 1979 г.

INTERACTION OF A PACKET WITH RANDOM NOISE IN BURGERS' EQUATION

S. S. Moiseev, A. V. Tur, V. V. Yanovskij

The paper studies interaction between a determinate packet and random noise. Exact averaged equations have been obtained for the packet as well as analytical expressions describing its evolution. A coefficient of the turbulent viscosity has been calculated.