ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 538.56 : 519.25

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ СИСТЕМ, МАКСИМИЗИРУЮЩИХ ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ/ШУМ

И. Е. Позументов

Определяются основные статистические характеристики адаптивных антенных систем, максимизирующих отношение сигнал/шум: среднее значение и матрица корреляции вектора весовых коэффициентов, мощность помехи и полезного сигнала и отношение сигнал/шум на выходе схемы, спектрально-корреляционные характеристики системы. Анализ проводится с учетом конечного времени корреляции поступающих гауссовых помех.

1. В связи с проблемой выделения полезного сигнала из смеси с шумом (помехами) в последнее время все более широкое распространение получают адаптивные антенные системы. Последние используются для непрерывной оптимизации диаграммы направленности, вырабатывая нули в направлениях прихода мешающих помех. Наиболее распространенными критериями функционирования адаптивных систем являются минимум среднего квадрата ошибки [1] и максимум отношения сигнал/шум на выходе схемы [2]. В настоящей работе исследуются статистические характеристики адаптивных систем, максимизирующих отношение сигнал/шум, и используемые как в радиолокации [3–5], так и для выделения слабых акустических сигналов [6, 7]. Следует отметить, что в упомянутых работах при анализе эффективности систем использовалось предположение о некоррелированности огибающих входных помех с вектором весовых коэффициентов. Такое приближение, как показано ниже, оправдано в случае δ-коррелированных входных помех. Точные методы анализа, использованные в [8, 9], для отыскания статистических характеристик одноканального автокомпенсатора здесь неприменимы из-за высокого порядка системы дифференциальных стохастических уравнений, описывающих поведение системы. Поэтому для определения статистических характеристик адаптивной системы в настоящей работе использован приближенный способ анализа, приводящий к корректным результатам в первом порядке малости по параметру $\alpha = \tau_к/\tau$, где $\tau_к$ — время корреляции огибающих помех, τ — постоянная времени фильтров цепей корреляционной обратной связи. Заметим, что некоторые статистические характеристики подобных систем иным способом были найдены в [10].

2. Функциональная схема адаптивной антенной системы, максимизирующей отношение сигнал/шум, приведена на рис. 1. Здесь $V^т = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$, где v_i — комплексная огибающая шума на i-м элементе решетки, индекс «т» означает транспонирование; $\boldsymbol{W}$ — вектор весовых коэффициентов; $\boldsymbol{W}^т V$ — выходной сигнал адаптивной системы. Вектор $\boldsymbol{S}$ представляет собой вектор фаз полезного сигнала, направление прихода которого считается известным:

$$S^т = \left(e^{j\varphi_1},\ e^{j\varphi_2},\ \ldots,\ e^{j\varphi_N}\right). \qquad (1)$$

Далее будем полагать, что полезный сигнал имеет существенно меньшую мощность по сравнению с помехами, и его влиянием на вектор весовых коэффициентов можно пренебречь. Тогда стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее поведение $W(t)$, имеет вид

$$\tau \frac{d}{dt} W(t) + (I + \gamma M) W(t) = \gamma S^*, \tag{2}$$

где I — единичная матрица, $M = V^* V^{\tau}$, индекс «*» означает комплексное сопряжение. Вектор огибающих $V(t)$ будем считать комплексным гауссовым процессом, удовлетворяющим следующему уравнению:

$$\frac{d}{dt} V(t) + \nu V(t) = \xi(t), \tag{3}$$

где $\xi(t)$ — комплексный δ-коррелированный случайный процесс с $\langle \xi \rangle = 0$ и $\langle \xi \xi_{\tau}^{\tau} \rangle = D\delta(\tau)$. Тогда $V(t)$ является комплексным гауссовым процессом с конечным временем корреляции $\tau_{к} = 1/\nu$ и матрицей корреляции $\langle V^* V^{\tau} \rangle = (1/2\nu) D$. Для определения среднего значения вектора весовых коэффициентов $\langle W(t) \rangle$ запишем следующее из (2), (3) уравнение для вектора моментов $\langle MW \rangle$:

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} + 2\nu\right) \langle MW \rangle = 2\nu \langle M \rangle \langle W \rangle + \frac{\gamma}{\tau} \langle M \rangle S^* - \frac{\gamma}{\tau} \langle M^2 W \rangle. \tag{4}$$

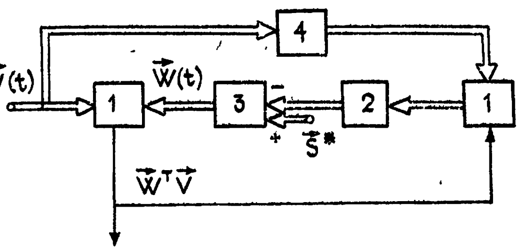

Рис. 1. Функциональная схема адаптивной антенной системы, максимизирующей отношение сигнал/шум;
1 — перемножители; *2* — НЧ фильтр; *3* — усилитель-сумматор с коэффициентом усиления γ; *4* — блок комплексного сопряжения. Двойными линиями обозначены векторные связи.

Если ограничиться при нахождении статистических характеристик системы учетом первого порядка малости по параметру $\alpha = \tau_{к}/\tau$, то можно воспользоваться приближением некоррелированности случайной матрицы $M(t)$ и вектора $W(t)$ в уравнении (4), т. е. [11]

$$\langle M^2 W \rangle \approx \langle M \rangle (\langle M \rangle + PI) \langle W \rangle,$$

где $P = \mathrm{Sp} \langle M \rangle$ — суммарная мощность помех, поступающих на решетку. Переходя для удобства в Q-матричное представление, диагонализирующее матрицу ковариации входных помех $Q^{\tau} \langle M \rangle Q = \Lambda$, в результате получим систему уравнений для определения стационарного среднего значения вектора весовых коэффициентов $\Omega = Q^{\tau} \langle W \rangle_{уст}$:

$$\begin{gathered} \Omega + \gamma R = \gamma F^*, \\ \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) R = \Lambda \Omega + \frac{\alpha}{2} \gamma \Lambda F^* - \frac{\alpha}{2} \gamma \Lambda [\Lambda + PI] \Omega, \end{gathered} \tag{5}$$

где $R = Q^{\mathrm{T}} \langle MW \rangle_{\text{уст}}$, $F^* = Q^{\mathrm{T}} S^*$. Отсюда нетрудно получить выражения для элементов вектора Ω:

$$\omega_i = \frac{\gamma f_i^*}{1 + \gamma\lambda_i - \frac{\alpha}{2}\gamma\lambda_i \gamma P}. \tag{6}$$

Можно показать (см. также [12–14]), что условия применимости рассматриваемого приближения имеют вид

$$\alpha, \ \alpha\gamma P \ll 1. \tag{7}$$

В рамках (7) отличие (6) от своего оптимального значения $\omega_{i\,\mathrm{opt}} = f_i^*/\lambda_i$ весьма мало. Следовательно, для определения среднего значения вектора весовых коэффициентов можно использовать приближение некоррелированности $M(t)$ и $W(t)$ в исходном уравнении (2), что соответствует $\alpha = 0$ или $\tau_{\text{к}} = 0$. Однако, как показано ниже, такое приближение совершенно неприемлемо при нахождении матрицы ковариации вектора весовых коэффициентов.

3. Из (2) следует уравнение для матрицы корреляции $\langle WW^+ \rangle$:

$$\begin{aligned}\left(\tau \frac{d}{dt} + 2I\right) \langle WW^+ \rangle &= \gamma S^* \langle W^+ \rangle + \gamma \langle W \rangle S^{\mathrm{T}} - \\ &- \gamma \langle MWW^+ \rangle - \gamma \langle WW^+ M \rangle.\end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что $\langle WW^+M \rangle^+ = \langle MWW^+ \rangle$ (индекс «+» означает эрмитово сопряжение).

Записывая уравнение для $\langle MWW^+ \rangle$, аналогичное (4), и используя в нем приближение некоррелированности $M(t)$ с $W(t)$, получим в Q-матричном представлении систему для определения элементов K_{ij} матрицы $Q^{\mathrm{T}} \langle WW^+ \rangle_{\text{уст}} Q$:

$$\begin{aligned} 2K_{ij} &= \gamma f_i^* \omega_j^* + \gamma \omega_i f_j - \gamma \varphi_{ij} - \gamma \varphi_{ji}^*, \\ (1+\alpha)\varphi_{ij} &= \lambda_i K_{ij} + \frac{\alpha}{2}\gamma\lambda_i f_i^* \omega_j^* + \frac{\alpha}{2}\gamma\lambda_i \omega_i f_j - \\ &- \frac{\alpha}{2}\gamma\lambda_i(\lambda_i + P)\omega_i\omega_j^* - \frac{\alpha}{2}\gamma\lambda_i [\lambda_j \omega_i \omega_j^* + \\ &+ \mathrm{Sp}(\langle M \rangle \langle W \rangle_{\text{уст}} \langle W^+ \rangle_{\text{уст}})\delta_{ij}], \end{aligned} \tag{9}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Отсюда получим

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \frac{\gamma^2 f_i^* f_j}{(1+\gamma\lambda_i)(1+\gamma\lambda_j)} + \frac{\alpha}{2}\gamma P \frac{\gamma^2 f_i^* f_j [\gamma\lambda_j(1+\gamma\lambda_i) + \gamma\lambda_i(1+\gamma\lambda_j)]}{(1+\gamma\lambda_i)^2(1+\gamma\lambda_j)^2} + \\ &+ \frac{\alpha}{2}\frac{\gamma\lambda_i}{1+\gamma\lambda_i}\delta_{ij}\gamma\,\mathrm{Sp}(\langle M \rangle \langle W \rangle_{\text{уст}} \langle W^+ \rangle_{\text{уст}}). \end{aligned} \tag{10}$$

Из (10), (6) легко определить матрицу ковариации Σ вектора весовых коэффициентов

$$\sigma_{ij} = \frac{\alpha}{2}\frac{\gamma\lambda_i}{1+\gamma\lambda_i}\delta_{ij}\gamma\,\mathrm{Sp}(\langle M \rangle \langle W \rangle_{\text{уст}} \langle W^+ \rangle_{\text{уст}}). \tag{11}$$

Отметим, что матрица ковариации Σ является диагональной в Q-матричном представлении, т. е. флуктуации вектора $\boldsymbol{W}(t)$ полностью определяются матрицей ковариации входных помех $\langle M\rangle$. При $\gamma\lambda_l \gg 1$ неидеальностью фильтров цепей корреляционной связи можно пренебречь; тогда из (11) будем иметь

$$\Sigma = \frac{\alpha}{2}\gamma \,\mathrm{Sp}\,(\langle M\rangle \langle \boldsymbol{W}\rangle_{\text{уст}} \langle \boldsymbol{W}^{+}\rangle_{\text{уст}})\, I \equiv \sigma I\,, \tag{11a}$$

т. е. в этом случае матрица ковариации вектора $\boldsymbol{W}(t)$ будет диагональной и в исходном представлении. Заметим также, что с ростом эффективной мощности помех $\gamma\lambda_l$ флуктуации вектора $\boldsymbol{W}$ увеличиваются. Требование ограниченности этих флуктуаций находится в противоречии с требованием минимально возможного времени настройки системы, которое определяется из (5) и обратно пропорционально $\gamma\lambda_l$. Поэтому в выборе коэффициента усиления γ необходимо искать компромиссное решение в зависимости от целей и задач, стоящих перед системой.

4. Определим характеристики преобразования системой шума и полезного сигнала. Установившаяся мощность помехи на выходе схемы $P_V = \langle\, |\, \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} V\,|^2\, \rangle_{\text{уст}}$ представляет собой

$$P_V = \boldsymbol{S}^{+}\langle \boldsymbol{W}^{*}\rangle - \frac{1}{\gamma}\langle \boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{*}\rangle$$

и в рассматриваемом приближении примет вид

$$P_V = P_{V0} + \sigma P\,, \qquad P_{V0} = \sum_{i=1}^{N} \frac{|\, f_i|^2}{\lambda_i} \qquad (\gamma\lambda_i \gg 1)\,, \tag{12}$$

т. е. увеличение мощности помехи на выходе схемы по сравнению с ее минимальным значением полностью определяется флуктуациями вектора весовых коэффициентов.

Аналогично получим выражение для мощности полезного сигнала на выходе адаптивной решетки:

$$P_s = \left(1 + \frac{\alpha}{2}\gamma P\right) P_{s0} + \sigma P_{s\,\text{вх}} \qquad (\gamma\lambda_i \gg 1), \tag{13}$$

где S_i — амплитуда сигнала в i-м элементе решетки; $P_{s\,\text{вх}} = \sum\limits_{i=1}^{N} S_i^2$, $P_{s0} = \sum\limits_{i,\,j=1}^{N} S_i S_j \dfrac{|\, f_i\,||\, f_j\,|}{\lambda_i\lambda_j}$. Отсюда находим μ — отношение сигнал/шум:

$$\mu = \frac{P_s}{P_V} = \frac{P_{s0}}{P_{V0}}\left[1 + \frac{\alpha}{2}\gamma P - \sigma\frac{P}{P_{V0}}\right] + \sigma\frac{P}{P_{V0}}\frac{P_{s\,\text{вх}}}{P}. \tag{14}$$

Таким образом, отношение сигнал/шум на выходе системы определяется заданным уровнем подавления помех P/P_{V0}, отношением сигнал/шум на входе решетки $P_{s\,\text{вх}}/P$ и зависит от флуктуаций вектора весовых коэффициентов σ.

5. В заключение определим спектрально-корреляционные характеристики рассматриваемой адаптивной антенной системы. Уравнение для корреляционной матрицы управляющих напряжений имеет вид

$$\left(\tau\frac{d}{d\theta}+I\right)\langle W_\theta W^+\rangle=\gamma S^*\langle W^+\rangle-\gamma\langle M_\theta W_\theta W^+\rangle,$$
$$f_\theta=f(t+\theta), \tag{15}$$

с начальным условием $\langle W_\theta W^+\rangle|_{\theta=0}=\langle WW^+\rangle_{\text{уст}}$. Отсюда с точностью до членов первого порядка малости по параметру α найдем в матричном представлении

$$\sigma_{ij}(\theta)=\sigma_{ij}\exp\left[-\frac{1}{\tau}(1+\gamma\lambda_i)\,|\,\theta\,|\,\right], \tag{16}$$

т. е. полоса спектра мощности флуктуаций $W(t)$ растет с ростом мощности помех $\gamma\lambda_i$. Таким образом, увеличение помехи и мощности полезного сигнала на выходе схемы (см. (12), (13)) происходит за счет их паразитной модуляции флуктуациями вектора весовых коэффициентов. Полосы спектра мощности сигнала и помехи на выходе схемы увеличиваются, т. е. они становятся более быстрыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Уидроу и др., ТИИЭР, **55**, № 12, 78 (1967).
2. S. P. Applebaum, IEEE Trans., **AP-24**, № 5, 585 (1976).
3. Special Issue on Active and Adaptive Antennas, IEEE Trans., **AP-12**, March (1964).
4. Теоретические основы радиолокации, под ред. Я. Д. Ширмана, изд. Сов. радио, М., 1970.
5. В. Д. Пономарева, В. М. Комаров, Зарубежная радиоэлектроника, № 8, 33 (1977).
6. Special Issue on Niclear Test Detection, Proc. IEEE, **53**, December (1965).
7. D. J. Edelblute, J. M. Fisk, G. L. Kinnison, J. Acoust. Soc. Am., **41**, № 1, 199 (1967).
8. А. А. Мальцев, А. И. Саичев, Радиотехника и электроника, **23**, № 12, 2543 (1978).
9. А. А. Дубков, А. А. Мальцев, Изв. вузов — Радиофизика, **22**, № 3, 353 (1979).
10. L. E. Brennan, E. L. Pugh, I. S. Reed, IEEE Trans., **AES-7**, № 2, 254 (1971).
11. I. S. Reed, IEEE Trans., **IT-8**, 194 (1962).
12. А. А. Мальцев, О. В. Музычук, И. Е. Позументов, Радиотехника и электроника, **23**, № 7, 1401 (1978).
13. А. А. Мальцев, И. Е. Позументов, Изв. вузов — Радиофизика, **22**, № 2, 150 (1979).
14. С. Н. Арзамасов, А. Н. Малахов, О. В. Музычук, И. Е. Позументов, Радиотехника и электроника, **24**, № 3, 545 (1979).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 21 марта 1979 г.

STATISTICAL CHARACTERISTICS OF ADAPTIVE ANTENNA SYSTEMS MAXIMAZING SIGNAL-TO-NOISE RATIO

I. E. Pozumentov

The basic statistical characteristics of adaptive antenna systems are defined which maximize signal-to-noise ratio: the mean value and the correlation matrix of weight coefficient vectors, the power of the useful signal, noise and signat-to-noise ratio at the diagram output, spectral correlation characteristics of the system. The analysis is carried out taking into account the finite time of correlation of Gaussian noises.