ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 12 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 538.56 : 538.311

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО СИГНАЛА ПРИ РЕЗКОМ ИЗМЕНЕНИИ СВОЙСТВ СРЕДЫ СО ВРЕМЕНЕМ

В. В. Борисов

Построено точное решение, учитывающее импульсный характер электромагнитного поля. Подробно рассмотрено изменение структуры составляющих векторов поля для временной зависимости первоначального сигнала — единичной функции Хэвисайда, включения синусоидальных колебаний.

Особенности электромагнитного поля в среде, свойства которой меняются со временем, обсуждались в [1–5]. Для диспергирующих сред основное внимание уделено гармоническим колебаниям. Пример решения импульсной задачи для сигнала, временная зависимость которого до момента изменения свойств среды — дельта-функция Дирака, приведен в [2] (скалярная задача, уравнение Клейна — Гордона). При этом бесконечно малая длительность первоначального сигнала существенно упрощает структуру поля (см. ниже).

В настоящей работе рассмотрим преобразование составляющих векторов электромагнитного сигнала при мгновенном изменении свойств среды. До момента времени $t=0$ среда без дисперсии, при $t>0$ диспергирующая среда — бесстолкновительная плазма в линейном приближении. В рамках выбранной модели построим точное решение. Рассмотрим особенности поля, связанные с импульсным характером первоначального сигнала и дисперсией среды, переход к установившимся стационарным полям и решению при гармонической зависимости от времени, Найдем индуцируемые в среде токи. Ограничимся случаем полубесконечного сигнала с фиксированным передним фронтом.

1. Предположим, что в положительном направлении оси x декартовой системы координат распространяется плоская электромагнитная волна, составляющие вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ и вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ которой

$$E_y = B_z = h(\tau - x)\, u(\tau - x) \qquad (\tau < 0). \tag{1}$$

Здесь $h(\tau - x) = \begin{cases} 1, & \tau - x > 0 \\ 0, & \tau - x < 0 \end{cases}$ — единичная функция Хэвисайда, $u(\tau - x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $\tau = ct$, c — скорость света. Система единиц Гаусса. Для краткости изложения положим $\varepsilon = \mu = 1$. В момент $\tau = 0$ свойства среды меняются скачком и при $\tau > 0$ среда — бесстолкновительная плазма. Электромагнитное поле при $\tau = 0$ отлично от нуля в полупространстве $x < 0$.

Исходные уравнения задачи следуют из системы уравнений Максвелла

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial \tau}, \qquad -\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \tau} + \frac{4\pi}{c}\, e\hat{n} v_y. \tag{2}$$

Плотность заряженных частиц $\hat{n} = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ n, & \tau > 0 \end{cases}$, e, m — заряд и масса электрона. Составляющая вектора направленной скорости электронов v_y. В линейном приближении:

$$\frac{\partial v_y}{\partial \tau} = \frac{e}{mc} E_y. \tag{3}$$

Ионы неподвижны, их плотность равна n, $\tau > 0$.

При $\tau > 0$ особенность на фронте первоначального сигнала сохраняется. Начальные данные вне фронта следуют из уравнений (2), (3). Полагаем, что E_y, $\frac{\partial}{\partial x} E_y$, $\frac{\partial}{\partial x} B_z$ — ограниченные функции и направленная скорость заряженных частиц в момент образования равна нулю. Как обычно [6, 3], интегрируя (2) по переходной области $\Delta\tau$, $\tau=0 \in \Delta\tau$ и $\Delta\tau \to 0$, получим

$$E_y(0-, x) = E_y(0+, x), \quad B_z(0-, x) = B_z(0+, x). \tag{4}$$

Дифференцируя (4) по x, из (2), (3) будем иметь

$$\left.\frac{\partial}{\partial \tau} E_y\right|_{\tau=0-} = \left.\frac{\partial E_y}{\partial \tau}\right|_{\tau=0+}, \quad \left.\frac{\partial B_z}{\partial \tau}\right|_{\tau=0-} = \left.\frac{\partial B_z}{\partial \tau}\right|_{\tau=0+}. \tag{5}$$

Составляющая вектора напряженности электрического поля E_y при $\tau > 0$, согласно (2), (3), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial \tau^2} - \frac{\omega_0^2}{c^2} E_y = 0, \qquad \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}. \tag{6}$$

Функция Римана уравнения (6) $R = J_0\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{(\tau-\tau')^2 - (x-x')^2}\right)$ ($J_0(z)$ — функция Бесселя); $E_y(0+, x)$, $\left.\frac{\partial}{\partial \tau} E_y\right|_{\tau=0+}$ вычисляются по заданному при $\tau < 0$ полю. Учитывая особенность на фронте, согласно известным формулам [7], приходим к соотношению

$$\begin{aligned} E_y = \frac{1}{2}\Bigg\{ & h(-x-\tau)\, u(-x-\tau) + h(\tau-x)\, u(\tau-x) + \\ & + \int_{-\tau}^{\tau} d\beta\, h(-x-\beta)\, u(-x-\beta) \frac{\partial}{\partial \tau} J_0\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-\beta^2}\right) + \\ & + \int_{-\tau}^{\tau} d\beta \left[\delta(-x-\beta) u(-x-\beta) - h(-x-\beta) \frac{\partial}{\partial \beta} u(-x-\beta)\right] \times \\ & \times J_0\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-\beta^2}\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Для сигнала при $\tau < 0$ $E_y = B_z = \delta(\tau - x)$ легко получить

$$E_y = \delta(\tau - x) - \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\frac{\tau + x}{\tau - x}}\, J_1\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2 - x^2}\right) \quad (x \in [-\tau, \tau]). \tag{8}$$

Формула (8) согласуется с результатом работы [2]. Поле отлично от нуля в области, ограниченной характеристиками $\tau - x = 0$ — фронт заданной волны, $\tau + x = 0$ — фронт волны, связанной с откликом среды на сигнал, локализованный в момент $\tau = 0$ при $x = 0$, и не симметрично относительно плоскости $x = 0$. При $\tau = -x$ $E_y = 0$ и в области отрицательных значений x $E_y(x, \tau)$ — непрерывная функция.

Для электромагнитного сигнала бесконечной протяженности, распространяющегося в положительном направлении оси x, $\tau < 0$, $E_y = B_z = f(\tau - x)$, $f'(\tau - x)$ — дифференцируемая функция, решение задачи (4)—(6):

$$E_y = f(\tau - x) - \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{c}\int\limits_{x-\tau}^{x+\tau} ds \sqrt{\frac{\tau - (s - x)}{\tau + (s - x)}} \times \\ \times J_1\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2 - (s - x)^2}\right) f(-s). \tag{9}$$

По известным функциям $E_y(x, \tau)$ и начальным условиям составляющие векторов $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v}$ (и, следовательно, вектора плотности тока $\boldsymbol{j} = en\boldsymbol{v}$) найдем из уравнений (2), (3).

2. Пусть электромагнитное поле до момента резкого изменения свойств среды $\tau = 0$ $E_y = B_z = h(\tau - x)$ — единичная функция Хэвисайда. Из формулы (7) после преобразований следуют соотношения, $\tau > 0$:

$$E_{y_{\tau+x>0,\ \tau-x>0}} = \frac{1}{2}\left\{1 + J_0\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2 - x^2}\right) + \int\limits_{x}^{\tau} ds \frac{\partial}{\partial \tau} J_0\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2 - s^2}\right)\right\}; \tag{10}$$

$$E_{y_{\tau+x<0}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{c}\int\limits_{-\tau}^{\tau} ds \sqrt{\frac{\tau + s}{\tau - s}}\, J_1\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2 - s^2}\right). \tag{11}$$

Формула (11) справедлива в области изменения переменных $\tau + x < 0$, $\tau > 0$ и совпадает с результатом решения задачи для сигнала бесконечной протяженности (9) $f(-s) = 1$. В области изменения переменных τ, x, ограниченной характеристиками $\tau - x = 0$, $\tau + x = 0$, решение определяется формулой (10). Таким образом, существенно ограничение длительности сигнала фронтом $\tau - x = 0$. При $\tau = -x$, как следует из (10), (11), решение непрерывно.

Интеграл (11) сводится к табличному [8], легко получить

$$E_{y_{\tau>0,\ \tau+x<0}} = \cos\left(\frac{\omega_0}{c}\tau\right). \tag{12}$$

До прихода характеристики $\tau + x = 0$ в точку наблюдения $x < 0$ первоначальный сигнал — единичная ступенька, возбуждает колебания с частотой ω_0. Составляющая E_y — функция времени и не зависит от координаты x.

На фронте $\tau - x = 0$ разрыв первого рода, что совместно с решением (12) приводит к условиям на характеристиках $\tau - x = 0+$, $\tau + x = 0+$:

$$E_y(\tau - x,\ 0+) = \cos\left(\frac{1}{2}\frac{\omega_0}{c}(\tau - x)\right), \qquad E_y(0,\ \tau + x) = 1. \tag{13}$$

Условия (13) сводят решение в области $\tau - x > 0$, $\tau + x > 0$ (10) к решению характеристической задачи Коши (6), (13). Согласно известным соотношениям [7], получим

$$E_{y_{\tau-x>0,\ \tau+x>0}} = J_0\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2 - x^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{c} \times$$

$$\times \int_0^{\tau-x} ds \sin\left(\frac{1}{2}\frac{\omega_0}{c}s\right) J_0\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{(\tau-x-s)(\tau+x)}\right).$$

Замена $t^2 = 1 - \dfrac{s}{\tau-x}$ приводит к интегральному представлению функций Ломмеля от двух переменных $U_n(w, z)$ [9]:

$$U_2(w, z) = w\int_0^1 dt\, t \sin\left\{\frac{1}{2} w(1-t^2)\right\} J_0(zt),$$

$$z = \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2 - x^2}, \qquad w = \frac{\omega_0}{c}(\tau - x).$$

Формула (10) сводится к выражению

$$E_{y_{\tau-x>0,\ \tau+x>0}}(\tau, x) = J_0\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right) - U_2\left(\frac{\omega_0}{c}(\tau-x),\right.$$
$$\left.\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right) = U_0\left(\frac{\omega_0}{c}(\tau-x),\ \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right). \qquad (14)$$

Отметим, что формулы (12), (14) совпадают с решением задачи о падении плоской электромагнитной волны на фронт ионизации (фронт изменения параметров среды), скорость перемещения которого V больше скорости света, при $V \to \infty$ [10].

Из (12), (14) следует, что результат для ограниченного сигнала существенно отличается от случая сигнала бесконечной протяженности. Ограниченный передним фронтом сигнал, начиная с момента $\tau = |x|$, приводит к сложным колебаниям. Решение задачи через функции Ломмеля двух переменных включает переходной процесс и установившийся режим. Так в области $x < 0$ $\dfrac{w}{z} = \sqrt{\dfrac{\tau - x}{\tau + x}} > 1$ при конечных τ, x, и следует перейти к равномерно сходящемуся ряду по степеням z/w — функциям $V_n(w, z)$. Так как $U_0(w, z) = V_2(w, z) + \cos\left(\dfrac{w}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{z^2}{w}\right)$ [9], то

$$E_{y_{\tau+x>0,\ x<0}} = \cos\left(\frac{\omega_0}{c}\tau\right) + V_2\left(\frac{\omega_0}{c}(\tau-x),\ \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right).$$

При выполнении условия $\dfrac{w}{z} = \sqrt{\dfrac{\tau - x}{\tau + x}} \gg 1$ (окрестность характеристики $\tau + x = 0$) $E_y \approx \cos\left(\dfrac{\omega_0}{c}\tau\right) + \dfrac{\tau + x}{\tau - x} J_2\left(\dfrac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2 - x^2}\right)$. В пределе $\tau \to \infty$ при конечных значениях x $w/z \to 1$ и $E_y \to \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\omega_0}{c}\tau\right)$. Устанавливаются гармонические колебания с частотой ω_0. Их амплитуда равна 1/2 от значения в области $\tau + x < 0$ (12). При $x = 0$, что соответствует положению фронта в момент изменения свойств среды,

$$E_y = U_0\left(\frac{\omega_0}{c}\tau,\ \frac{\omega_0}{c}\tau\right) = \frac{1}{2}\left\{J_0\left(\frac{\omega_0}{c}\tau\right) + \cos\left(\frac{\omega_0}{c}\tau\right)\right\}.$$

Переходной процесс убывает $\sim \tau^{-1/2}$.

При $x>0$ и конечных τ $\dfrac{w}{z}=\sqrt{\dfrac{\tau-x}{\tau+x}}<1$, в окрестности фронта сигнала, согласно (14), $E_y \approx J_0\left(\dfrac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right)$. В установившемся режиме, $\tau\to\infty$, $E_y\to\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\omega_0}{c}\tau\right)$. Таким образом, электромагнитное поле, отличное от нуля, при $\tau=0$ в полупространстве $x<0$ в пределе $\tau\to\infty$ возбуждает колебания в области $x\in(-\infty,\infty)$, с чем и связано уменьшение амплитуды в два раза.

3. По найденным в п. 2 формулам для составляющей вектора напряженности электрического поля построим B_z, составляющую вектора магнитной индукции, и v_y, составляющую вектора направленной скорости электронов. При $\tau<0$ $B_z=h(\tau-x)$.

В области $x+\tau<0$ из уравнения (3) при нулевых начальных условиях — направленная скорость частиц в момент образования равна нулю, получим

$$v_y=\frac{e}{m\omega_0}\sin\left(\frac{\omega_0}{c}\tau\right). \tag{15}$$

Из системы (2) и решения (12) следует уравнение $\dfrac{\partial B_z}{\partial\tau}=0$, тогда, согласно условиям (4), $B_z=1$. Таким образом, в рассматриваемом приближении описания свойств среды значения магнитного поля при $\tau<0$ и $\tau>0$ равны. Электрическое поле приводит к направленному движению частиц, причем $\dfrac{1}{2}nmv_y^2+\dfrac{1}{8\pi}E_y^2=\dfrac{1}{8\pi}$ и плотность энергии при $\tau>0$, $\tau+x<0$: $W=\dfrac{1}{8\pi}(E_y^2+B_z^2)+\dfrac{nmv_y^2}{2}=\dfrac{1}{4\pi}$ совпадает с величиной W при $\tau<0$.

Найдем v_y, B_z в области изменения переменных $\tau-x>0$, $\tau+x>0$. До момента прихода фронта сигнала в точку $x>0$ $(\tau=x>0)$ направленное движение заряженных частиц отсутствует, E_y — ограниченная функция, и из уравнения (3) и формулы (14) будем иметь $v_{y_{x>0}}=\dfrac{e}{mc}\displaystyle\int_x^\tau ds\,U_0\left(\dfrac{\omega_0}{c}(s-x),\ \dfrac{\omega_0}{c}\sqrt{s^2-x^2}\right)$. С помощью рекуррентных формул для функций Ломмеля от двух переменных [9] можно доказать тождество

$$U_0\left(\frac{\omega_0}{c}(\tau-x),\ \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right)=\frac{c}{\omega_0}\frac{\partial}{\partial\tau}U_1\left(\frac{\omega_0}{c}(\tau-x),\ \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right)+\frac{1}{2}J_0\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right). \tag{16}$$

Получим

$$v_{y_{x>0}}=\frac{e}{m\omega_0}\left\{\frac{1}{2}\int_{(\omega_0/c)x}^{(\omega_0/c)\tau}d\psi\,J_0\left(\sqrt{\psi^2-\left(\frac{\omega_0}{c}x\right)^2}\right)+U_1\left(\frac{\omega_0}{c}(\tau-x),\ \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right)\right\}. \tag{17}$$

При отрицательных значениях x скорость электронов в момент $\tau=-x$ отлична от нуля. Формула (15) определяет начальные условия. Тогда

$$v_{y_{\substack{x<0\\ \tau>-x}}} = \frac{e}{mc}\left\{\frac{c}{\omega_0}\sin\left(\frac{\omega_0}{c}(-x)\right) + \int_{-x}^{\tau} ds U_0\left(\frac{\omega_0}{c}(s-x),\ \frac{\omega_0}{c}\sqrt{s^2-x^2}\right)\right\}.$$

Согласно тождеству (16) и соотношению $U_1(w, 0) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}w\right)$ [9] получим $v_y = \frac{e}{m\omega_0}\left\{U_1\left(\frac{\omega_0}{c}(\tau - x),\ \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right) + \frac{1}{2}\int_{(-\omega_0/c)x}^{(\omega_0/c)\tau} ds \times \right.$ $\left.\times J_0\left(\sqrt{s^2-\left(\frac{\omega_0}{c}x\right)^2}\right)\right\}$. Так как $\frac{w}{z} = \sqrt{\frac{\tau - x}{\tau + x}} > 1$, то, переходя к функциям $V_1(w, z)$, будем иметь

$$v_{y_{x<0,\ \tau>-x}} = \frac{e}{m\omega_0}\left\{\sin\left(\frac{\omega_0}{c}\tau\right) + V_1\left(\frac{\omega_0}{c}(\tau-x),\ \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\int_{(-\omega_0/c)x}^{(\omega_0/c)\tau} ds J_0\left(\sqrt{s^2-\left(\frac{\omega_0}{c}x\right)^2}\right)\right\}. \tag{18}$$

В пределе $\tau\to\infty$ (x конечно) из (17), (18) следует

$$v_{y_{\tau\to\infty}} \to \frac{e}{m\omega_0}\,\frac{1}{2}\left(\exp\left(-\frac{\omega_0}{c}|x|\right) + \sin\left(\frac{\omega_0}{c}\tau\right)\right).$$

Направленная скорость частиц в установившемся режиме меняется со временем по синусоидальному закону с частотой ω_0. Слагаемое $\frac{1}{2}\frac{e}{m\omega_0}\exp\left(-|x|\frac{\omega_0}{c}\right)$ описывает стационарное движение электронов в окрестности точки $x = 0$ — положения фронта сигнала в момент резкого изменения свойств среды.

Составляющую поля B_z найдем из первого уравнения системы (2) и решения (14). При $x > 0$ E_y, B_z имеют на фронте разрыв первого рода, тогда $-\frac{\partial}{\partial\tau}B_z = \frac{\partial}{\partial x}E_y = -\delta(\tau - x) + h(\tau-x)\frac{\partial}{\partial x}U_0\left(\frac{\omega_0}{c}(\tau - x),\right.$ $\left.\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right)$. До прихода фронта сигнала ($x > \tau$) $B_z \equiv 0$. Легко показать, что $\frac{\partial}{\partial x}U_2\left(\frac{\omega_0}{c}(\tau-x),\ \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\frac{\tau-x}{\tau+x}}\times$ $\times J_1\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right)$ и, следовательно,

$$B_{z_{\substack{x>0\\ \tau-x>0}}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{c}\int_{x}^{\tau} ds\sqrt{\frac{s+x}{s-x}}\,J_1\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{s^2-x^2}\right).$$

Аналогично при $x < 0$, $\tau + x > 0$, согласно (2), (14) при условии $B_z|_{\tau=-x} = 1$ (решение непрерывно на характеристике $\tau + x = 0$):

$$B_{z_{\substack{x<0\\ \tau+x>0}}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{c}\int_{-x}^{\tau} ds\sqrt{\frac{s+x}{s-x}}\,J_1\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{s^2-x^2}\right).$$

Из найденных формул в пределе $\tau\to\infty$ получим

$$B_{z\tau\to\infty}\to\begin{cases}\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\omega_0}{c}x\right), & x>0\\ 1-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\omega_0}{c}|x|\right), & x<0\end{cases}.$$

Таким образом, после окончания переходного процесса практически все стационарное магнитное поле локализовано при отрицательных значениях x, т. е. в области, где электромагнитное поле отлично от нуля в момент изменения свойств среды.

4. Рассмотрим составляющую вектора напряженности электрического поля в ионизованной области ($\tau>0$), если при $\tau<0$ сигнал — синусоидальные колебания с частотой ω, огибающая — единичная функция Хэвисайда, $E_y=B_z=h(\tau-x)\sin\left(\frac{\omega}{c}(\tau-x)\right)$. Начальные данные (4), (5) в этом случае

$$E_y(0+,\ x)=h(-x)(-1)\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right),$$

$$\left.\frac{\partial E_y}{\partial\tau}\right|_{\tau=0+}=h(-x)\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right).$$

Согласно формуле (7)

$$E_y=\frac{1}{2}\left\{h(\tau-x)\sin\frac{\omega}{c}(\tau-x)-h(-\tau-x)\sin\frac{\omega}{c}(\tau+x)\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\int\limits_{x-\tau}^{x+\tau}ds\,h(-s)\cos\left(\frac{\omega}{c}s\right)J_0\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-(s-x)^2}\right)+ \tag{19}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\omega_0}{c}\tau\int\limits_{x-\tau}^{\tau+x}ds\,h(-s)\,J_1\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-(s-x)^2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\omega}{c}s\right)}{\sqrt{\tau^2-(s-x)^2}}.$$

При $\tau+x<0$ решение совпадает с выражением (9) для сигнала бесконечной протяженности:

$$E_{y\tau+x<0}=\sin\left(\frac{\omega}{c}(\tau-x)\right)+\frac{1}{2}\frac{\omega_0}{c}\int\limits_{-\tau}^{\tau}d\psi\sin\left(\frac{\omega}{c}(\psi+x)\right)\times$$
$$\times\sqrt{\frac{\tau-\psi}{\tau+\psi}}\,J_1\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-\psi^2}\right).$$

Интеграл, входящий в последнее соотношение, сводится к табличным. Согласно [8], после вычислений получим

$$E_{y\tau+x<0}=\frac{1}{2}\left\{\left(-1+\frac{\omega}{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}\right)\sin\left(\tau\frac{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}{c}+\frac{\omega}{c}x\right)+\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{\omega}{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}\right)\sin\left(\tau\frac{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}{c}-\frac{\omega}{c}x\right)\right\}. \tag{20}$$

Таким образом, изменение условий распространения в момент $\tau=0$ приводит к преобразованию частоты сигнала. Решение ($\tau+x<0$, $\tau>0$) — колебания с частотой $\hat{\omega}=\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}$, отличной от частоты первоначального поля. То, что скорость изменения фазы колебаний (20) совпадает с фазовой скоростью в рассматриваемой среде для сигнала с частотой $\hat{\omega}$ $v_\phi=c\left(1-\frac{\omega_0^2}{\hat{\omega}^2}\right)^{-1/2}=c\frac{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}{\omega}>c$, позволяет интерпретировать результат как две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. Решение не симметрично относительно направления волн и согласуется с результатом при скачке диэлектрической проницаемости, полученным в [1, 11].

Как и в п. 2, при анализе формулы (19) в области изменения переменных $\tau-x>0$, $\tau+x>0$ сведем решение к характеристической задаче Коши. После вычислений будем иметь

$$E_{y\,\tau-x>0,\ \tau+x>0}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}\left\{\left(\omega-\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}\right)U_1\left((\tau-x)\times\right.\right.$$
$$\left.\times\frac{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}-\omega}{c},\ \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right)+\left(\omega+\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}\right)\times \tag{21}$$
$$\left.\times U_1\left((\tau-x)\frac{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}+\omega}{c},\ \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right)\right\}.$$

Соотношение (21) совпадает с решением работы [10] при $V\to\infty$.

Некоторые результаты, следующие из формулы (21). Поведение решения определяется отношением $\frac{w_\pm}{z}=\frac{\varkappa_\pm c}{\omega_0}\sqrt{\frac{\tau-x}{\tau+x}}$, где $\varkappa_\pm=\frac{\hat{\omega}}{c}\pm\sqrt{\left(\frac{\hat{\omega}}{c}\right)^2-\frac{\omega_0^2}{c^2}}=\frac{1}{c}\left(\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}\pm\omega\right)$. Так как $\hat{\omega}=\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}>\omega_0$, то для любых значений частоты первоначального сигнала $\omega\neq0$ $\frac{\varkappa_+c}{\omega_0}<1$, $\frac{\varkappa_-c}{\omega_0}<1$. В области $x>0$ при $\tau>x\frac{(\varkappa_+c)^2+\omega_0^2}{(\varkappa_+c)^2-\omega_0^2}$ $\frac{w_+}{z}>1$ и во втором слагаемом (21) перейдем к функциям $V_1(w_+,z)$. Параметр $\frac{\varkappa_-c}{\omega_0}<1$, $\frac{\tau-x}{\tau+x}<1$ ($x>0$) и $\frac{w_-}{z}<1$, т. е. $U_n(w_-,z)$ — равномерно сходящийся ряд по степеням w_-/z. Таким образом,

$$E_{y\,x>0,\ \tau>x}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}\left\{\left(\omega+\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}\right)\left[\sin\left(\frac{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}}{c}\tau-\frac{\omega}{c}x\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+V_1(w_+,z)\right]+\left(\omega-\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}\right)U_1(w_-,z)\right\}, \tag{22}$$

откуда в пределе $\tau\to\infty$ $E_y\to\frac{1}{2}\frac{\omega+\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}}{c}\tau-\frac{\omega}{c}x\right)$.

Установившийся режим — синусоидальные колебания с частотой $\hat{\omega}=$

$=\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}$. Волна распространяется в направлении перемещения первоначального сигнала. Скорость движения точки смены разложения от прямых к обратным степеням w_+/z совпадает с групповой скоростью сигнала с частотой $\hat{\omega}$, $\beta_{\text{гр}}=\frac{v_{\text{гр}}}{c}=\frac{(\varkappa_+c)^2-1}{(\varkappa_+c)^2+1}<1$. Условие $w_+=z$ $(\beta_{\text{гр}}\tau=x)$ дает оценку области, где существен переходной процесс.

При $x<0$, $-x<\tau$ $\frac{w_+}{z}>1$ и, согласно изложенному выше, приходим к волне, распространяющейся в положительном направлении оси x. Параметр $\frac{\varkappa_-c}{\omega_0}<1$, но $\frac{\tau-x}{\tau+x}>1$ и, до момента времени, определяемого соотношением $\frac{\varkappa_-c}{\omega_0}\sqrt{\frac{\tau-x}{\tau+x}}=1$, $\frac{w_-}{z}>1$. В этом случае выделяется волна, распространяющаяся в направлении отрицательных значений координаты x, т. е. против перемещения исходного сигнала. Условие $-x>\tau\frac{\omega_0^2-(\varkappa_-c)^2}{\omega_0^2+(\varkappa_-c)^2}=\tau\beta_{\text{гр}}$ определяет область изменения переменной $x<0$, где как $U_1(w_+,z)$, так и $U_1(w_-,z)$ приводят к гармоническим колебаниям с частотой $\hat{\omega}$. Две волны распространяются в противоположных направлениях:

$$E_{y\,\tau+x>0,\,-x>\beta_{\text{гр}}\tau}(\tau,x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}\Bigg\{\left(\omega-\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}\right)\times$$

$$\times\left[V_1\left((\tau-x)\frac{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}-\omega}{c},\ \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\sin\left(\tau\frac{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}{c}+x\frac{\omega}{c}\right)\right]+\left(\omega+\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}\right)\times$$

$$\times\left[V_1\left((\tau-x)\frac{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}+\omega}{c},\ \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right)+\sin\left(\tau\frac{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}{c}-x\frac{\omega}{c}\right)\right]\Bigg\}.$$

При $\tau+x>0$, $-x<\beta_{\text{гр}}\tau$ справедлива формула (22), и в пределе $\tau\to\infty$ ($x<0$ конечно) приходим к установившемуся режиму, совпадающему с результатом при $x>0$ — волне, распространяющейся в направлении первоначального сигнала. Таким образом, характер решения при $x<0$ меняется в окрестности координаты x, определяемой уравнениями $-x=\tau$, $-x=\beta_{\text{гр}}\tau$.

5. Составляющие вектора магнитной индукции и направленной скорости частиц определим из уравнений (2), (3) по найденным в п. 4 выражениям для $E_y(x,\tau)$ (20), (21), $B_{z\,\tau<0}=h(\tau-x)\sin\frac{\omega}{c}(\tau-x)$.

В области $-x>\tau$, интегрируя (3) при нулевых начальных условиях (направленная скорость частиц в момент изменения свойств среды равна нулю), легко получить

$$v_{y\,-x>\tau}=\frac{1}{2}\frac{e}{m}\frac{c}{\omega_0^2+\omega^2}\left\{2\omega\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)-\left(\omega-\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}\right)\times\right.\qquad(23)$$

$$\times \cos\left(\tau\frac{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}}{c}+\frac{\omega}{c}x\right)-\left(\omega+\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}\right)\cos\left\{\tau\frac{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}{c}-\frac{\omega}{c}x\right)\Bigg\}.$$

Из первого уравнения системы (2), формулы (20) и условия (4) $B_z(0+,\ x)=-\sin\frac{\omega}{c}x$ будем иметь

$$B_{z_{\tau<-x}}=-\frac{\omega_0^2}{\omega^2+\omega_0^2}\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)+\frac{1}{2}\frac{\omega}{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}\left\{\left(1-\frac{\omega}{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}\right)\times\right. \tag{24}$$

$$\left.\times\sin\left(\tau\frac{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}}{c}+\frac{\omega}{c}x\right)+\left(1+\frac{\omega}{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}}\right)\sin\left(\tau\frac{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}}{c}-\frac{\omega}{c}x\right)\right\}.$$

Особенность решения — стационарное магнитное поле, пространственное распределение которого повторяет распределение поля в момент образования ионизованной области, и соответственно постоянная во времени направленная скорость электронов — первые слагаемые в формулах (23), (24). Слагаемые (22), (23), зависящие от времени, связаны с волнами, распространяющимися в плазме (см. п. 4).

Интеграл $\int\limits_0^\lambda dx\left[\frac{1}{8\pi}(E_y^2+B_z^2)+\frac{1}{2}nmv_y^2\right]=\frac{\lambda}{8\pi}$, $\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}$, при $\tau<0$ и $\tau>0$, $-x>\tau$. Следовательно, энергия, приходящая на единицу площади в слое толщиной λ до и после изменения свойств среды, одинакова.

В области $\tau-x>0$, $\tau+x>0$ переходной процесс усложняет вычисление v_y и B_z. Опуская преобразования, приведем конечные результаты. Направленную скорость электронов найдем из уравнения (3), где E_y определено соотношением (21). Условия при $\tau=-x(x<0)$ следуют из решения (23). При $\tau=x$ $(x>0)$ $v_y(\tau,\ x)|_{\tau=x}=0$ — до прихода фронта сигнала направленная скорость равна нулю. Будем иметь

$$v_y(x,\ \tau)=\frac{e}{2m(\omega_0^2+\omega^2)}\left\{\omega\int\limits_{(\omega_0/c)x}^{(\omega_0/c)\tau}ds J_1\left(\sqrt{s^2-\left(\frac{\omega_0}{c}x\right)^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{\frac{s-\frac{\omega_0}{c}x}{s+\frac{\omega_0}{c}x}}-c\varkappa_-U_2(w_-,\ z)+c\varkappa_+U_2(w_+,\ z)\right\}+ \tag{25}$$

$$+\begin{pmatrix}0, & x>0\\ \frac{e}{m}\frac{\omega}{\omega^2+\omega_0^2}\left(\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)-1\right), & x<0\end{pmatrix}.$$

Для сигнала любой частоты из (25) следует установившийся режим

$$v_{y_{\tau\to\infty}}\to\frac{e}{2m}\frac{1}{\omega_0^2+\omega^2}\left\{c\varkappa_+\cos\left(\tau\frac{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}}{c}-\frac{\omega}{c}x-\pi\right)+\right. \tag{26}$$

$$+\begin{pmatrix} \omega\exp\left(-x\dfrac{\omega_0}{c}\right), & x>0 \\ 2\omega\left(\cos\left(\dfrac{\omega}{c}x\right)-\dfrac{1}{2}\exp\left(-|x|\dfrac{\omega_0}{c}\right)\right), & x<0 \end{pmatrix}\Bigg\}.$$

Гармонические колебания с частотой $\hat{\omega}=\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}$ связаны с волной, распространяющейся в направлении перемещения первоначального сигнала. Изменение свойств среды в момент $\tau=0$ приводит к формированию стационарного тока $(j_y=env_y)$. Последний слагается из тока, локализованного в окрестности плоскости $x=0$ (положение фронта при $\tau=0$); экспоненциально убывающего с увеличением $|x|$. В отличие от аналогичного слагаемого п. 3, результат имеет место при отсутствии разрыва на фронте сигнала. В области $x<0$, где отлично от нуля электромагнитное поле в момент изменения свойств среды, формируется также стационарный ток, периодически зависящий от x. Период определяется частотой ω и, следовательно, волновым вектором в среде, ионизованном газе, $k=\dfrac{\omega}{c}=\dfrac{1}{c}\sqrt{\hat{\omega}^2-\omega_0^2}$.

Составляющую вектора магнитной индукции найдем из первого уравнения системы (2). Интегрируя, получим

$$B_z=\frac{1}{2}\,\frac{\omega}{\omega_0^2+\omega^2}\Bigg\{c\varkappa_-U_1(w_-,\,z)+c\varkappa_+U_1(w_+,\,z)+$$

$$+\,\omega_0\int\limits_{|x|(\omega_0/c)}^{\tau(\omega_0/c)} ds J_0\left(\sqrt{s^2-\left(x\frac{\omega_0}{c}\right)^2}\right)-\begin{pmatrix} 0, & x>0 \\ 2\dfrac{\omega_0^2}{\omega}\sin\left(\dfrac{\omega}{c}x\right), & x<0\end{pmatrix}\Bigg\}.$$

Установившийся режим

$$B_{z_{\tau\to\infty}}\to\frac{1}{2}\,\frac{\omega}{(\sqrt{\omega^2+\omega_0^2})^2}\Bigg\{c\varkappa_+\sin\left(\tau\frac{\sqrt{\omega^2+\omega_0^2}}{c}-\frac{\omega}{c}x\right)+$$

$$+\begin{pmatrix} \omega_0\exp\left(-\dfrac{\omega_0}{c}x\right), & x>0 \\ \omega_0\exp\left(-|x|\dfrac{\omega_0}{c}\right)-2\dfrac{\omega_0^2}{\omega}\sin\left(\dfrac{\omega}{c}x\right), & x<0\end{pmatrix}\Bigg\}. \tag{27}$$

Первое слагаемое — составляющая вектора B распространяющейся волны. Второе — стационарное магнитное поле, экспоненциально убывающее с ростом $|x|$. В полупространстве $x<0$ формируется стационарное поле, повторяющее пространственное распределение магнитного поля в момент образования ионизованной области. Его амплитуда $\omega_0^2/\hat{\omega}^2<1$.

Заметим, что как первые слагаемые в формулах (26), (27) совместно с установившимися гармоническими колебаниями составляющей E_y п. 4, так и слагаемые в (26), (27), не зависящие от времени, по отдельности удовлетворяют системе уравнений (2), (3). Явный вид стационарного поля и тока определяется постановкой задачи в момент $\tau=0$. Решение и в пределе $\tau\to\infty$ не сводится к установившимся гармоническим колебаниям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Morgenthaler F. R.— IRE Trans., 1958, **MTT-6,** № 2, p. 167.
2. Felsen L. B., Whitman G. M.— IEEE Trans., 1970, **AP-18,** № 2, p. 242.
3. Гинзбург В. Л. — Изв. вузов — Радиофизика, 1973, **16,** № 4, с. 512.
4. Столяров С. Н., Болотовский Б. М., Плис А. И., Рок В., Чигирев А. Тезисы докладов VI Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн — Ереван: ВНИИРИ, 1973, **2,** с. 417.
5. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н. — УФН, 1978, **126,** вып. 4, с. 553.
6. Бейтмен Г. Математическая теория распространения электромагнитных волн. — М.: Физматгиз, 1958.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики. — М.: Гостехиздат, 1957. — т. 4.
8. Градштейн И. С., Рыжик М. И Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.
9. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949, — т. 1.
10. Благовещенский А. С., Борисов В. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1972, **15,** № 9, с. 1314.
11. Столяров С Н. — Краткие сообщения по физике ФИАН, 1974, № 1, с. 26.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 2 июля 1979 г.

TRANSFORMATION OF AN ELECTROMAGNETIC SIGNAL IN A SHARP VARIATION OF MEDIUM PROPERTIES WITH TIME

V. V. Borisov

A strict solution is built which taking into account the pulse character of an electromagnetic field. The structure variation of the field vector components is considered in detail for the time dependence of the initial signal — a single Haviside function including sinusoidal oscillations.