ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 12 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 621.372 8

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ, ЗАПОЛНЕННОМ ИОНИЗОВАННЫМ ГАЗОМ, ДВИЖУЩИМСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

В. В. Борисов

Найдены выражения для составляющих поля при произвольной зависимости от времени, в частных случаях решение сводится к известным специальным функциям. Обсуждается отличие ТЕ- и ТМ-волн в волноводах круглого сечения.

Различные вопросы распространения электромагнитных сигналов в волноводах — искажение формы импульса, установление гармонических колебаний распространяющихся волн, установление стационарных полей, формирование коротких импульсных сигналов — требуют решения электродинамической задачи при произвольной зависимости составляющих поля от времени.

В настоящей работе рассмотрены электромагнитные поля в цилиндрическом волноводе, заполненном ионизованным газом, движущимся с постоянной скоростью. Решение строим, не ограничиваясь гармонической зависимостью от времени. Подобная задача в доступной нам литературе не рассматривалась.

При построении решения следуем методу неполного разделения переменных Смирнова [1, 2]. Отделяя зависимость от поперечных (относительно оси волновода) пространственных переменных, решение уравнения, зависящего от времени и продольной координаты, находим непосредственно во временной области, не прибегая к преобразованию Лапласа [1]. Конечные результаты приведены в лабораторной системе отсчета и движущейся со скоростью среды. В частных случаях временной зависимости решение сводится к известным специальным функциям.

1. Цилиндрический волновод с идеально проводящими стенками заполнен ионизованным газом, движущимся вдоль оси волновода с постоянной скоростью v_0. В системе отсчета K', где среда неподвижна, вектор напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}'$ и вектор индукции магнитного $\boldsymbol{B}'$ удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}' = -\frac{\partial}{\partial \tau} \boldsymbol{B}', \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{B}' = \frac{\partial}{\partial \tau} \boldsymbol{E}' + \frac{4\pi}{c} e n' \boldsymbol{v}'. \tag{1}$$

Вектор направленной скорости электронов $\boldsymbol{v}'$ в линейном приближении бесстолкновительной плазмы определяется из уравнения

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial \tau'} = \frac{e}{m' c} \boldsymbol{E}'. \tag{2}$$

Здесь e, m' — заряд и масса электрона, $\tau' = ct'$, c — скорость света. Плотность электронов n' не зависит от координат и времени и равна плотности ионов, в K' ионы неподвижны, $|v'| \ll c$. Величины, относящиеся к движущейся со скоростью v_0 системе отсчета K', отмечены индексом. Система единиц Гаусса, $\varepsilon = \mu = 1$.

Составляющие векторов поля и направленной скорости в K' до момента времени $\tau' = 0$ полагаем равными нулю. Начальные данные задачи

$$v' = E' = B' = 0, \qquad \tau' \leqslant 0. \tag{3}$$

Электромагнитное поле в волноводе определим по заданному в фиксированном сечении лабораторной системы отсчета K.

Условия на границе раздела идеальный проводник — движущаяся плазма требуют рассмотрения. В ортогональных криволинейных координатах x'_i $(i = 1, 2, 3)$ составляющие векторов электромагнитного поля E'_i, B'_i. Квадрат элемента длины $ds'^2 = e'^2 dx'^2_1 + e'^2_2 dx'^2_2 + e'^2_3 dx'^2_3$. Координатная ось x'_1 направлена вдоль оси волновода, ионизованный газ движется в положительном направлении x'_1. Границу волновода совместим с координатной поверхностью $x'_2 = x_0$, при этом поверхность $x'_2 = x_0 -$ лежит внутри волновода, $x'_2 = x_0 +$ — в проводнике. Ограничимся случаем $e'_1 = 1$.

В системе отсчета K' проводник движется со скоростью $-v_0$, условие идеальной проводимости стенок приводит к соотношениям [4]

$$\begin{gathered} E'_1 = 0, \qquad E'_2 + \beta B'_3 = 0, \qquad E'_3 - \beta B'_2 = 0 \\ (x'_2 > x_0, \qquad \beta = v_0/c). \end{gathered} \tag{4}$$

Из первого уравнения системы (1) следует непрерывность составляющей E'_1 при $x'_2 = x_0$ и, следовательно,

$$E'_1(x'_1, x'_2, x'_3, \tau')\Big|_{x'_2 = x_0-} = 0. \tag{5}$$

Согласно (3), (4) и первому из уравнений системы (1) $\dfrac{\partial}{\partial \tau'} e'_3 E'_3 - \beta \dfrac{\partial}{\partial x'_1} e'_3 E'_3 = 0$ при $x'_2 = x_0 -$, откуда при нулевых начальных условиях (3) находим

$$E'_3(x'_1, x'_2, x'_3, \tau')\Big|_{x'_2 = x_0-} = B'_2(x'_1, x'_2, x'_3, \tau')\Big|_{x'_2 = x_0-} = 0,$$

что совместно с уравнением $\dfrac{1}{e'_2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x'_1} e'_2 B'_2 - \dfrac{\partial}{\partial x'_2} B'_1\right) = \dfrac{\partial}{\partial \tau'} E'_3 + \dfrac{4\pi}{c} e n' v'_3$, (2) и данными (3) определяет условие

$$\frac{\partial}{\partial x'_2} B'_1(x'_1, x'_2, x'_3, \tau')\Big|_{x'_2 = x_0-} = 0. \tag{6}$$

Аналогичные результаты можно получить для границы раздела, совмещенной с координатной поверхностью $x'_3 = x_0$. Таким образом, движение среды относительно идеального проводника в рассматриваемой задаче не меняет известных условий (5), (6) [3] в K'.

2. Найдем продольную составляющую вектора магнитной индукции. В движущейся системе отсчета согласно (1), (2) и условиям (3), (6)

$$\nabla^2 B'_1 - \frac{\partial^2 B'_1}{\partial \tau'^2} - \frac{\omega_0'^2}{c^2} B'_1 = 0, \qquad \omega_0'^2 = \frac{4\pi e^2 n'}{m'}, \tag{7}$$

$$B_1' \equiv 0, \qquad \tau < 0, \qquad \left.\frac{\partial B_1'}{\partial N}\right|_{L-} = 0.$$

Контур L — составлен координатными поверхностями $x_2' = x_{02}$ —, $x_3' = x_{03}$ — и лежит внутри волновода в окрестности границы, $\frac{\partial}{\partial N} B_1'$ — — производная по нормали к поверхности, ограничивающей волновод.

Составляющая поля B_1 в лабораторной системе отсчета в сечении волновода $x_1 = 0$ известная функция поперечных координат x_2, x_3 и времени τ: $B_1(x_1, x_2, x_3, \tau)|_{x_1=0} = \varphi(\tau, x_2, x_3)$, $\tau > 0$.

Согласно формулам преобразования составляющих векторов электромагнитного поля и координат в движущуюся систему K' $B_1 = B_1'$, $x_2 = x_2'$, $x_3 = x_3'$. Тогда

$$B_1'(x_1, x_2', x_3', \tau)\Big|_{x_1=0} = \varphi(\tau, x_2', x_3'), \qquad \tau > 0. \tag{8}$$

Переменные x_1, τ оставлены в системе отсчета K, неподвижной относительно стенок волновода.

Решение задачи (7), (8) строим методом неполного разделения переменных [1, 2]. Отделяя зависимость от поперечных координат x_2', x_3', ищем $B_1'(x_1', x_2', x_3', \tau') = X'(x_2', x_3') Z(x_1', \tau')$. Постоянную разделения α_{nm}^2 и собственные функции $X_{nm}'(x_2', x_3')$ определим из решения уравнения для $X'(x_2', x_3')$ и условия на границе [3]. Постоянная α_{nm}^2 при условиях (7) — вещественное число, $\alpha_{nm}^2 > 0$.

Так как при преобразовании Лоренца переменных x_1', τ' $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1'^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau'^2}\right) Z(x_1', \tau') = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right) Z(x_1, \tau)$, то зависимость решения от продольной координаты x_1 и времени τ найдем из решения задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} Z_{nm}(x_1, \tau) - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} Z_{nm}(x_1, \tau) - \gamma_{nm}^2 Z_{nm}(x_1, \tau) = 0,$$

$$\gamma_{nm}^2 = \frac{\omega_0'^2}{c^2} + \alpha_{nm}^2, \qquad Z_{nm}(x_1, \tau)\Big|_{x_1=0} = \varphi_{nm}(\tau), \qquad Z_{nm} = \varphi_{nm} = 0, \qquad \tau < 0.$$

Функции $\varphi_{nm}(\tau)$ — коэффициенты разложения

$$\varphi(\tau, x_2', x_3') = \sum_{nm} X_{nm}(x_2', x_3') \varphi_{nm}(\tau).$$

Согласно [1]

$$\begin{gathered} \underset{x_1>0}{Z_{nm}}(x_1, \tau) = \varphi_{nm}(\tau - x_1) - \\ - \gamma_{nm} x_1 \int\limits_{0-}^{\tau - x_1} d\tau' \frac{\varphi_{nm}(\tau')}{\sqrt{(\tau - \tau')^2 - x_1^2}} J_1\left(\gamma_{nm}\sqrt{(\tau - \tau')^2 - x_1^2}\right), \end{gathered} \tag{9}$$

$J_n(z)$ — функция Бесселя. Составляющая вектора магнитной индукции, направленная вдоль оси волновода, в лабораторной системе отсчета

$$B_1(x_1, x_2, x_3, \tau) = \sum_{nm} B_{1nm}(x_1, x_2, x_3, \tau) = \sum_{nm} X_{nm}(x_2, x_3) Z_{nm}(x_1, \tau).$$

В движущейся системе отсчета K', где среда (плазма) покоится,

$$Z_{nm}(\tau', x_1') = \varphi_{nm}\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(\tau' - x_1')\right) - \gamma_{nm}\frac{x_1' + \beta\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}} \times$$

$$\times \int\limits_{0-}^{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(\tau' - x_1')} ds\, \varphi_{nm}(s) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\tau' + \beta x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} - s\right)^2 - \left(\frac{x_1' + \beta\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2}} \times$$

$$\times J_1\left(\gamma_{nm}\sqrt{\left(\frac{\tau' + \beta x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} - s\right)^2 - \left(\frac{x_1' + \beta\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2}\right), \tag{10}$$

и, следовательно,

$$B_1'(\tau', x_1', x_2', x_3') = \sum_{nm} B_1'(x_1', x_2', x_3', \tau') =$$

$$= \sum_{nm} X_{nm}'(x_2', x_3')\, Z_{nm}(x_1', \tau').$$

Продольная составляющая вектора магнитной индукции в лабораторной системе отсчета совпадает с результатом для волновода, заполненного неподвижной плазмой с точностью до постоянной γ_{nm}^2. Последняя зависит от частоты плазменных колебаний в K'-системе отсчета, движущейся вместе со средой.

3. Рассмотрим продольные составляющие вектора напряженности электрического поля и вектора скорости электронов. Задача для построения составляющей вектора E отличается от (7), (8) условием на границе $E_1'|_{L-} = 0$ и функцией $\varphi_{nm}(\tau)$, которая определяется из условия $E_1(x_1, x_2, x_3, \tau)|_{x_1=0} = \varphi(\tau, x_2, x_3)$. Отделяя пространственные переменные x_2', x_3', ищем $E_1' = X(x_2', x_3')\, Z(x_1', \tau')$. Функцию $X_{nm}(x_2', x_3')$ и постоянную α_{nm}^2 находим из уравнения для $X(x_2', x_3')$ и условия на границе. Составляющая $E_1(x_1, x_2, x_3, \tau)$ в лабораторной системе отсчета $E_1 = \sum_{nm} X_{nm}(x_2, x_3) Z_{nm}(x_1, \tau)$, в движущейся — $E_1' = \sum_{nm} X_{nm}(x_2', x_3')\, Z_{nm}(x_1', \tau')$. Функции $Z_{nm}(x_1, \tau)$ и $Z_{nm}(x_1', \tau')$ — формулы (9), (10), где коэффициенты $\varphi_{nm}(\tau)$ следуют из разложения $\varphi(\tau, x_2', x_3') = \sum_{nm} X_{nm}(x_2', x_3')\, \varphi_{nm}(\tau)$.

Продольную составляющую вектора скорости электронов и, тем самым, составляющую вектора плотности тока, направленную вдоль оси волновода в системе отсчета K', найдем из уравнения (2) при условии (3) по известной функции $E_1'(x_1', x_2', x_3', \tau')$:

$$v'_{1_{x_1>0}} = \frac{e}{mc}\sum_{nm} X_{nm}(x_2', x_3') \int\limits_{x_1'}^{\tau'} d\tau' \left\{ \varphi_{nm}\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(\tau' - x_1')\right) - \right.$$

$$-\gamma_{nm}\frac{x_1'+\beta\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}}\int\limits_{0-}^{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(\tau'-x_1')} ds\, \varphi_{nm}(s)\times$$

$$\left.\times\frac{J_1\left(\gamma_{nm}\sqrt{\left(\frac{\tau'+\beta x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}-s\right)^2-\left(\frac{x_1'+\beta\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\tau'+\beta x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}}-s\right)^2-\left(\frac{x_1'+\beta\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2}}\right\}.$$

Результат в лабораторной системе отсчета следует из формулы для $v_1'(x_1', x_2', x_3', \tau')$ после преобразования составляющих вектора скорости, координат и времени в K. Если функция $E_1(x_1, x_2, x_3, \tau)$ найдена, то проще непосредственно проинтегрировать уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\tau}v_1+\beta\frac{\partial}{\partial x_1}v_1\approx\frac{e}{mc}(1-\beta^2)^{3/2}E_1,\quad \text{откуда}\ (|v'|\ll c,\ |v_0|\gg|v'|)$$

$$\underset{x_1\geqslant 0}{v_1}(x_1, x_2, x_3, \tau)\approx v_0+\frac{e}{mc}(1-\beta^2)^{3/2}\sum_{nm}X_{nm}(x_2, x_3)\times$$

$$\times\int\limits_{\frac{x_1-\beta\tau}{1-\beta}}^{\tau}d\tau'\left\{\varphi_{nm}(\tau'(1-\beta)-(x_1-\beta\tau))-\gamma_{nm}(\beta\tau'+x_1-\beta\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{0-}^{\beta\tau-x_1+\tau'(1-\beta)}ds\,\varphi_{nm}(s)\frac{J_1\left(\gamma_{nm}\sqrt{(\tau'-s)^2-(\beta\tau'+x_1-\beta\tau)^2}\right)}{\sqrt{(\tau'-s)^2-(x_1-\beta\tau+\beta\tau')^2}}\right\}.$$

В отличие от продольных составляющих векторов поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ составляющая вектора скорости, направленная вдоль оси волновода, существенно отличается от решения при неподвижной среде.

4. Соотношения (9), (10) позволяют рассмотреть поведение полей при различной зависимости от времени E_1, B_1 при $x_1=0$. Приведем некоторые результаты. Полагаем $\varphi(\tau, x_2, x_3)=f(\tau)X(x_2, x_3)$.

Временная зависимость в сечении волновода $x_1=0$ — включение гармонических колебаний с частотой ω, $\varphi_{nm}(\tau)=h(\tau)\exp\left(i\frac{\omega}{c}\tau\right)$, $h(\tau)=\begin{cases}1 & (\tau>0)\\ 0 & (\tau<0)\end{cases}$ — функция Хэвисайда. Согласно результатам, полученным для телеграфного уравнения [5], функция $Z_{nm}(\tau, x_1)$ и, следовательно, $Z_{nm}(\tau', x_1')$ сводится к функциям Ломмеля двух переменных

$$U_n(W, Z)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{W}{Z}\right)^{n+2m}J_{n+2m}(Z),$$

$$Z_{nm}(\tau, x_1)=J_0\left(\sqrt{\xi_1\xi_2}\right)+iU_1\left(\varkappa_+\xi_1, \sqrt{\xi_1\xi_2}\right)+(-1)U_2\left(\varkappa_+\xi_1, \sqrt{\xi_1\xi_2}\right)+$$
$$+iU_1\left(\varkappa_-\xi_1, \sqrt{\xi_1\xi_2}\right)+(-1)U_2\left(\varkappa_-\xi_1, \sqrt{\xi_1\xi_2}\right),$$

$$\varkappa_{\pm}=\frac{\omega}{c\gamma_{nm}}\pm\sqrt{\left(\frac{\omega}{c\gamma_{nm}}\right)^2-1},\qquad \xi_{1,2}=\gamma_{nm}(\tau\mp x_1).$$

Постоянная $\gamma_{nm}=\sqrt{\frac{\omega_0'^2}{c^2}+\alpha_{nm}^2}$ — характерный масштаб задачи, зависит от частоты плазменных колебаний в системе K'. Если $\omega>c\gamma_{nm}$, то функции $U_n(W, Z)$, зависящие от переменной $\varkappa_+\xi_1$, при выполнении условия $\sqrt{\xi_2/\xi_1}>\varkappa_+$ приводят к гармоническому режиму $Z_{nm}\approx\exp\left[\frac{i\omega}{c}\left(\tau-x_1\sqrt{1-\left(\frac{\gamma_{nm}c}{\omega}\right)^2}\right)\right]$. Время его установления в сечении волновода x_1 $\tau(x_1)\sim x_1\left(1-\left(\frac{c\gamma_{nm}}{\omega}\right)^2\right)^{-1/2}$, $v=c\sqrt{1-\left(\frac{c\gamma_{nm}}{\omega}\right)^2}$ — скорость перемещения пакета (групповая скорость).

Импульс конечной длительности с заполнением рассмотрим на примере

$$\varphi_{nm}(\tau)=\begin{cases}h(\tau)\sin\left(\frac{\omega}{c}\tau\right)\sin\left(\frac{\Omega}{c}\tau\right), & \tau<T=c\frac{\pi}{\Omega},\quad \frac{\omega}{\Omega}=2k,\quad k=1,2,3,\dots,\\ 0, & \tau>T.\end{cases}$$

Временная зависимость огибающей $E_1(B_1)$ при $x_1=0$ — полупериод синусоиды с частотой Ω. В этом случае

$$Z_{nm}(\tau, x_1)=\frac{1}{2}h(\xi_1)\{U_2(\varkappa_+^+\xi_1, \sqrt{\xi_1\xi_2})+U_2(\varkappa_-^+\xi_1, \sqrt{\xi_1\xi_2})-U_2(\varkappa_+^-\xi_1, \sqrt{\xi_1\xi_2})-$$
$$-U_2(\varkappa_-^-\xi_1, \sqrt{\xi_1\xi_2})\}+\frac{1}{2}h(\xi_1-T\gamma_{nm})\{U_2(\varkappa_+^+(\xi_1-T\gamma_{nm}), Z)+$$
$$+U_2(\varkappa_-^+(\xi_1-T\gamma_{nm}), Z)-U_2(\varkappa_+^-(\xi_1-T\gamma_{nm}), Z)-U_2(\varkappa_-^-(\xi_1-T\gamma_{nm}), Z)\},$$

$$\varkappa_\pm^\pm=\frac{\omega^\pm}{c\gamma_{nm}}\pm\sqrt{\left(\frac{\omega^\pm}{c\gamma_{nm}}\right)^2-1},\qquad \omega^\pm=\omega\pm\Omega,$$

$$Z=\sqrt{(\xi_1-T\gamma_{nm})(\xi_2-T\gamma_{nm})}.$$

Импульс с высокочастотным заполнением в сечении $x_1\neq 0$ формируется двумя пакетами, время установления гармонического режима которых соответственно $\tau_\pm(x_1)\sim x_1\left(1-\left(\frac{c\gamma_{nm}}{\omega\pm\Omega}\right)^2\right)^{-1/2}$.

Наиболее прост результат при $\varphi_{nm}(\tau)=\delta(\tau)$ — функция Дирака, $Z_{nm}=\delta(\tau)-\gamma_{nm}x_1(\tau^2-x_1^2)^{-1/2}J_1\left(\gamma_{nm}\sqrt{\tau^2-x_1^2}\right)$.

5. Продольные составляющие векторов поля в лабораторной системе отсчета K и в системе отсчета, движущейся вместе с плазмой, при известных α_{nm}^2, X_{nm} определяются формулами п. 2, 3. Построение остальных составляющих поля при произвольной зависимости от времени — трудоемкая задача. Рассмотрим простой случай аксиально-симметричных решений в волноводе круглого сечения.

Поперечно-электрические поля (ТЕ). В цилиндрической системе координат $x_1' = z'$, $B_z'(\tau', z', \rho') = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\nu_n^1}{R}\rho'\right) Z_{zn}(\tau', z')$, $X_{nm}(x_2', x_3') = J_0\left(\frac{\nu_n^1}{R}\rho'\right)$, ν_n^1 — корни уравнения $J_1(x)' = 0$, R — радиус волновода. Функции $Z_{zn}(\tau', z') = Z_{nm}(\tau', z')$ определяются соотношением (10). При этом $\varphi_{nm}(s) = \varphi_n(s) = \frac{2\nu_n^1}{R^3 [J_2(\nu_n^1)]^2} \int\limits_0^R d\rho \int\limits_0^\rho \rho' \Phi(s, \rho') d\rho' J_1\left(\frac{\nu_n^1}{R}\rho\right)$, где $\Phi(\tau, \rho) = B_z(\tau, \rho, z)|_{z=0}$, $\gamma_{nm}^2 = \gamma_n^2 = \left(\frac{\omega_0'}{c}\right)^2 + \left(\frac{\nu_n^1}{R}\right)^2$. Составляющие B_ρ' и E_φ' найдем из уравнений $\frac{\partial}{\partial z'} B_z' = -\frac{1}{\rho'}\frac{\partial}{\partial \rho'}\rho' B_\rho'$, $\frac{\partial}{\partial \tau'} B_z' = -\frac{1}{\rho'}\frac{\partial}{\partial \rho'}\rho' E_\varphi'$. После вычислений в системе отсчета, движущейся со средой K', получим

$$E_{\varphi n}' = -\frac{R}{\nu_n^{1}} J_1\left(\frac{\nu_n^1}{R}\rho'\right)\left\{\frac{\partial}{\partial \tau'}\varphi_n\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(\tau'-z')\right) - \frac{\gamma_n}{\sqrt{1-\beta^2}} \times\right.$$

$$\times\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\gamma_n(z'+\beta\tau')\varphi_n\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(\tau'-z')\right) + \right.$$

$$+\beta \int\limits_0^{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(\tau'-z')} ds\, \varphi_n(s)\frac{J_1(\gamma_n \tilde{Z})}{\tilde{Z}} +$$

$$\left.\left.+ (-1)\gamma_n(z'+\beta\tau') \int\limits_0^{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(\tau'-z')} ds\, \varphi_n(s)\frac{\left(\tau' - \frac{s}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}{\tilde{Z}^2} J_2(\gamma_n \tilde{Z})\right]\right\},$$

$$B_{\rho n}' = -\frac{R}{\nu_n^1} J_1\left(\frac{\nu_n^1}{R}\rho'\right)\left\{-\frac{\partial}{\partial \tau'}\varphi_n\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(\tau'-z')\right) - \frac{\gamma_n}{\sqrt{1-\beta^2}} \times\right.$$

$$\times\left[-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\gamma_n(z'+\beta\tau')\varphi_n\left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(\tau'-z')\right) + \right.$$

$$+\int\limits_0^{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(\tau'-z')} ds\,\varphi_n(s)\frac{J_1(\gamma_n\tilde{Z})}{\tilde{Z}}+$$

$$+\gamma_n(z'+\beta\tau')\int\limits_0^{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}(\tau'-z')} ds\,\varphi_n(s)\frac{\left(z'+\frac{\beta s}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)}{\tilde{Z}^2}J_2(\gamma_n\tilde{Z})\Bigg]\Bigg\}.$$

Обозначили $\tilde{Z}=\sqrt{\left(\frac{\tau'+\beta z'}{\sqrt{1-\beta^2}}-s\right)^2-\left(\frac{z'+\beta\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2}$.

В лабораторной системе отсчета K составляющие B_ρ, E_φ можно найти с помощью формул преобразования векторов поля и переменных. Проще, однако, при известной функции $B_z(z,\rho,\tau)$ п. 3 проинтегрировать соответствующие уравнения системы Максвелла в K, откуда

$$E_\varphi=-\frac{R}{\nu_n^1}J_1\left(\rho\frac{\nu_n^1}{R}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_n(\tau-z)-\gamma_n^2 z\frac{1}{2}\varphi_n(\tau-z)+\right.$$

$$\left.+\gamma_n^2 z\int\limits_0^{\tau-z} ds\,\varphi_n(s)\frac{\tau-s}{(\tau-s)^2-z^2}J_2\left(\gamma_n\sqrt{(\tau-s)^2-z^2}\right)\right\},$$

$$B_\rho=-\frac{R}{\nu_n^1}J_1\left(\rho\frac{\nu_n^1}{R}\right)\left\{-\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_n(\tau-z)+\gamma_n^2 z\frac{1}{2}\varphi_n(\tau-z)-\right.$$

$$-\gamma_n\int\limits_{0-}^{\tau-z} d\tau'\varphi_n(\tau')\frac{J_1\left(\gamma_n\sqrt{(\tau-\tau')^2-z^2}\right)}{\sqrt{(\tau-\tau')^2-z^2}}-\gamma_n^2 z^2\int\limits_0^{\tau-z} d\tau'\varphi_n(\tau')\times$$

$$\left.\times\frac{J_2\left(\gamma_n\sqrt{(\tau-\tau')^2-z_2}\right)}{(\tau-\tau')^2-z^2}\right\}.$$

Составляющую вектора $\boldsymbol{E}$ удобно преобразовать к виду

$$E_\varphi=-\frac{R}{\nu_n^1}J_1\left(\frac{\nu_n^1}{R}\rho\right)\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_n(\tau-z)-\gamma_n z\int\limits_{0-}^{\tau-z} ds\frac{\partial}{\partial s}\varphi_n(s)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{J_1\left(\gamma_n\sqrt{(\tau-s)^2-z^2}\right)}{\sqrt{(\tau-s)^2-z^2}}\right\},$$

что позволяет непосредственно воспользоваться результатами п. 4 и выразить решение при временной зависимости $\varphi_n(\tau)=h(\tau)\exp\left(i\frac{\omega}{c}\tau\right)$ через функции Ломмеля $U_n(W,Z)$.

При $\varphi_n(\tau)=h(\tau)$, согласно полученным соотношениям,

$$B_\rho = -\frac{R}{\nu_n^1} J_1\left(\rho \frac{\nu_n^1}{R}\right)\left\{-\delta(\tau - z) + h(\tau - z)\left[\frac{\gamma_n^2 z}{2} - \gamma_n \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times \int_z^\tau ds \frac{J_1\left(\gamma_n \sqrt{s^2 - z^2}\right)}{\sqrt{s^2 - z^2}} - \gamma_n^2 z^2 \int_z^\tau ds\, \varphi_n(s) \frac{J_2\left(\gamma_n \sqrt{s^2 - z^2}\right)}{s^2 - z^2}\right]\right\},$$

$$E_\varphi = -\frac{R}{\nu_n^1} J_1\left(\rho \frac{\nu_n^1}{R}\right)\left\{\delta(\tau - z) - h(\tau - z)\gamma_n z \frac{J_1\left(\gamma_n \sqrt{\tau^2 - z^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - z^2}}\right\}.$$

В пределе $\tau \to \infty$ в фиксированном сечении волновода $E_\varphi \to 0$. Составляющие вектора магнитной индукции отличны от нуля и экспоненциально убывают с увеличением расстояния от плоскости $z = 0$, постоянная экспоненты равна γ_n.

Отметим, что движение ионизованного газа, заполняющего волновод, не усложняет структуру ТЕ-поля. Отличие от неподвижной среды только в постоянной γ_n.

Поперечно-магнитные поля (ТМ). Составляющие $E'_{\rho n}(\tau', z', \rho')$ и $B'_{\varphi n}(\tau', z', \rho')$ определим из системы (1) по известной функции $E'_{zn} \times (\tau', z', \rho') = Z_{zn}(\tau', z') J_0\left(\rho' \frac{\mu_n^0}{R}\right)$, μ_n^0 — корень уравнения $J_0(x) = 0$. Функция $Z_{zn} = Z_{nm}$ п. 2, где $\varphi_n(\tau)$ — коэффициент разложения,

$$E_z(\tau, z, \rho)|_{z=0} = \varphi(\rho, \tau) = \sum_n \varphi_n(\tau) J_0\left(\rho \frac{\mu_n^0}{R}\right),$$

$$\varphi_n(\tau) = \frac{2}{[R J_1(\mu_n^0)]^2} \int_0^R d\rho\, \rho\varphi(\rho, \tau) J_0\left(\rho \frac{\mu_n^0}{R}\right),$$

$$\gamma_n^2 = \left(\frac{\omega_0'}{c}\right)^2 + \left(\frac{\mu_n^0}{R}\right)^2, \tag{11}$$

$$B'_{\varphi n} = \frac{R}{\mu_n^0} J_1\left(\rho' \frac{\mu_n^0}{R}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial \tau'} Z_{zn}(\tau', z') + \frac{\omega_0'^2}{c^2} \int_{z'}^{\tau'} ds Z_{zn}(s, z')\right\},$$

$$E'_{\rho n} = -\frac{R}{\mu_n^0} J_1\left(\rho' \frac{\mu_n^0}{R}\right) \frac{\partial}{\partial z'} Z_{zn}(\tau', z').$$

Явный вид $E'_{\rho n}$ и $B'_{\varphi n}$ в системе отсчета, движущейся со средой, для краткости изложения не приводим.

Поперечные составляющие векторов $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ в лабораторной системе отсчета K следуют из (11) по формулам преобразования Лоренца. Более просто найти $B_{\varphi n}$ и $E_{\rho n}$ по известной в K функции $E_{zn} = Z_{zn}(\tau, z) J_0\left(\rho \frac{\mu_n^0}{R}\right)$. Можно показать, что

$$E_{\rho n}(\tau, z, \rho) = -\frac{R}{\mu_n^0} J_1\left(\rho \frac{\mu_n^0}{R}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial z} Z_{zn}(\tau, z) - \frac{\beta \frac{\omega_0'^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \times\right.$$

$$\times \int\limits_{(z-\beta\tau)/\sqrt{1-\beta^2}}^{(\tau-\beta z)/\sqrt{1-\beta^2}} d\tau' Z_{zn}\left(\tau', \frac{z-\beta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\Bigg\},$$

$$B_{\varphi n}(\tau, z, \rho) = \frac{R}{\mu_n^0} J_1\left(\rho \frac{\mu_n^0}{R}\right)\Bigg\{\frac{\partial}{\partial\tau} Z_{zn}(\tau, z) +$$

$$+ \frac{\frac{\omega_0'^2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \int\limits_{(z-\beta\tau)/\sqrt{1-\beta^2}}^{(\tau-\beta z)/\sqrt{1-\beta^2}} d\tau' Z_{zn}\left(\tau', \frac{z-\beta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\Bigg\}.$$

Интегрирование ведется по времени движущейся системы отсчета. Как составляющая $E_\rho(\tau, z, \rho)$, так и $B_\varphi(\tau, z, \rho)$ в системе K зависят от индуцируемого в среде тока, что отличает результат от решения для неподвижной плазмы $(\beta = 0)$.

Подставляя явный вид Z_{zn}, получим в системе отсчета K, связанной с неподвижными стенками волновода:

$$E_\rho = -\frac{R}{\mu_n^0} J_1\left(\rho \frac{\mu_n^0}{R}\right)\Bigg\{-\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_n(\tau - z) - \gamma_n \int\limits_{0-}^{\tau-z} d\tau' \varphi_n(\tau') \times$$

$$\times \frac{J_1\left(\gamma_n\sqrt{(\tau-\tau')^2 - z^2}\right)}{\sqrt{(\tau-\tau')^2 - z^2}} + \gamma_n^2 z \varphi_n(\tau - z)\frac{1}{2} - \gamma_n^2 z^2 \int\limits_{0-}^{\tau-z} d\tau' \varphi_n(\tau') \times$$

$$\times \frac{J_2\left(\gamma_n\sqrt{(\tau-\tau')^2 - z^2}\right)}{(\tau-\tau')^2 - z^2} - \frac{\beta\frac{\omega_0'^2}{c^2}}{1-\beta}\int\limits_{0-}^{\tau-z} dx \Bigg[\varphi_n(x) - \gamma_n \frac{\beta x + z - \beta\tau}{1-\beta} \times$$

$$\times \int\limits_0^x ds\, \varphi_n(s) \frac{J_1\left(\gamma_n \sqrt{\left(\frac{x+z-\beta\tau}{1-\beta} - s\right)^2 - \left(\frac{\beta x + z - \beta\tau}{1-\beta}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x+z-\beta\tau}{1-\beta} - s\right)^2 - \left(\frac{\beta x + z - \beta\tau}{1-\beta}\right)^2}}\Bigg]\Bigg\},$$

$$B_\varphi = \frac{R}{\mu_n^0} J_1\left(\rho\frac{\mu_n^0}{R}\right)\Bigg\{\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_n(\tau - z) - \gamma_n^2 \frac{z}{2}\varphi_n(\tau - z) + \gamma_n^2 z \int\limits_{0-}^{\tau-z} ds\, \varphi_n(s) \times$$

$$\times \frac{(\tau - s)}{(\tau-s)^2 - z^2} J_2\left(\gamma_n\sqrt{(\tau-s)^2 - z^2}\right) + \frac{\left(\frac{\omega_0'}{c}\right)^2}{1-\beta}\int\limits_{0-}^{\tau-z} \partial x \Bigg[\varphi_n(x) -$$

$$-\frac{\gamma_n}{1-\beta}(\beta x+z-\beta\tau)\int_0^x ds\,\varphi_n(s)\times$$

$$\left.\left.\times\frac{J_1\left(\gamma_n\sqrt{\left(\frac{x+z-\beta\tau}{1-\beta}-s\right)^2-\left(\frac{\beta x+z-\beta\tau}{1-\beta}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x+z-\beta\tau}{1-\beta}-s\right)^2-\left(\frac{\beta x+z-\beta\tau}{1-\beta}\right)^2}}\right]\right\}.$$

В формулу для поперечной составляющей вектора $\boldsymbol{E}$ входит слагаемое, пропорциональное индуцируемому в среде продольному току. Такой результат отличает решение от случая неподвижной плазмы. Структура ТМ-поля в отличие от ТЕ определяется движением среды, заполняющей волновод.

Отметим еще одну особенность решения для волновода, заполненного движущимся ионизованным газом. В рассматриваемом приближении при описании свойств среды исходные уравнения (1), (2) в системе отсчета, движущейся со средой K', а следовательно, и в лабораторной системе при $\beta=0$ и нулевых начальных данных приводят к результату — плотность заряда, индуцированного в среде, равна нулю (сторонние источники отсутствуют). При заполнении волновода движущейся плазмой в системе отсчета K индуцируются заряды. Плотность заряда отлична от нуля в K и равна нулю в K', в чем легко убедиться, исходя из формул преобразования Лоренца для составляющих вектора плотности тока или рассмотрев составляющие E_z, E_ρ и E'_z, E'_ρ. Индуцируемые заряды определяют составляющие вектора напряженности электрического поля в K, что и сказалось на окончательных результатах решения для ТМ-поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики. — М.: Физматгиз ,1957. — Т. 4.
2. Смирнов В И. — ДАН СССР, 1937, 14, № 1, с. 13; № 2, с. 59.
3. Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.
4. Бейтмен Г. Математическая теория распространения электромагнитных волн. — — М.: ИЛ, 1956.
5. Кузнецов П. И., Стратонович Р. А. Распространение электромагнитных сигналов в многопроводных системах. — М: ВЦ АН СССР, 1958.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 12 декабря 1978 г., после доработки 12 ноября 1979 г.

ELECTROMAGNETIC FIELDS IN A CYLINDRICAL WAVEGUIDE FILLED BY AN IONIZED GAS MOVING WITH A CONSTANT VELOCITY

V. V. Borisov

Expressions have been found for components of a field with an arbitrary time dependence, in particular cases, the solution is reduced to known special functions. The difference between TE and TM waves in waveguides of circular cross-sections is discussed.