

УДК 621.373.826

## ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДЕ С ДИСКРЕТНЫМИ КРУПНОМАСШТАБНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

*В. Л. Миронов, С. И. Тузова*

Предлагается приближенный способ расчета некоторых статистических характеристик флуктуаций интенсивности лазерного излучения при много-кратном рассеянии на дискретных крупномасштабных неоднородностях (например, частичках дождя). В предельных случаях слабых и сильных флуктуаций исследуется поведение дисперсии, пространственной и временной корреляции, а также частотных спектров и функции влияния размера приемника в зависимости от оптической толщины среды и условий дифракции на излучающей апертуре.

Вопросу о флуктуациях интенсивности оптического излучения, рассеянного дискретными крупномасштабными (по сравнению с длиной волны) неоднородностями, посвящены работы [1, 2]. В этих работах излагается способ расчета пространственных статистических характеристик волнового поля, основанный на использовании предложенного Калашниковым и Рязановым метода приближенного решения стохастического волнового уравнения [3]. Однако конкретные расчетные данные получены в [2] лишь для дисперсии флуктуаций интенсивности в области слабых флуктуаций. В настоящей работе с помощью метода спектральных разложений [4], а также его фазового приближения [5], с последующим представлением фазы волны согласно методу Калашникова и Рязанова, получены общие выражения для дисперсии, пространственной и временной корреляционных функций флуктуаций интенсивности поля лазерного излучения, многократно рассеянного на дискретных крупномасштабных неоднородностях (например, частичках дождя). В предельных случаях слабых и сильных флуктуаций найдены простые приближенные формулы для дисперсии, пространственной и временной корреляции, а также частотных спектров и функции влияния размера приемника, позволяющие установить характерные пространственные и временные масштабы флуктуаций интенсивности поля, как для плоской и сферической волн, так и для пространственно-ограниченных пучков. В промежуточных случаях проведены численные расчеты с использованием метода статистических испытаний [6].

Распространение оптической волны в среде с крупномасштабными неоднородностями ( $ka \gg 1$ ,  $a$  — линейный размер неоднородности,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны излучения), когда рассеяние излучения происходит в основном в направлении вперед, будем описывать в приближении скалярного параболического уравнения [7–10]:

$$2ik \frac{\partial}{\partial x} u(x, \rho) + \Delta_{\perp} u(x, \rho) + [k^2 \epsilon_1(x, \rho) - V(x, \rho)] u(x, \rho) = 0.$$

Здесь  $\epsilon_1(x, \rho)$  — поле  $N$  флюктуаций диэлектрической проницаемости воздуха,  $V(x, \rho) = \sum_{j=1}^N V_j(x - x_j, \rho - \rho_j)$  — рассеивающий потенциал совокупности дискретных неоднородностей [11],  $x_j, \rho_j$  — координаты случайных положений центра  $j$ -го рассеивателя,  $u(x, \rho)$  — комплекс-

ная амплитуда волны  $\Psi(x, \rho) = u(x, \rho) \exp(ikx)$ , распространяющейся вдоль оси  $0x$ ,  $\rho = \{y, z\}$  — вектор в плоскости, перпендикулярной оси  $0x$ ,  $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  — поперечный лапласиан.

Воспользуемся представлением искомого поля в виде разложения по плоским волнам [4, 5]

$$u(x, \rho) = \int d\chi f(\chi) \exp \left\{ i \left[ \chi \rho - \frac{\chi^2}{2k} x \right] + \Phi_t(x, \rho; \chi) + \Phi(x, \rho; \chi) \right\},$$

где  $\Phi_t(x, \rho; \chi)$  и  $\Phi(x, \rho; \chi) = \chi + iS$  — случайные набеги комплексной фазы парциальной плоской волны на турбулентных и дискретных неоднородностях соответственно ( $\chi$  и  $S$  — логарифм амплитуды и фаза волны [4, 9]). Для одномодового гауссова пучка с распределением поля в начальной плоскости  $x=0$  в виде [9]  $u_0(0, \rho) = \exp(-\rho^2/2a_0^2 - ik\rho^2/2F)$  спектральная плотность  $f(\chi) = (\pi\gamma)^{-1} \exp(-\chi^2/\gamma)$  где  $\gamma = 2(1/a_0^2 + ik/F)$ ,  $a_0$  — эффективный радиус пучка,  $F$  — радиус кривизны фазового фронта. Согласно [3] комплексная фаза плоской волны, прошедшей слой  $0 \leq x \leq L$  невзаимодействующих между собой крупномасштабных дискретных неоднородностей, представляется в виде суперпозиции независимых набегов комплексной фазы на отдельных неоднородностях:

$$\Phi(L, \rho; \chi) = \sum_{j=1}^N \Phi_j(L - x_j, \rho - \rho_j; \chi). \quad (1)$$

Такой подход, приближенно учитывающий многократное рассеяние на системе  $N$  частиц, справедлив, как показано в [3], для оптических толщ  $\tau < 1/\langle \theta_0^2 \rangle$ , где  $\langle \theta_0^2 \rangle \sim (ka)^{-2}$  — средний квадрат угла рассеяния излучения частицей.

Для среды, состоящей из большого числа статистически независимых рассеивателей, статистика фазы  $\Phi(L, \rho)$  определяется [1] равномерной плотностью вероятности положения  $r_j = \{x_j, \rho_j\}$  частицы в рассеивающем слое и пуассоновским законом распределения числа частиц  $N$ . При этом фаза  $\Phi(L, \rho)$ , является пуассоновским случайным процессом [10]. Считаем, что флуктуации поля волны, вызванные турбулентными и дискретными неоднородностями, некоррелированы, а набег фазы  $\Phi_t(L, \rho)$ , обусловленный турбулентными неоднородностями, является гауссовым случайным процессом [4, 10]. Проводя усреднение согласно [10], получим следующее выражение для четвертого момента поля:

$$\begin{aligned} \Gamma_4(\zeta) &= \langle u(\zeta_1 \theta_1) u^*(\zeta_1 \theta_1) u(\zeta_2 \theta_2) u^*(\zeta_2 \theta_2) \rangle = \\ &= \frac{1}{\pi^4 (\gamma \gamma^*)^2} \int d\chi_{1,2,3,4} \exp \left[ -\frac{1}{\gamma} (x_1^2 + x_3^2) - \frac{1}{\gamma^*} (x_2^2 + x_4^2) \right] \times \\ &\times \exp \left[ -i \frac{x}{2k} (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2) + i(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \frac{\eta}{2} \right] \times \\ &\times \exp \left\{ n_0 \int_0^L dx_j \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_j \int_0^{\infty} da \exp(a) [e^{T_j} - 1] \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [D_{\tau}( |x_1 - x_2|, 0) + D_{\tau}( |x_3 - x_4|, 0) + \right. \end{aligned} \quad (2)$$

$$+D_r(|x_1-x_4|, \zeta) + D_r(|x_2-x_3|, \zeta) - D_r(|x_1-x_3|, \zeta) - D_r(|x_2-x_4|, \zeta)]\},$$

где

$$\begin{aligned} T_j = & \Phi_j(L-x_j, \eta_1-\rho_j; x_1; \zeta_1 \theta_1) + \Phi_j^*(L-x_j, \eta_1-\rho_j; x_2; \zeta_1 \theta_1) + \\ & + \Phi_j(L-x_j, \eta_2-\rho_j; x_3; \zeta_2 \theta_2) + \Phi_j^*(L-x_j, \eta_2-\rho_j; x_4; \zeta_2 \theta_2), \\ D_r(|x_m-x_n|, \zeta) = & \langle [\Phi_r(L, \zeta_1 \theta_1; x_m) - \Phi_r(L, \zeta_2 \theta_2; x_n)] \times \\ & \times [\Phi_r^*(L, \zeta_1 \theta_1; x_m) - \Phi_r^*(L, \zeta_2 \theta_2; x_n)] \rangle \end{aligned}$$

— структурная функция флюктуаций комплексной фазы двух плоских волн, рассеянных на турбулентных неоднородностях,  $n_0$  — концентрация частиц ( $n_0 = \text{const}$ ),  $n(a)$  — распределение частиц по размерам. Полагая в (1)  $\zeta_1=\rho_1$ ,  $\zeta_2=\rho_2$ ,  $\theta_1=\rho_1/\rho_2$ ,  $\theta_2=\rho_2/\rho_1$ ,  $\zeta=\rho=|\rho_1-\rho_2|$ ,  $\eta_1=\rho_1=\rho/2$ ,  $\eta_2=\rho_2=-\rho/2$ ,  $\eta=\eta_1-\eta_2=\rho$ ,  $\theta=\rho/\rho$ , где  $\rho_1, \rho_2$  — точки наблюдения, симметрично разнесенные относительно оси пучка, получаем выражение для пространственного момента поля  $\Gamma_4(\rho)$ . При  $\zeta_1=t_1$ ,  $\zeta_2=t_2$ ,  $\zeta=\tau=t_2-t_1$ ,  $\theta_1=\theta_2=\theta=V_\perp$ ,  $\eta_1=\eta_2=\eta=0$ , где  $t_1, t_2$  — моменты времени наблюдения,  $V_\perp$  — средняя скорость движения частиц в плоскости, перпендикулярной оси  $0x$ , получаем выражение для временного момента поля  $\Gamma_4(\tau)$ . Отметим, что при выводе формулы для  $\Gamma_4(\tau)$  введена зависимость положения частицы от времени  $r_j=r_j(t)=r_0+Vt$  и проведено усреднение по начальным положениям частиц  $r_0$ . В случае, когда частицы в результате инерционности не увлекаются турбулентными перемещениями воздуха [12] (например, дождевые капли), скорость их движения  $V$  носит детерминированный характер и состоит из скорости падения под действием силы тяжести  $V_d(a)$  и средней скорости переноса за счет ветра  $V_w$ .

Согласно [3] приближенное решение задачи многократного рассеяния на совокупности крупномасштабных неоднородностей сводится к отысканию комплексной фазы  $\Phi_j(L-x_j, \rho-\rho_j; x)$  волн, рассеянной на изолированной неоднородности. Для трасс длиной  $L \gg ka^2$  комплексную фазу  $\Phi_j(L-x_j, \rho-\rho_j; x)$  определим из решения задачи дифракции [13] парциальной плоской волны на одиночной капле радиуса  $a$  в виде

$$\Phi_j(L-x_j, \rho-\rho_j; x) = i \frac{ka^2}{(L-x_j)} \exp \left[ i \frac{kl^2}{2(L-x_j)} \right] \frac{J_1 \left( \frac{ka}{L-x_j} l \right)}{\left( \frac{ka}{L-x_j} l \right)}, \quad (3)$$

где  $l = \left| \rho - \rho_j - \frac{x}{k} (L-x_j) \right|$ ,  $J_1(z)$  — функция Бесселя. В дальнейшем будем использовать простую аппроксимацию [9]  $2J_1(z)/z \approx \approx \exp(-z^2/8)$ , хорошо описывающую главный максимум амплитуды рассеяния при дифракции Фраунгофера. Из (3) видно, что  $|\Phi_j(L-x_j, \rho-\rho_j; x)| \ll 1$ , поэтому подынтегральную экспоненту в формуле (2) можно разложить в ряд, ограничиваясь членами второго порядка малости, т. е.

$$e^{T_j} - 1 \approx T_j + \frac{1}{2} T_j^2. \quad (4)$$

В фазовом приближении, т. е. в пренебрежении амплитудными флюктуациями поля [5] ( $\Phi_j \rightarrow iS_j = i \operatorname{Im} \Phi_j$ ), с использованием (2) — (4) после соответствующего интегрирования получаем следующее общее

выражение для пространственной  $B_I(\rho)$  и временной  $B_I(\tau)$  корреляционных функций флуктуаций интенсивности поля лазерного излучения:

$$\begin{aligned}
 B_I(\zeta) &= \Gamma_4(\zeta) - \langle u(\zeta_1 \theta_1) u^*(\zeta_1 \theta_1) \rangle \langle u(\zeta_2 \theta_2) u^*(\zeta_2 \theta_2) \rangle = \\
 &= \frac{\alpha_0^6}{(2\pi)^3 (1 + \Omega^2 L^2 / F^2)} \int dq_{1,2,3} \exp \left\{ -\frac{\alpha_0^2}{2} \left[ \frac{q_1^2 + q_2^2}{(1 + \Omega^2 L^2 / F^2)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{g^2}{\Omega^2} q_3^2 \right] \right\} \cos \left\{ \frac{L}{k} \left[ 1 - \Omega^2 \frac{L}{F} \left( 1 - \frac{L}{F} \right) \right] \frac{(q_1 q_2)}{(1 + \Omega^2 L^2 / F^2)} - (\eta q_2) \right\} \times (5) \\
 &\quad \times \exp \left( -\frac{1}{2} [D_s(|q_2 + q_3|, 0) + D_s(|q_2 - q_3|, 0)] \right) \times \\
 &\quad \times \left\{ \exp \left( -\frac{1}{2} [D_s(|q_1 + q_3|, \zeta) + D_s(|q_1 - q_3|, \zeta) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - D_s(|q_1 + q_2|, \zeta) - D_s(|q_1 - q_2|, \zeta)]) \right) - 1 \right\},
 \end{aligned}$$

где

$$D_s(|q_m + q_n|, \zeta) = D_s^a(|q_m + q_n|, \zeta) + D_s^r(|q_m + q_n|, \zeta)$$

— сумма структурных функций флуктуаций фаз двух плоских волн, рассеянных дискретными и турбулентными неоднородностями.

Использование в (2) разложения (4) для фазы  $S_j = \text{Im } \Phi_j$  эквивалентно переходу от пуассоновской статистики фазы  $S$  к нормальной. Отметим, что возможность такого перехода при малых среднеквадратичных набегах фазы на одной неоднородности  $(\langle S_j^2 \rangle)^{1/2} \ll 1$  была показана в [15]. Выражение для  $D_s^a(|q_m + q_n|, \zeta)$  получаем с точностью до малых членов порядка  $ka^2/L$  в виде

$$\begin{aligned}
 D_s^a(|q_m + q_n|, \zeta) &= \int_0^\infty da n(a) \mu \times \\
 &\times \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} d \exp \left( -\frac{\zeta^2 \theta^2}{a^2} + h^2 \right) [\Phi(p) - \Phi(t)] \right\}, \\
 d &= \frac{\Omega_0}{a |q_m + q_n|}, \quad h = \frac{\zeta \theta}{a} \frac{(q_m + q_n)}{|q_m + q_n|}, \\
 p &= \frac{1}{d} + h, \quad t = a |q_m + q_n| + h,
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$g^2 = 1 + \Omega^2 \left( 1 - \frac{L}{F} \right)^2, \quad \Omega = \frac{k \alpha_0^2}{L}, \quad \Omega_0 = \frac{ka^2}{L},$$

где  $\Phi(z)$  — интеграл вероятности. Величина  $\mu = n_0 \pi a^2 L$  имеет смысл оптической толщины, определяющей затухание среднего поля  $\langle u \rangle \sim \sim \exp(-\mu)$  [14]. Входящее в формулу для относительной дисперсии флуктуаций интенсивности поля на оси пучка  $\sigma_I^2 = B_I(0) / \langle I(L, 0) \rangle$  выражение для средней интенсивности  $\langle I(L, 0) \rangle = \langle u(L, 0) u^*(L, 0) \rangle$ , найденное в [13], имеет вид

$$\langle I(L, 0) \rangle = \frac{\alpha_0^2}{2} \int_0^\infty dq q \exp \left[ -\frac{q^2}{4} \left( \frac{L g}{k \alpha_0} \right)^2 \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} D_s^a(q, 0) \right]. \tag{7}$$

Выражение для нормировочной функции  $B_I(0, \rho/2) = \langle I^2(L, \rho/2) \rangle - \langle I(L, \rho/2) \rangle^2$  в коэффициенте пространственной корреляции  $b_I(\rho) = B_I(\rho)/B_I(0, \rho/2)$  можно получить из (5), положив  $\rho = 0$  в функциях  $D_s(|q_m + q_n|, \rho)$ , а также заменив в аргументе косинуса  $(\eta \cdot q_2)$  на  $(\eta \cdot q_3)$ .

Как следует из (5), в случае слабых флуктуаций, когда  $D_s^a(2\alpha_0)$ ,  $D_s^T(2\alpha_0) \ll 1$ , разлагая подынтегральную экспоненту в ряд и ограничиваясь линейными по  $D_s$  членами разложения, можно представить турбулентный и гидрозольный вклады в статистические характеристики как аддитивные  $B_I(\zeta) = B_I^T(\zeta) + B_I^a(\zeta)$ . В случае сильных флуктуаций ( $\mu \gg 1$ ) такое представление, вообще говоря, не имеет места. Рассмотрим только гидрозольную компоненту в предельных случаях слабых и сильных флуктуаций.

### 1. СЛАБЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ( $\mu < 1$ )

Исследуем поведение статистических характеристик флуктуаций интенсивности в области малых оптических толщ  $\mu$  на основании формулы (2) с использованием представления для комплексной фазы (3) и разложения (4). При  $\mu \ll 1$ , разлагая экспоненту

$$\exp \left\{ n_0 \int_0^L dx_j \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_j \int_0^{\infty} da n(a) \left[ T_j + \frac{1}{2} T_j^2 \right] \right\}$$

в ряд и ограничиваясь линейными по  $\mu$  членами разложения, после соответствующего интегрирования получаем простую приближенную формулу для относительной дисперсии на оси пучка:

$$\sigma_I^2 \approx \frac{g}{\alpha_0} \int_0^{\infty} dan(a) \mu a \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctg \left( \frac{ag}{2\alpha_0} \right) \right\}. \quad (8)$$

Отсюда, переходя к случаю монодисперсных частиц  $n(a) = \delta(a - a_0)$ , получаем хорошо совпадающие результаты с данными численных расчетов, проведенных в [2] методом статистических испытаний. В частности, для плоской ( $L/F = 0, 1/\Omega = 0$ ) и сферической ( $L/F = 0, \Omega = 0$ ) волн  $\sigma_I^2 \approx 2\mu_0$ , для узкого коллимированного пучка ( $L/F = 0, \Omega = 1$ )  $\sigma_I^2 \approx \pi\mu_0 a_0/V^2\alpha_0$  и для сфокусированного пучка ( $L/F = 1, \Omega \gg 1$ )  $\sigma_I^2 \approx \pi\mu_0 a_0/2\alpha_0$ , где  $\mu_0 = n_0 \pi a_0^2 L$ . Таким образом, в области малых оптических толщ дождя дисперсия монотонно возрастает с ростом  $\mu$  (что качественно согласуется с результатами эксперимента [20]), причем для узких коллимированных, а в особенности сфокусированных пучков величина  $\sigma_I^2$  значительно меньше, чем в плоской и сферической волнах. (Сравнение конкретных величин  $\sigma_I^2$  пока невозможно ввиду отсутствия экспериментальных данных с надежно разделенными турбулентными и гидрозольным вкладами.)

Выражение для временной корреляционной функции  $B_I(\tau)$  плоской волны получаем из (2) при  $\mu \ll 1$  аналогичным образом в виде

$$B_I(\tau) \approx 2 \int_0^{\infty} da n(a) \mu \exp \left[ - \left( \frac{V_{\perp}(a)}{a} \tau \right)^2 \right], \quad (9)$$

откуда следует хорошо известный [13, 14, 21] факт, что в области малых оптических толщ масштаб временной корреляции интенсивности есть  $\tau_0 = a/V_{\perp}$ . Тогда формула для частотного спектра [9] запишется как

$$\begin{aligned} W(f) &= 4 \int_0^\infty d\tau B_I(\tau) \cos(2\pi f \tau) \approx \\ &\approx 4V\pi \int_0^\infty dan(a) \mu \frac{a}{V_\perp(a)} \exp \left[ -\left( \frac{\pi a}{V_\perp(a)} f \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Без учета ветра ( $V_b = 0$ ), с использованием гамма-распределения частиц по размерам [17]  $n(a) = a^\alpha (a/a_m)^\alpha \exp(-a/a_m)/\Gamma(\alpha) a_m^\alpha$  для нормированной спектральной плотности  $U(f) = fW(f)/B_I(0)$  в случаях, типичных для дождя зависимостей скорости [13, 17]  $V_\Delta(a) = c_1 a^{1/2}$  и  $V_\Delta(a) = c_2 a$ , получаем простые соотношения

$$U(f) \approx \frac{2V\pi}{c_1} a_m^{1/2} a^{\alpha+3} f^3 \frac{\Gamma(\alpha + 7/2)}{\Gamma(\alpha+3) \left( \alpha^2 + \frac{\pi^2 a_m^2}{c_1^2} f^2 \right)^{\alpha+7/2}}; \quad (11)$$

$$U(f) \approx \frac{2V\pi}{c_2} f \exp \left( -\frac{\pi^2 f^2}{c_2^2} \right), \quad (12)$$

где  $c_1 = 200,8$  [13],  $c_2 = 6 \cdot 10^3$ ,  $a_m = 2,5 \cdot 10^{-4} \div 7,5 \cdot 10^{-4}$  м,  $\alpha = 1 \div 4$  [17].

Приближенная формула для  $B_I(\tau)$  на оси гауссова пучка, найденная из (2) при  $\mu \ll 1$ , имеет вид

$$B_I(\xi) \approx 2 \frac{\Omega^4}{g^4} \int_0^\infty dan(a) \mu \int_0^1 d\chi \frac{\exp[-\xi^2/(1+\beta\chi^2)]}{(1+\beta\chi^2)}, \quad (13)$$

где

$$\xi = V_\perp(a) \tau / a, \quad \beta = (2a_0/ag)^2.$$

На рис. 1 представлены результаты численных расчетов функции  $b_I(\xi)$ , проведенные по формулам (2) — (4) с помощью метода статистических испытаний [5] для случая монодисперсных частиц в зависимости от дифракционных параметров пучка. Как следует из рис. 1, а также анализа формул (9), (13), масштаб временной корреляции интенсивности  $\tau_I$ , определяемый по спаду  $b_I(\tau)$  на уровень  $1/e$ , в пространственно-ограниченных пучках значительно больше, чем в плоской волне. С уменьшением параметра Френеля излучающей апертуры  $\Omega$  до значения  $\Omega = 1$  масштаб  $\tau_I$  в колимированном пучке возрастает. Дальнейшее уменьшение  $\Omega$  приводит к уменьшению величины  $\tau_I$ . При совпадающих значениях параметра  $\Omega$  масштаб  $\tau_I$  в сфокусированном пучке (в зоне фокусировки) существенно больше, чем в колимированном. На основании (13) получаем следующую формулу для частотного спектра флуктуаций интенсивности на оси пучка:

$$\begin{aligned} W(f) &\approx 4V\pi \frac{\Omega^4}{g^4} \int_0^\infty dan(a) \mu \frac{a}{V_\perp(a)} \times \\ &\times \int_0^1 d\chi \frac{\exp \left[ -\left( \frac{\pi a}{V_\perp(a)} f \right)^2 (1+\beta\chi^2) \right]}{(1+\beta\chi^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из анализа выражений (10), (14) и представленных на рис. 2а расчетных кривых при  $n(a) = \delta(a - a_0)$  следует, что нормированная спект-

ральная плотность  $U(f)$  имеет четко выраженный максимум на частоте  $f_0$ , соответствующей масштабу временной корреляции  $\tau_1$ . Причем для пространственно-ограниченного пучка имеет место сдвиг  $U(f)$  в область низких частот по сравнению с плоской волной.

Сравнение экспериментальных данных [20] с расчетными, проведенными по формуле (11), указывает на их хорошее качественное совпадение (рис. 2б). (Более детальное количественное сравнение возможно лишь после проведения эксперимента, сопровождающегося независимыми измерениями спектра размеров частиц  $n(a)$ , при различных значениях параметров пучка  $a_0$  и  $F$  и в одинаковых метеорологических условиях.)

Выражение для пространственной корреляционной функции  $B_I(\rho)$  плоской волны, полученное на основании формул (2)–(4) при  $\mu \ll 1$ , имеет вид

$$B_I(\rho) \approx 2 \int_0^\infty dan(a) \mu \exp(-\rho^2/a^2), \quad (15)$$

откуда следует известный [14] вывод о том, что пространственным масштабом корреляции интенсивности в области малых оптических толщ является размер частицы. Приближенную формулу для  $B_I(\rho)$  в случае симметричного разноса точек наблюдения относительно оси гауссова пучка получаем из (2)–(4) при  $\mu \ll 1$  в виде

$$\begin{aligned} B_I \rho^2 \approx & 2 \frac{\Omega^4}{g^4} \int_0^\infty dan(a) \mu \int_0^1 \frac{d\chi}{(1 + \beta\chi^2)} \times \\ & \times \exp \left\{ - \frac{\frac{\rho^2}{a^2} \left[ 1 + \chi \left( \frac{\Omega^2}{g^2} \left( 1 - \frac{x}{F} \right) - 1 \right) \right]^2}{(1 + \beta\chi^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Как следует из (15), (16) и представленных на рис. 3 результатов численных расчетов  $b_I(\rho)$  в случае монодисперсных частиц, масштаб пространственной корреляции флюктуаций интенсивности  $\rho_I$  в пространственно-ограниченных пучках существенно больше, чем в плоской волне.

Приведенные в настоящей работе формулы относятся к случаю точечной приемной апертуры, в то время как на практике всегда имеют дело с приемником конечных размеров, оказывающим осредняющее действие на флюктуации интенсивности. Выражение для функции влияния размера приемника [9]

$$G(R) = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^{2R} d\rho \rho b_I(\rho) \left[ \arccos \frac{\rho}{2R} - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right], \quad (17)$$

показывающей, во сколько раз величина относительных флюктуаций полного светового потока через приемную диафрагму радиуса  $R$  меньше, чем для точечной диафрагмы, получаем с использованием (15) в виде

$$G(R) \approx \int_0^\infty \frac{da n(a) \mu}{[1 + (R/a)^2]} \{1 - \exp[-4(1 + (R/a)^2)]\} \left/ \int_0^\infty da n(a) \mu\right.. \quad (18)$$

Отсюда в частном случае монодисперсных частиц следует, что осредняющее действие приемника в области слабых флюктуаций зависит только от отношения радиуса приемной апертуры  $R$  к радиусу капли  $a$ .

Отметим, что если поставленную задачу решать в фазовом приближении, т. е. с учетом только флуктуаций фазы волны ( $\Phi \rightarrow iS$ ), то в области малых оптических толщ ( $\mu < 1$ ) для коэффициентов пространственной и временной корреляции  $b_1(\rho)$ ,  $b_1(\tau)$  получаются выражения, полностью совпадающие с соответствующими формулами, приведенными выше. Это объясняется тем, что масштабы корреляции флуктуаций интенсивности определяются главным образом флуктуациями фазы  $S$  рассеянной волны. Пренебрежение амплитудными флуктуациями волны оказывается лишь на абсолютных значениях статистических характеристик. В области же сильных флуктуаций ( $\mu \gg 1$ ) использование для комплексной фазы  $\Phi(L, \rho; \omega)$  приближенных формул (1), (3) приводит к ошибочным результатам, например, к бесконечному росту дисперсии  $\sigma_I^2$  с увеличением длины трассы. В то время как учет только флуктуаций фазы  $S$  волны ( $\Phi \rightarrow iS = i \operatorname{Im} \Phi$ ) позволяет получить приближенные результаты, которым может быть дана ясная физическая интерпретация. Этому факту дано математически строгое объяснение в случае плавно неоднородной среды типа турбулентной атмосферы [9, 5, 18, 19]. Задачу же оценки погрешности, возникающей при использовании фазового приближения, для случая дискретных неоднородностей типа дождя еще предстоит решить.

## 2. СИЛЬНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ( $\mu \gg 1$ )

Исследование поведения статистических характеристик флуктуаций интенсивности в области сильных флуктуаций проведено в фазовом приближении на основании формул (5), (6). При  $\mu \gg 1$ , применяя в (5) после соответствующей модификации предложенную в [18] методику оценки многократных интегралов, приходим в случае монодисперсных частиц к следующему асимптотическому выражению для  $\sigma_I^2$  плоской волны:

$$\sigma_I^2 \approx 1 + \frac{5}{4\sqrt{3}} \left( \frac{k a_0^2}{L \mu_0^{1/2}} \right)^2 \ln \frac{\mu_0}{2}. \quad (19)$$

Согласно (19), с увеличением длины трассы  $L$  дисперсия насыщается на единицу сверху. Полученный результат объясняется нормализацией поля волны по мере ее прохождения в случайно-неоднородной среде [8].

Как следует из асимптотической формулы для  $b_1(\tau)$  плоской волны, полученной из (5) при  $\mu \gg 1$  в виде

$$b_1(\tau) \approx \exp \left\{ - \int_0^\infty d\alpha n(a) \mu \left[ 1 - \exp \left( - \frac{V_\perp^2(a) \tau^2}{a^2} \right) \right] \right\}, \quad (20)$$

масштаб временной корреляции интенсивности в области сильных флуктуаций есть  $\tau_I = \rho_0 / \sqrt{2} V_\perp$ . Соответственно спектральные плотности  $U(f)$  записуются следующим образом:

$$U(f) \approx 2 \left[ \frac{\pi \alpha_m \alpha f^2}{\mu_m c_1^2 (1 + \alpha)} \right]^{1/2} \exp \left[ - \frac{\pi^2 \alpha_m' \alpha f^2}{\mu_m c_1^2 (1 + \alpha)} \right], \quad (21)$$

$$\mu_m = n_0 \pi \alpha_m^2 L \quad (V_\perp = c_1 \alpha^{1/2});$$

$$U(f) \approx 2 \left[ \frac{\pi \alpha^2 f^2}{\mu_m c_2^2 (1 + \alpha) (2 + \alpha)} \right]^{1/2} \exp \left[ - \frac{\pi^2 \alpha^2 f^2}{\mu_m c_2^2 (1 + \alpha) (2 + \alpha)} \right] \quad (22)$$

$$(V_\perp = c_2 \alpha).$$

Из представленных на рис. 1 результатов численных расчетов функции  $b_I(\xi)$ , проведенных при  $n(a) = \delta(a - a_0)$  по формулам (5), (6) с помощью метода статистических испытаний, следует, что масштаб временной корреляции  $\tau_I$  на оси пространственно-ограниченных пучков, как и в случае слабых флюктуаций, значительно превышает масштаб  $\tau_I$  в плоской волне. Причем, с увеличением параметра  $\mu$   $\tau_I$  монотонно убывает. Этому поведению масштаба  $\tau_I$  соответствует сдвиг максимума нормированной спектральной плотности  $U(f)$  для ограниченного пучка в область более низких частот по сравнению с плоской волной (рис. 2а). При этом функция  $U(f)$  в случае сильных флюктуаций смещена в более высокочастотную область, чем в случае слабых флюктуаций, и по мере роста  $\mu$  этот сдвиг возрастает.

Асимптотический анализ выражения (5) при  $\mu \gg 1$  приводит к следующим формулам для коэффициента пространственной корреляции  $b_I(\rho)$  плоской и сферической волн

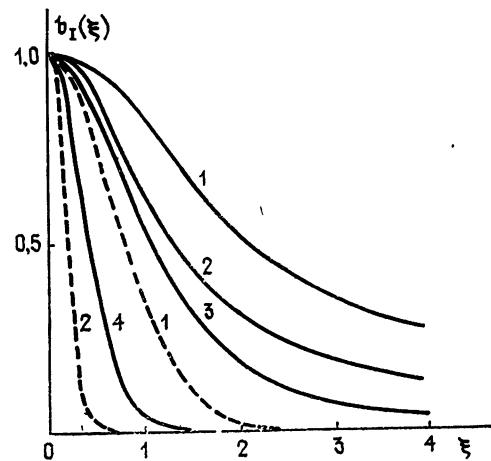


Рис. 1. Коэффициент временной корреляции  $b_I(\xi) = B_I(\xi)/B_I(0)$ :

прямая — расчетные кривые: 1 —  $L/F = 1$ ,  $\Omega = 77$ ,  $\mu < 1$ ; 2 —  $L/F = 0$ ,  $\Omega = 0,77$ ,  $\mu < 1$ ; 3 —  $L/F = 0$ ,  $\Omega = 77$ ,  $\mu < 1$ ; 4 —  $L/F = 1$ ,  $\Omega = 38$  и  $L/F = 0$ ,  $\Omega = 0,38$ ,  $\mu = 20$ ;

пунктирная — асимптотические кривые: 1 — плоская волна,  $\mu \ll 1$ ; 2 — плоская волна,  $\mu \gg 1$  ( $a_0 = 5 \cdot 10^{-4}$  м,  $V_\perp = 6,5$  м/с).

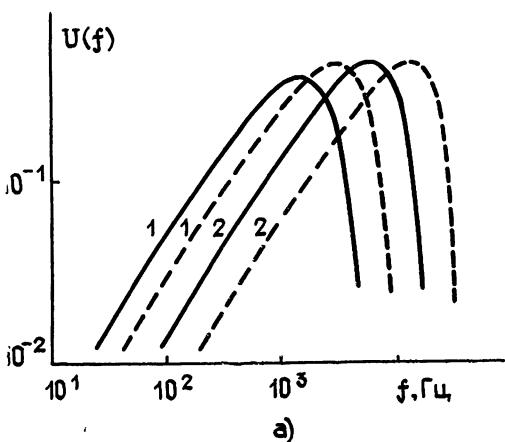
$$b_{I_{\text{пл}}}(\rho) \approx \exp \left\{ - \int_0^\infty dan(a) \mu [1 - \exp(-\rho^2/a^2)] \right\}; \quad (23)$$

$$b_{I_{\text{сф}}}(\rho) \approx \exp \left\{ - \int_0^\infty dan(\gamma) \mu \left[ 1 - {}_1F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -\rho^2/a^2 \right) \right] \right\}, \quad (24)$$

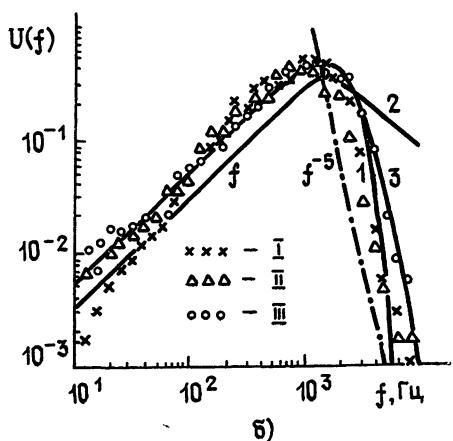
где  ${}_1F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z \right)$  — вырожденная гипергеометрическая функция. Согласно (23), (24) в области сильных флюктуаций масштабы пространственной корреляции интенсивности определяются как  $\rho_{I_{\text{пл}}} \approx \rho_k / \sqrt{2}$ ,  $\rho_{I_{\text{сф}}} \approx \rho'_k / \sqrt{2}$ , где  $\rho_k$  и  $\rho'_k$  — радиусы когерентности плоской и сферической волн, найденные в [16] в виде  $\rho_k \approx \sqrt{2} a_0 / \sqrt{\mu_n}$ ,  $\rho'_k \approx \sqrt{3} \rho_k$ . На рис. 3 приведены результаты численных расчетов  $b_I(\rho)$ , выполненных по формулам (5), (6) в случае монодисперсных частиц при помощи метода статистических испытаний. Как следует из рис. 3, коэффициент корреляции  $\rho_I$  в ограниченных пучках значительно больше, чем в плоской и сферической волнах. В отличие от случая  $\mu < 1$  в области сильных флюктуаций  $\rho_I$  монотонно убывает с ростом  $\mu$ . На рис. 4 нарисованы графические зависимости функции влияния размера приемника  $G(R)$ , соответствующие асимптотическим выражениям (23), (24), а также расчетным кривым 3, 4 (рис. 3). Как следовало ожидать, осредняющее действие приемника в случае пространственно-ограниченных пучков слабее, чем в случае сферической, а особенно плоской волн.

Расчеты, проведенные в работе с помощью метода статистических испытаний, выполнены с погрешностью, меняющейся от 2 до 20%, при

следующих значениях параметров, входящих в задачу:  $\lambda = 0,63 \cdot 10^{-6}$  м,  $a_0 = 5 \cdot 10^{-4}$  м,  $\alpha_0 = 10^{-2} \div 10^{-1}$  м.



а)



б)

Рис. 2. Нормированная спектральная плотность  $U(f) = fW(f)/B_I(0)$ ;

а)  $n(a) = \delta(a - a_0)$ ,  $a_0 = 5 \cdot 10^{-4}$  м,  $V_\perp = 6,5$  м/с;  
прямая — расчетные кривые 1 —  $L/F = 0$ ,  $\Omega = 0,77$ ,  $\mu < 1$ , 2 —  $L/F = 1$ ,  $\Omega = 38$   
и  $L/F = 0$ ,  $\Omega = 0,38$ ,  $\mu = 20$ ; пунктирующая — асимптотические кривые: 1 — плоская  
волна,  $\mu \ll 1$ ; 2 — плоская волна,  $\mu \gg 1$ ;

б) 1 —  $n(a) = \delta(a - a_0)$ ,  $a_0 = 10^{-3}$  м,  $V_\perp(a_0) = 200,8 a_0^{1/2}$  (расчет по формулам (9), (10));  
2 — расчетные данные [13] (модель Маршалла — Пальмера:  $n(a) = N_0 \exp(-2\Lambda a)$ ,  $\Lambda = 4100 I^{-0,21}$  м<sup>-1</sup>,  $N_0 = 8 \cdot 10^6$  м<sup>-4</sup>, интенсивность дождя  $I = 1$  мм/час;  $V_\perp(a) = 200,8 a^{1/2}$ ); 3 — расчет по формуле (11) ( $a_m = 2,5 \cdot 10^{-4}$  м,  $\alpha = 1$ ,  $c_1 = 200,8$ ); I, II, III — экспериментальные данные (см. рис. 5 в [20]).

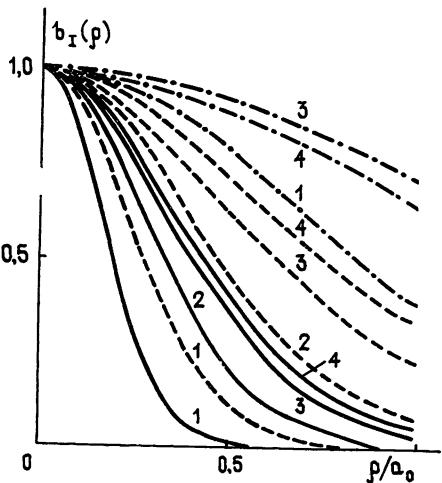


Рис. 3.

Рис. 3. Коеффициент пространственной корреляции  $b_I(\rho) = B_I(\rho)/B_I(0, \rho/2)$ ;  
штрихпунктир —  $\mu < 1$ , пунктир —  $\mu = 10$ , прямая —  $\mu = 20$ , 1 — плоская волна, 2 —  
сферическая волна; 3 —  $L/F = 1$ ,  $\Omega = 38$ ; 4 —  $L/F = 0$ ,  $\Omega = 0,05$ .

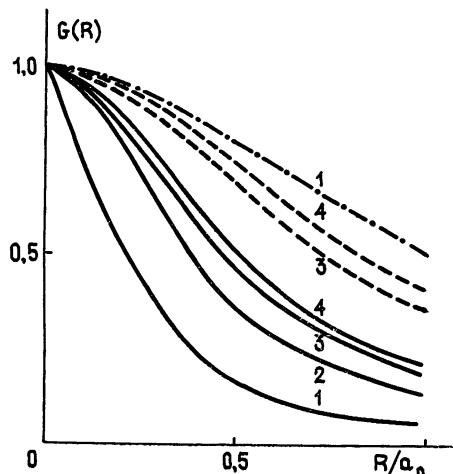


Рис. 4.

Рис. 4. Функция влияния размера приемника  $G(R)$ ;  
штрихпунктир —  $\mu < 1$ , пунктир —  $\mu = 10$ , прямая —  $\mu = 20$ ; 1 — плоская волна; 2 —  
сферическая волна, 3 —  $L/F = 1$ ,  $\Omega = 38$ ; 4 —  $L/F = 0$ ,  $\Omega = 0,05$ .

Таким образом, проведенный в работе асимптотический и численный анализ дисперсии, коэффициентов пространственной и временной

корреляции, а также частотных спектров и функции влияния размера приемника позволил, помимо определения характерных масштабов флуктуаций интенсивности, выявить некоторые особенности, связанные с пространственной ограниченностью лазерных пучков как в области слабых, так и в области сильных флуктуаций. Полученные в работе простые формулы позволяют не только рассчитывать важные для практических целей статистические характеристики флуктуаций интенсивности оптического излучения, рассеянного гидроэолем с тем или иным конкретным спектром размеров  $n(a)$ , но и представляют принципиальную возможность решения обратных задач. Так, например, по измерениям осредняющего действия апертуры (формула (18)) или частотных спектров (формула (10)) возможно определение функции распределения частиц по размерам  $n(a)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Крутиков В. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 1, с. 84.
2. Крутиков В. А. — В сб.: Рассеяние и рефракция оптических волн в атмосфере. — Томск: 1976.
3. Калашников Н. П., Рязанов М. И. — ЖЭТФ, 1966, 50, вып. 2, с. 459.
4. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. — М.: Наука, 1978.
5. Миронов В. Л. Тезисы докладов XII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. Ч. 2. — М.: Наука, 1978.
6. Соболь И. М. Численные методы Монте-Карло — М.: Наука, 1973.
7. Татарский В. И. Препринт. Отделение океанологии, физики атмосферы и географии АН СССР. — М., 1970.
8. Прохоров А. М., Бункин Ф. В., Гочелашвили К. С., Шишов В. И. — УФН, 1974, 114, вып. 3, с. 415.
9. Гурвич А. С., Кон А. И., Миронов В. Л., Хмелевцов С. С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. /Под ред. В. И. Татарского. — М.: Наука, 1976.
10. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975.
11. Барабаненков Ю. Н. — УФН, 1975, 117, вып. 1, с. 49.
12. Глазов Г. Н., Тузова С. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 11, с. 1704.
13. Ting-i-Wang, Clifford S. F. — J. Opt. Soc. Am., 1978, 65, № 8, p. 927.
14. Исимару А. — ТИИЭР, 1977, 65, № 7, с. 46.
15. Ерухимов Л. М., Шпиро П. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1974, 17, № 6, с. 879.
16. Миронов В. Л., Тузова С. И. Тезисы докладов V Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в атмосфере. Ч. 1 — Томск: 1979.
17. Литвинов И. В. Структура атмосферных осадков. — Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
18. Банах В. А., Миронов В. Л. — В сб.: Распространение оптических волн в случайно-неоднородной атмосфере. — Новосибирск: Наука, 1979.
19. Вапакh V. A., Migopec V. L. — Opt. Lett., 1977, 1, № 5, p. 172.
20. Галахов Н. В., Ефремов А. В., Жуков А. Ф., Рейно В. В., Цывик Р. Ш. — Изв. АН СССР, Сер. Физика атмосферы и океана, 1976, 12, № 12, с. 1251.
21. Гурвич А. С., Покасов В. В. — Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1972, 8, № 8, с. 878

Институт оптики атмосферы  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
28 сентября 1979 г.

## FLUCTUATIONS OF LASER RADIATION INTENSITY IN A MEDIUM WITH DISCRETE LARGE SCALE INHOMOGENEITIES

V. L. Mironov, S. I. Tuzova

An approximate calculation method is suggested for some statistical characteristics of intensity fluctuations of a laser radiation in multiple scattering by discrete large-scale inhomogeneities (for example, rain particles). The behaviour of dispersion, space and time correlation as well as frequency spectra and the function of a receiver dimension influence depending on the medium optical depth and diffraction conditions on the radiation aperture are investigated in limiting cases of weak and strong fluctuations.