

УДК 621.372.8

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА НЕ ИДЕАЛЬНО-ПРОВОДЯЩЕЙ ГРЕБЕНКЕ

Г. Я. Слепян, А. Я. Слепян

Рассмотрена двумерная задача дифракции плоской электромагнитной волны на плоской импедансной гребенке. Построено строго обоснованное решение данной задачи в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода. Рассчитана мощность потерь для случая электрической поляризации. Показано, что при определенных параметрах тепловые потери в гребенке существенно меньше, чем в полупространстве с гладкой поверхностью.

Настоящая статья посвящена построению теории дифракции на импедансной гребенке с бесконечно тонкими гребнями* (рис. 1). Интерес к этой задаче обусловлен, главным образом, возможностями снижения тепловых потерь в различных СВЧ устройствах, которые открываются, если использовать гребенчатые структуры в качестве поверхно-

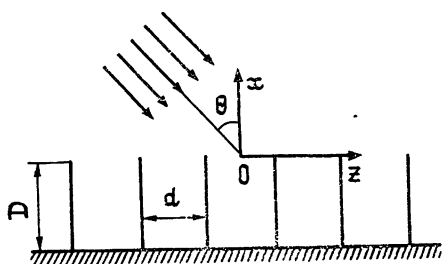


Рис. 1.

стей, направляющих электромагнитные волны. Натурные и численные эксперименты [1-4] с круглыми гофрированными волноводами показали, что в них существуют режимы аномально малого затухания EH_{11} -волны. Позже аналогичный результат был получен и для прямоугольного гофрированного волновода [5]. В [5] показано, что подобным свойством обладает также коаксиальный волновод с гофрированным внутренним и внешним проводниками.

В данной статье рассматривается ключевая для указанной тематики задача: отражение плоской волны $\varphi^0(x, z) = \exp[jk(x \cos \theta - z \sin \theta)]^{**}$ от гребенки из не идеально-проводящего материала.

1. Постановка задачи. Рассматривается следующая постановка задачи: требуется найти решение уравнения

$$\nabla_{xz}^2 \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (1)$$

($-D \leq x \leq \infty$, $-\infty \leq z \leq \infty$), удовлетворяющее импедансным граничным условиям на поверхности структуры

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \pm j\eta \varphi \right)_{z=(m+1/2)d, -D \leq x \leq 0} = 0; \quad (2a)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + j\eta_1 \varphi \right)_{x=-D, |z| \leq \infty} = 0 \quad (2б)$$

* Физический смысл понятия бесконечно тонкого гребня здесь заключается в следующем: толщина гребня исчезающе мала в сравнении с глубиной структуры, ее периодом и длиной падающей волны, однако существенно превышает толщину скин-слоя. В этом случае для учета поглощения можно использовать граничные условия импедансного типа.

** Временная зависимость — $e^{j\omega t}$.

($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, η , η_1 — приведенные поверхностные импедансы, знак $\pm$ в (26) соответствует правой и левой сторонам пластин), условию на ребре [7], условию излучения (при $x \rightarrow \infty$ ($\varphi - \varphi^0$) представляет собой суперпозицию уходящих на бесконечность плоских волн).

Предположим, что $\operatorname{Re} \eta$, $\eta_1 \geq 0$ (условие пассивности) и $\operatorname{Im} \eta > 0$, либо $\operatorname{Im} \eta < 0$, но $|\eta| \ll k$ (последнее соответствует случаю электрически-поляризованной волны ($\varphi(x, z) = H_y(x, z)$, $H_x = H_z = 0$) над слабопоглощающей металлической структурой).

2. Система линейных алгебраических уравнений первого рода. Для решения поставленной задачи используем метод сшивания. Поле над структурой представим в виде разложения по пространственным гармоникам

$$\varphi(x, z) = \varphi^0 + \sum_{p=-\infty}^{\infty} B_p e^{j\alpha_p z} e^{-\Gamma_p x}, \quad (3)$$

d — период структуры, $\alpha_p = \frac{2(p\pi + u)}{d}$, $u = ka \sin \theta$, $\Gamma_p = \sqrt{\alpha_p^2 - k^2}$, $a = d/2$.

Поле в m -й ячейке структуры разложим в ряд по прямым и встречным собственным волнам плоского волновода, на стенках которого выполнены условия (2а):

$$\varphi^{(m)}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z - md) A_n^{(m)} (e^{\gamma_n x} + \rho_n e^{-\gamma_n x}), \quad (4)$$

где

$$\varphi_{2n} = \cos \bar{\beta}_n z, \quad \varphi_{2n+1} = \sin \bar{\beta}_n z,$$

$$\rho_n = e^{-2\gamma_n D} (\gamma_n + j\eta_1) / (\gamma_n - j\eta_1), \quad \gamma_{2n} = \sqrt{\bar{\beta}_n^2 - k^2}, \quad \gamma_{2n+1} = \sqrt{\bar{\beta}_n^2 - k^2},$$

$\bar{\beta}_n$, $\bar{\beta}_n$ удовлетворяют трансцендентным уравнениям

$$-\bar{\beta}_n \operatorname{ctg} \bar{\beta}_n a = j\eta, \quad \bar{\beta}_n \operatorname{tg} \bar{\beta}_n a = j\eta.$$

Возможность разложения (4) в рассматриваемой задаче, в отличие от случая идеальной проводимости, неочевидна и требует специального обоснования. Для несамосопряженного оператора, отвечающего однородной задаче о волноводе с импедансными стенками, в общем случае (см., например, [8]) имеет место полнота семейства только корневых функций, содержащего кроме собственных также и присоединенные функции. Однако при ограничениях на $\operatorname{Re} \eta$, $\operatorname{Im} \eta$, оговоренных в п. 1, присоединенные функции отсутствуют (см. Приложение 1). Этим и обусловлена законность данного разложения.

Представления (3), (4) удовлетворяют уравнению (1), условию излучения, граничным условиям (2а), (2б). В силу условий квазипериодичности Флоке $A_n^{(m)} = A_n^{(0)} e^{2jmu}$, что дает возможность ограничиться рассмотрением одного периода $m = 0$. Неизвестные коэффициенты B_p , $A_n^{(0)}$ находятся из условий сшивания разложений (3) и (4) и их нормальных производных в плоскости $x = 0$ на интервале $|z| \leq d/2$. Проводя сшивание аналогично [7, 9], исключая $A_n^{(0)}$, и выполняя некоторые преобразования, мы приходим к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно новых неизвестных c_p :

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p \frac{1 + \omega_{pn}}{1 + \omega_{0n}} \left(\frac{1}{\Gamma_p - \gamma_n} + \frac{\rho_n}{\Gamma_p + \gamma_n} \right) = \left(\frac{1}{\Gamma_0 + \gamma_n} + \frac{\rho_n}{\Gamma_0 - \gamma_n} \right), \quad (5)$$

где

$$\omega_{p, 2n+1} = \frac{Q_1}{\alpha_p + Q_2}, \quad \omega_{p, 2n} = 0,$$

$$c_p = (-1)^p B_p \frac{\alpha_p + Q_2}{k \sin \theta + Q_2}, \quad Q_1 = \frac{2j\eta}{\sin 2u}, \quad Q_2 = j\eta \operatorname{ctg} u.$$

Для выполнения условия на ребре необходимо искать $\{c_p\}$ в классе числовых последовательностей, удовлетворяющих (см. [7]) условию

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} |c_p|^2 \frac{1 + |p|}{p^2} < \infty. \quad (6)$$

Зная c_p , можно найти $A_n^{(0)}$ (эти соотношения мы для краткости не выписываем) и вычислить любые интегральные характеристики рассеяния для данной задачи.

3. Единственность решения. Закон сохранения энергии. Введем небольшое поглощение в среде ($k = k' + jk''$, $k' > 0$, $k'' > 0$) и рассмотрим однородную ($\varphi^0 \equiv 0$) краевую задачу, соответствующую сформулированной выше. Решение этой задачи $\varphi(x, z)$ удовлетворяет тождеству

$$j\eta \int_l |\tilde{\varphi}|^2 dl + \int_{-d}^{\infty} \int_{-d/2}^{d/2} \{k^2 |\tilde{\varphi}|^2 - |\nabla \tilde{\varphi}|^2\} dx dz = 0, \quad (7)$$

l — контур интегрирования, соответствующий одному периоду $|z| \leq d/2$ (при выполнении принципа излучения и условия на ребре все интегралы в (7) сходятся). Отделяя в (7) мнимую часть, мы получаем для пассивных структур ($\operatorname{Re} \eta > 0$) теорему единственности для исходной задачи и системы (5) (предполагая, что соответствующие решения существуют). В пределе $k'' \rightarrow 0$ единственное решение можно выделить по принципу предельного поглощения.

В случае $k'' = 0$ и $\varphi^0 \neq 0$ имеет место такое равенство, выражающее закон сохранения энергии в данной задаче:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_{-d/2}^{d/2} \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz = \operatorname{Re} \eta \int_l |\varphi|^2 dl. \quad (8)$$

Подставляя (3) в (8), получаем следующий результат:

$$\frac{W^0}{k} \sum_{p=-N_-}^{N_+} (\delta_{p0} - |B_p|^2) j \Gamma_p d = P, \quad (9)$$

где $N_{\pm}$ — число распространяющихся пространственных гармоник (соответственно положительных и отрицательных), δ_{p0} — символ Кронекера, P — погонная (на период структуры) мощность потерь, W^0 — волновое сопротивление вакуума.

4. Модифицированный метод вычетов. В настоящем пункте мы построим решение системы (5) при помощи модифицированного метода вычетов. Этот подход был предложен [9] для частного случая системы (5), когда $\omega_{pn} = 0$. Ниже будет дана соответствующая модификация этого метода. Проводимые при этом выкладки сохраняют смысл, если

$$\sin \theta \neq 0, \quad kd \neq \pi / \sin \theta, \quad (10)$$

где m — целое число. При невыполнении условий (10) требуется отдельное рассмотрение, однако на этом мы останавливаться не будем*.

Будем искать решение (5) в виде

$$c_p = \frac{P(\Gamma_p)}{P(-\Gamma_0)} d_p, \quad (11)$$

где

$$P(w) = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F_m}{w - \gamma_m},$$

F_m — новые неизвестные коэффициенты, $d_p = \text{Res } \psi(w)|_{w=\Gamma_p}$, функция $\psi(w)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\psi(w)$ аналитична в плоскости комплексной переменной w , за исключением точек $w = \Gamma_p$, $w = -\Gamma_0$ ($p = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$), где она имеет простые полюсы;

2) $\psi(w)$ убывает на любой правильной системе контуров при $w \rightarrow \infty$;

3) $\text{Res } \psi(w)|_{w=-\Gamma_0} = 1$ (условие нормировки);

4) $\psi(w)$ имеет только простые нули в точках $w = \gamma_n$ (функция $\psi(w)$ по условиям 1)–4) может быть легко построена в явном виде [7, 9]).

Подставляя (11) в (5) и выполняя ряд преобразований при помощи теоремы о вычетах, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно F_m :

$$(I + T)F = t, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} T_{mn} = & \frac{1}{\Lambda_n} \left\{ \frac{\omega_{0n}}{\Gamma_0 + \gamma_m} \left[\frac{1}{\Gamma_0 + \gamma_n} + \frac{\rho_n}{\Gamma_0 - \gamma_n} \right] + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{d_p \omega_{pn}}{\Gamma_p - \gamma_m} \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{1}{\Gamma_p - \gamma_n} + \frac{\rho_n}{\Gamma_p + \gamma_n} \right] + \frac{\rho_n \psi(-\gamma_n)}{(\gamma_n + \gamma_m)} \right\}, \\ I_{mn} = & \delta_{mn}, \quad \Lambda_n = \frac{d\psi}{dw} \Big|_{w=\gamma_n}. \end{aligned} \quad (13)$$

Свободные члены t_n даются равенством

$$\begin{aligned} t_n = & \frac{1}{\Lambda_n} \left\{ \frac{\omega_{0n}}{\Gamma_0 + \gamma_n} + \frac{\rho_n \omega_{0n}}{\Gamma_0 - \gamma_n} - \sum_{p=-\infty}^{\infty} d_p \omega_{pn} \left(\frac{1}{\Gamma_p - \gamma_n} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\rho_n}{\Gamma_p + \gamma_n} \right) + \rho_n \psi(-\gamma_n) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Явные выражения для $\psi(w)$, d_p , Λ_n получить нетрудно, но, так как они довольно громоздки, мы их опускаем.

Как показано в Приложении 2, система (12)–(14) является системой 2-го рода. Она может быть эффективно решена численно и, что особенно важно, допускает приближенное аналитическое исследование задачи.

5. Мощность потерь для электрической поляризации. Рассмотрим далее случай электрической поляризации ($\varphi = H_y$). Предположим, что глубина структуры достаточно велика, а период структуры таков, что

* Заметим, что такое рассмотрение не составит труда: при невыполнении условий (10) система (5) сводится к более простому виду, детально изученному в [7, 9].

все E_{0n} -моды в канавках запредельны, причем условия для E_{01} -волны не слишком близки к критическим. Математически эти допущения формулируются следующим образом:

$$\mu \geq 1; \quad (15a)$$

$$Y < \pi, \quad \exp(-\mu \sqrt{\pi^2 - Y^2}) \ll 1; \quad (15b)$$

$$\pi^2 - Y^2 \gg |Z|/W^0 Y, \quad (15b)$$

где $\mu = D/d$, $Y = kd$, Z — волновое сопротивление материала гребней ($Z = \eta W^0/k$). Для реальных металлов с большим запасом выполняется неравенство $|Z|/W^0 \ll 1$, что, как показано в Приложении 3, позволяет использовать теорию возмущений по параметру $|Z|/W^0$ в первом порядке малости. Рассмотрение данной задачи при оговоренных выше допущениях представляет наибольший практический интерес.

Поглощение энергии в данном случае можно характеризовать как модулем коэффициента отражения $|R| = |B_0|$, так и мощностью потерь P в структуре. Эти величины связаны соотношением

$$(1 - |R|^2) W^0 d \cos \theta = P, \quad (16)$$

вытекающим из (9) при условии $Y < \pi$. Практически удобнее, однако, вычислять непосредственно P , а $|R|$ находить из (16), так как при расчете P достаточно определить полевые величины в нулевом порядке теории возмущений, в то время как при вычислении R из (12) необходимо учитывать малые первого порядка. В соответствии со сказанным выше можно записать для P следующее выражение:

$$P \approx \frac{|Z|d}{\sqrt{2}} \left\{ 2\alpha \int_{-1}^1 f(\zeta) d\zeta + \mu \int_0^1 [F_+(\xi) + F_-(\xi)] d\xi \right\},$$

$$f(\zeta) = \left| \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-h_n \mu} \cos \frac{n\pi}{2} (\zeta - 1) \right|^2, \quad (17)$$

$$F_{\pm}(\xi) = \left| \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varepsilon_n^{\pm} (e^{-h_n \mu \xi} + e^{h_n \mu (\xi-2)}) \right|^2,$$

$$h_n = \sqrt{(n\pi)^2 - Y^2} \quad (n \geq 1), \quad h_0 = -jY, \quad \varepsilon_n^+ = 1,$$

$$\varepsilon_n^- = (-1)^n, \quad \alpha = |\eta_1|/|\eta|,$$

A_n — коэффициент возбуждения n -й собственной волны в канавке, вычисленный в предположении идеальной проводимости материала структуры ($A_n = \lim_{\eta \rightarrow 0} A_n^{(0)}$).

В соответствии с условиями (15a), (15b) в рядах для $F_{\pm}(\xi)$ и $f(\zeta)$ можно ограничиться одним членом, что физически соответствует учету вклада в мощность потерь только от ТЕМ-волны*. Выполнив в (17) интегрирование и некоторые упрощения, приходим к следующему приближенному соотношению:

$$P \approx \left\{ |A_0|^2 \left[\alpha + \mu \left(1 + \frac{\sin 2Y\mu}{2Y\mu} \right) \right] \right\} 2\sqrt{2} d |Z|. \quad (18)$$

* Основанием для такого упрощения является как существенное убывание A_n с ростом n , так и экспоненциальное спадание полей запредельных волн в глубь канавок, благодаря чему после интегрирования отбрасываемые в (17) слагаемые приобретают дополнительный порядок малости.

Таким образом, дальнейшее сводится к определению модуля коэффициента возбуждения $|A_0|^2$.

Для A_n в нулевом порядке теории возмущений имеем

$$A_n = - \frac{(2 - \delta_{n0}) v_n (-1)^n}{\left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X_m}{\Gamma_0 + h_m/d}\right)} X_n e^{2h_n \mu} \frac{d\psi}{d\omega} \Big|_{\omega=h_n/d, \eta=0}, \quad (19)$$

где

$$v_n = \begin{cases} \sin\left(\frac{Y}{2} \sin \theta\right), & n = 0, 2, 4, \dots \\ j \cos\left(\frac{Y}{2} \sin \theta\right), & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}, \quad X_n = F_n|_{\eta=0}.$$

Коэффициенты X_n определяются из системы (12), в которой предварительно отброшены члены высших порядков малости по $\frac{|\eta|}{k} = \frac{|Z|}{W^0}$.

Для этой системы можно найти приближенное аналитическое решение, если учесть, что при выполнении условий (15а), (15б) «отражение» E_{0n} -волн от сечения $x = -D$ пренебрежимо мало*. Тогда в этой системе можно опустить экспоненциально малые слагаемые, после чего нетрудно, выполнив ряд преобразований, получить следующее выражение для A_0 :

$$A_0 = \frac{Y(\cos \theta - 1) \exp\left[-\frac{jY \ln 2}{\pi}(1 - \cos \theta)\right] H(-jY)}{v_0 \operatorname{tg} \theta \left\{1 - p \exp[2jY(\mu - \ln 2/\pi)] \frac{H(-jY)}{H(jY)}\right\} H(-jY \cos \theta)}, \quad (20)$$

$$p = \operatorname{tg}^2(\theta/2);$$

$$H(\omega) = \prod_{q=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{h_q}\right) \Big/ \left(1 - \frac{\omega}{\Gamma_q d}\right) \left(1 - \frac{\omega}{\Gamma_{-q} d}\right). \quad (21)$$

Из соотношений (20), (21) находим $|A_0|^2$. Учитывая легко проверяемые тождества

$$|H(jY)|^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 \theta [\cos(Y \sin \theta) - \cos Y]}{2 \sin^2((Y/2) \sin \theta)} \frac{Y}{\sin Y},$$

$$|H(jY \cos \theta)|^2 = |H(jY)|^2 \frac{4 \sin^2((Y/2) \sin \theta)}{Y^2 \sin^2 \theta},$$

получаем следующее выражение:

$$|A_0|^2 = \frac{(1-p)^2}{1+p^2-2p \cos \Omega}, \quad (22)$$

где

$$\Omega = 2Y(\mu - \ln 2/\pi) + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \left[\arcsin\left(\frac{Y}{2q\pi + Y \sin \theta}\right) + \arcsin\left(\frac{Y}{2q\pi - Y \sin \theta}\right) - \arcsin\left(\frac{Y}{q\pi}\right) \right]. \quad (23)$$

* Термин «отражение» применительно к запредельным волнам весьма условен; мы, подчеркивая это обстоятельство, заключаем его в кавычки.

6. Численные результаты и обсуждение. Проанализируем вначале случай нормального падения ($\sin \theta = 0$), полагая для простоты $\kappa = 1$.

Из (22) следует, что в этом случае $|A_0| = 1$. Тогда из (18) получаем

$$P \approx \left[1 + \mu \left(1 + \frac{\sin 2Y\mu}{2Y\mu} \right) \right] 2\sqrt{2} |Z| d. \quad (24)$$

Из (24) ясно, что при любых Y, μ $\alpha = P/P_0 > 1$ ($P_0 = \lim_{\mu \rightarrow 0} P(\theta, Y, \mu)$), т. е. поглощение в гребенке при нормальном

падении больше, чем в полупространстве из того же материала с гладкой поверхностью. Этот результат довольно прозрачен с физической точки зрения: при нормальном падении искажение поля гребнями структуры крайне мало*, поэтому поглощение на доньшках канавок практически такое же, как и в полупространстве при отсутствии гребней. Кроме того, имеются дополнительные токонесящие поверхности гребни, которые, внося свой вклад в полные потери, существенно их увеличивают.

На рис. 2—4 показаны зависимости $\alpha(\theta)|_{Y, \mu = \text{const}}$, $\alpha(\mu)|_{Y, \theta = \text{const}}$, $\alpha(Y)|_{\mu, \theta = \text{const}}$, рассчитанные по формулам (18), (23), (24) при $\kappa = 1$. Из рис. 2 видно, что $\alpha(\theta)$ монотонно убывает с ростом θ и, начиная с некоторых θ , $\alpha < 1$. Это означает, что при соответствующих Y, μ, θ потери в гребенке меньше, чем в полупространстве с гладкой поверхностью. Уже при $\theta \approx 60^\circ$ выигрыш в потерях примерно в 2 раза, при $\theta \approx 80^\circ$ выигрыш составляет 10—15 раз. Следует обратить внимание на существенную зависимость поглощения от глубины структуры; эта зависимость носит экстремальный характер — при заданных θ, Y, μ существуют оптимальные глубины структуры D_{opt} , при которых поглощение минимально. Развитая выше теория показывает, что D_{opt} несколько превышает четверть длины падающей волны; это соответствует экспериментальным данным

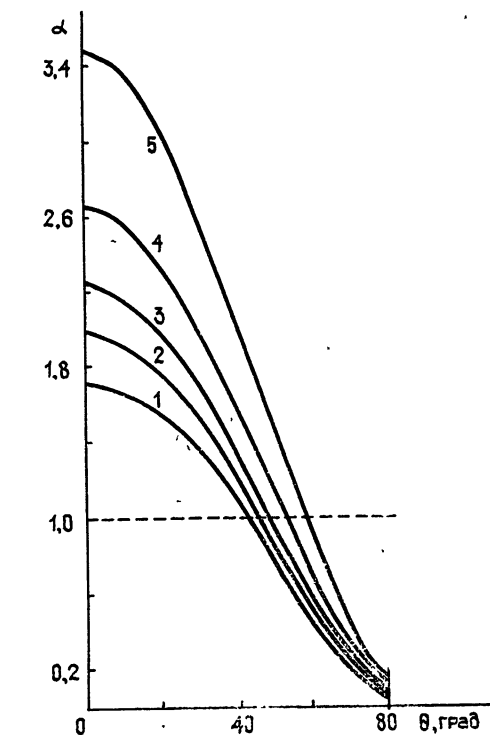


Рис. 2. 1 — $Y=2,2$, $\mu=0,71$; 2 — $Y=1,57$, $\mu=1,0$; 3 — $Y=1,26$, $\mu=1,25$; 4 — $Y=0,94$, $\mu=1,66$; 5 — $Y=0,63$, $\mu=2,5$.

[1—3]. Физическая сущность данного эффекта заключается в том, что при соответствующих параметрах структура электромагнитное поле как бы «отжимается» от металлических поверхностей, ввиду чего уменьшаются наводимые токи.

Построенная в настоящей работе теория позволяет, в частности, дать интерпретацию данным работ [1—3] по затуханию HE_{11} -волны в круглых гофрированных волноводах. Действительно, поле данной собственной волны может быть представлено в виде суперпозиции брил-

* В случае идеальной проводимости искажение совсем отсутствует.

брюэновских плоских волн. Основную роль в этом разложении играют волны электрической поляризации*, единичный акт отражения которых описывается развитой выше теорией. Вблизи критической частоты затухание волны EH_{11} по данным [1-3] больше, чем соответствующей

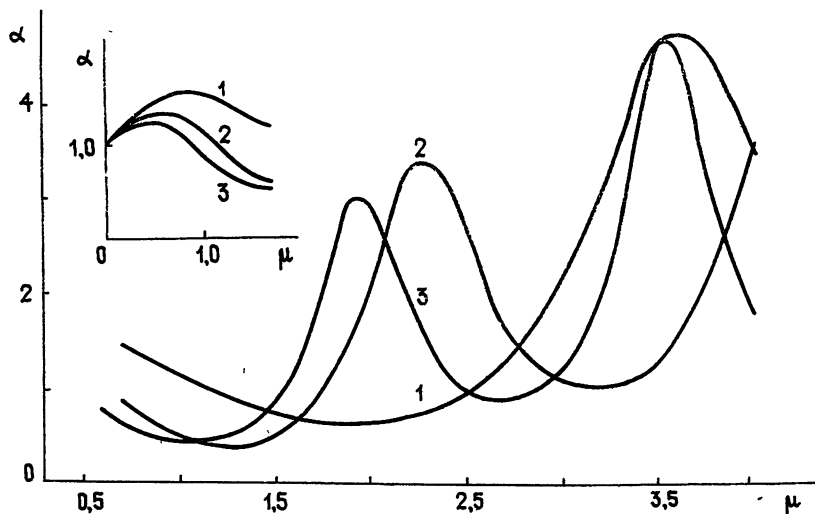


Рис. 3. $\theta=60^\circ$; 1 — $Y=0,94$, 2 — $Y=1,57$, 3 — $Y=1,88$.

волны (H_{11}) в гладкостенном волноводе; это объясняется тем, что вблизи критической частоты в бриллюэновском спектре преобладают волны с углами падения, близкими к нормальным, испытывающие повышенное поглощение. Наоборот, вдали от критической частоты основной вклад в бриллюэновский спектр вносят волны с углами падения, близкими к скользящим; их поглощение в гребенке при каждом акте отражения существенно меньше, чем на гладкой поверхности, поэтому и затухание в гофрированном волноводе в этом случае меньше, чем в волноводе с гладкими стенками.

Расчеты показывают, что при выполнении условий (15б), (15в) можно упростить также соотношение (24), отбрасывая в нем бесконечные ряды. Тогда для мощности потерь получается следующая простая формула:

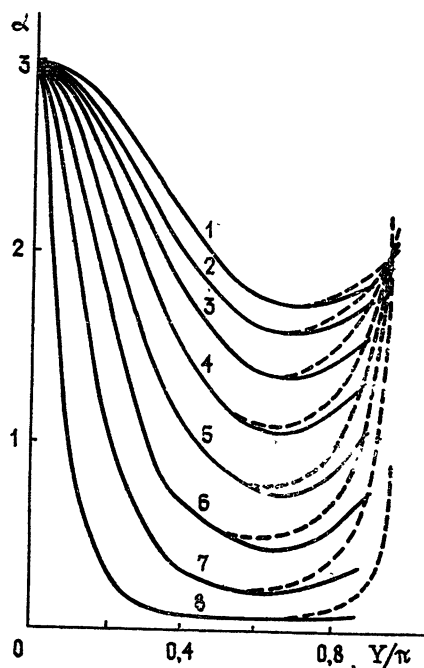


Рис. 4. $\mu=1$; 1 — $\theta=10^\circ$, 2 — $\theta=20^\circ$, 3 — $\theta=30^\circ$, 4 — $\theta=40^\circ$, 5 — $\theta=50^\circ$, 6 — $\theta=60^\circ$, 7 — $\theta=70^\circ$, 8 — $\theta=80^\circ$.

* На относительную малость вклада волн противоположной (магнитной) поляризации указывает, в частности, наблюдавшаяся в экспериментах [1] довольно ярко выраженная резонансная зависимость затухания от глубины структуры.

$$P \approx \left[\alpha + \mu \left(1 + \frac{\sin 2Y\mu}{2Y\mu} \right) \right] \frac{d(1-p)^2 2\sqrt{2} |Z|}{\left\{ 1 + p^2 - 2p \cos \left[2Y \left(\mu - \frac{\ln 2}{\pi} \right) \right] \right\}}. \quad (25)$$

Для проверки точности полученных аналитически приближенных формул, а также с целью снятия ограничений (15а), (15б) рассматриваемая задача была решена численно на ЭВМ. Ввиду (15в) A_n рассчитывались по формуле (19). Система (12) решалась в нулевом приближении теории возмущений методом редукции до N -го порядка. Мощность потерь рассчитывалась по формуле (17), но в рядах для $f(\xi)$ и $F_{\pm}(\xi)$ удерживалось N членов. Конкретные расчеты были проведены для $N = 10$, что, как показали численные эксперименты, гарантирует при данном наборе параметров точность не хуже 1%. Результаты численного решения показаны на вставке к рис. 3 и пунктирными линиями на рис. 4. Сравнение этих данных с результатами, полученными по формулам (18), (22), (23), либо (25), показывает, что при $\mu \geq 1$, $Y \leq \pi/2$ эти формулы дают графическую (в принятом на рис. 3, 4 масштабе) точность. При $Y > \pi/2$ либо $\mu < 1$ появляется некоторое расхождение, что объясняется возрастающим влиянием высших типов волн в канавках. Следует заметить, что качественный характер зависимости $\alpha(Y)|_{\mu, \theta = \text{const}}$, рассчитанной по приближенным формулам, остается правильным и при $Y > \pi/2$.

Основные результаты настоящей статьи сводятся к следующему.

1) Получены простые аналитические соотношения для мощности потерь электрически-поляризованной плоской волны в металлической гребенке с неидеальной проводимостью.

2) Показано, что при соответствующих параметрах поглощение в гребенке для электрически-поляризованной волны существенно меньше, чем в полупространстве с гладкой поверхностью из того же материала.

Данный эффект может быть использован для снижения потерь в линиях передачи электромагнитных волн, резонансных контурах СВЧ и т. д. Аналогичный эффект имеет место и в акустике: для уменьшения потерь энергии при отражении звуковой волны от жесткой звукопоглощающей поверхности последнюю необходимо делать гребенчатой (гофрированной). Теория явления и расчетные соотношения в акустическом случае остаются такими же. Однако в случае инерционной реакции материала структуры следует считаться с возможностью возбуждения присоединенной волны.

Авторы признательны А. С. Ильинскому за советы и поддержку при выполнении данной работы, а также Е. И. Нефёдову и А. Т. Фиалковскому за обсуждение.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Получим некоторые достаточные условия отсутствия присоединенных волн в плоском волноводе с импедансными стенками. Дисперсионное уравнение удобно записать в следующем виде:

$$f(\beta) = e^{i\beta d} (\beta + \eta) \mp (\beta - \eta) \quad (\text{П.1})$$

(знак $\pm$ соответствует четным и нечетным волнам).

Условие существования присоединенной волны, согласно [8], заключается в выполнении равенства $\frac{df}{d\beta}(\beta) = 0$ совместно с (П.1). Производя простые вычисления, получаем равенство

$$jd(\beta^2 - \eta^2) = -2\eta, \quad (\text{П.2})$$

которое должно выполняться одновременно с (П.1).

1. Уравнения (П.1), (П.2) — инвариантны относительно замены $\beta \rightarrow -\beta$, поэтому достаточно рассмотреть лишь одну (для определенности верхнюю) полуплоскость комплексного переменного β . Положим $\beta = \beta' + j\beta''$, $\eta = \eta' + j\eta''$. Из (П.1) следует:

$$e^{-2\beta''} = \frac{(\beta' + \eta')^2 + (\beta'' + \eta'')^2}{(\beta' - \eta')^2 + (\beta'' - \eta'')^2}. \quad (\text{П.3})$$

Преобразуя (П.3), получаем неравенство

$$\beta'\eta' + \beta''\eta'' < 0. \quad (\text{П.4})$$

Из (П.2) можно получить равенство

$$\eta' \left(\eta'' + \frac{1}{d} \right) = \beta' \beta''. \quad (\text{П.5})$$

Легко видеть, что если $\eta'' > 0$ или $\eta' d < -1$, то при любых η' (П.4) и (П.5) несовместны. В этом случае присоединенные волны существовать не могут.

2. При достаточно малых $|\eta|$, как следует из (П.2), присоединенные волны могут порождаться лишь четной собственной волной с малым $\beta \sim O(|\eta|^{1/2})$. Из (П.1) для случая четных волн и (П.2) можно получить уравнение для η , при которых возможна присоединенная волна, в следующем виде:

$$\sqrt{\frac{2j\eta}{d} + \eta^2} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{2j\eta}{d} + \eta^2} - j\eta = F(\eta) = 0.$$

Легко видеть, что $F(\eta)$ аналитична в некотором круге с центром $\eta = 0$ и, вместе с тем, $F(0) = 0^*$. Поэтому, в силу теоремы единственности для аналитических функций [12], $F(\eta) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $\eta = 0$. Таким образом, при достаточно малых $|\eta|$ присоединенные волны отсутствуют независимо от знака η'' и соотношений между η' и η'' .

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Из результатов [13] следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\gamma_{2n} = \bar{\beta}_n = \frac{n\pi}{a} + O(n^{-1}); \quad (\text{П.6})$$

$$\gamma_{2n+1} = \bar{\beta}_n = (n + 1/2) \frac{\pi}{a} + O(n^{-1}). \quad (\text{П.7})$$

Учитывая (П.6), (П.7), аналогично [7, 9] можно показать, что при $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические оценки

$$|\Lambda_n| = O(n^{-1/2}); \quad (\text{П.8})$$

$$|d_n| = O(|n|^{-1/2}). \quad (\text{П.9})$$

Пользуясь оценками (П.6)–(П.9) и учитывая ограничения (10), можно установить следующие асимптотические оценки для матричных элементов и свободных членов системы (12) при $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$:

$$|T_{mn}| = O(1/m \sqrt{n}); \quad (\text{П.10})$$

$$|t_n| = O(1/\sqrt{n}). \quad (\text{П.11})$$

* Разумеется, точка вырождения $\eta = 0$ фиктивна и не приводит к возбуждению присоединенной волны.

При помощи оценок (П.10), (П.11) можно показать, что существует последовательность чисел g_m , такая, что замена переменной $Y_m = g_m F_m$ приводит систему (12) к гильбертовой. Отсюда можно заключить [10], что решение (12) существует (из п. 3 вытекает его единственность) и может быть найдено методом редукции. Из существования решения системы (12) следует существование единственного решения исходной краевой задачи. Тем самым, дано полное обоснование построенному выше формальному решению рассматриваемой задачи.

Можно показать также, что при $m \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$|F_m| = O(m^{-1/2 + \sigma}), \quad (\text{П.12})$$

где σ — любое сколь угодно малое положительное число. Из (П.12) следует, что c_p , определенные соотношением (11), удовлетворяют условию на ребре (6).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Представим (12) в виде

$$(I + (T_0 + I)^{-1}(T - T_0))F = (T_0 + I)^{-1}t, \quad (\text{П.13})$$

где

$$T_0 = \lim_{\eta \rightarrow 0} T(\eta).$$

Можно показать, что существует гильбертово пространство числовых последовательностей $\tilde{l}_2$, в котором матрицы T и T_0 образуют вполне-непрерывные операторы ($F \in \tilde{l}_2$). Тогда $(I + T_0)^{-1}$ — ограниченный оператор, $(I + T_0)^{-1}(T - T_0)$ — вполне непрерывен, и при достаточно малых $|\eta|$ сколь угодно мал по норме. Тогда для уравнения (П.13) можно построить ряд Неймана, который будет сходящимся, во всяком случае при достаточно малых $|\eta|$. Коэффициенты F_m могут быть представлены в виде разложений

$$F_m = \sum_{n=0}^{\infty} F_m^{(n)}(\eta) \varepsilon^n, \quad (\text{П.14})$$

где $\varepsilon(\eta) \sim \|(I + T_0)^{-1}(T - T_0)\| = O(\eta)$ — малый параметр. Учитывая оценку (П.12), можно показать, что разложения типа (П.14) существуют также и для интегральных характеристик рассеяния гребенки, например амплитуд пространственных гармоник B_n^* .

Для реальных металлов в СВЧ диапазоне достаточно ограничиться членами первого порядка малости в рядах (П.14). В коэффициентах $F_m^{(n)}(\eta)$ также следует отбросить члены более высоких порядков малости**. Границы применимости такого приближения даются неравенствами

$$\frac{|\eta|}{k} \left\{ \frac{\operatorname{tg} ka}{\operatorname{ctg} ka} \right\} \ll 1, \quad \max_p |\omega_p, 2n+1| \ll 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Clarricoats P. J. B., Saha P. K. — Electron. Lett., 1970, 6, № 12, p. 370.
2. Olver A. D., Clarricoats P. J. B., Shong S. L. — Electron. Lett., 1973, 9, № 18, p. 424.
3. Clarricoats P. J. B., Olver A. D., Shong S. L. — Proc. IEE, 1975, 122, № 11, p. 1173.

* Для сравнения укажем, что аналогичные ряды по степеням η^{-1} , когда η — большой параметр, как следует из результатов [11], расходятся при любых значениях kd .

** Заметим, что $\varepsilon(\eta)$ и $F_m^{(n)}(\eta)$ разложимы в ряды по степеням η , сходящиеся при достаточно малых η .

4. Альховский Э. А. — Радиотехника и электроника, 1976, 21, № 4, с. 802; Альховский Э. А., Ильинский А. С. — В сб.: Прямые и обратные задачи теории антенн. — М.: Гос. ун-т, 1976.
5. Радионов А. А., Раевский С. Б. — Изв. вузов — Радиоэлектроника, 1977, 20, № 9, с. 69.
6. Al-Hakkak Mohammed, Al-Dubooni Maytham, Abdyliah Payan. M., 1978. Inst. Sump. Antennas and Propag. Jap. Sendai, 1978, Summ. Pap., Sendai, 1978, p. 377.
7. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. — М.: Мир, 1974.
8. Келдыш М. В. — ДАН СССР, 1951, 87, № 1, с. 95.
9. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. — Харьков: Гос. ун-т, 1973.
10. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М.: Гостехиздат, 1950.
11. Слепян Г. Я. Краткие тексты докладов Всесоюзной конференции «Машинное проектирование устройств и систем СВЧ». — Тбилиси: 1979, с. 110.
12. Евграфов М. А. Аналитические функции. — М.: Наука, 1968.
13. Агранович М. С. Спектральные свойства задач дифракции. Дополнение к книге Н. Н. Войтовича, Б. З. Каценеленбаума, А. Н. Сивова. Обобщенный метод собственных колебаний для решения задач дифракции. — М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию
5 октября 1979 г.

DIFFRACTION OF A PLANE WAVE BY NON-IDEALLY CONDUCTING COMB

G. Ya. Slepyan, A. Ya. Slepyan

A two-dimensional problem is considered of a plane electromagnetic wave diffraction by a plane impedance comb. A strict solution of the given problem is built in the form of an infinite system of linear algebraic equations of the second kind. The power of losses is computed for the case of electric polarization. It is shown that with the definite parameters, heat losses in the comb are essentially smaller than in a half-space with smooth surface.
