ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 10 *РАДИОФИЗИКА* *1980*

УДК 621 396 67

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Г. В. Алексеев, В. Н. Лихацкий

Показано, что смешанная задача синтеза линейного излучателя при известной амплитудной диаграмме направленности и заданных ограничениях на фазовое распределение поля в излучателе может иметь континуум решений. Исследуются свойства этих решений и указываются дополнительные условия, при которых решение рассматриваемой задачи является единственным.

Как известно [1], обратная задача синтеза линейного излучателя с амплитудно-фазовым распределением поля $J(x) = I(x)\, e^{i\psi(x)}$ в антенне описывается линейным интегральным уравнением I рода

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} J(x)\, e^{ixy}\, dx = R(y). \tag{1}$$

Здесь 2σ — электрическая длина излучателя, $R(y) = |R(y)|\, e^{i\varphi(y)}$ — формируемая излучателем диаграмма направленности (ДН). Обозначим через W_σ множество всех целых в комплексной плоскости функций конечной степени $\leqslant \sigma$, интегрируемых с квадратом на вещественной оси. Согласно известной теореме Винера—Пэли, уравнение (1) имеет единственное решение $J(x) \in L^2(-\sigma, \sigma)$ тогда и только тогда, когда $R(y) \in W_\sigma$.

Предположим теперь, что в уравнении (1) являются заданными функции $|R(y)|$ (амплитудная ДН) и $\psi(x)$ (фазовое распределение поля), а требуется определить остальные функции—$I(x)$ и $\varphi(y)$, входящие в (1). Следуя [2], данную задачу будем называть смешанной задачей «С» синтеза антенн. В настоящем сообщении показывается, что так поставленная смешанная задача может иметь бесчисленное множество решений, и указываются дополнительные условия, при которых решение данной задачи является единственным.

Предположим для определенности, что $\sin\psi(x) \equiv 0$, т. е. что фаза ψ принимает в каждой точке x излучателя лишь одно из двух значений: 0 или π. Тогда, исключая из (1) неизвестную функцию $\varphi(y)$, приходим к следующему нелинейному операторному уравнению:

$$\Big[\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} v(x)\cos xy\,dx\Big]^2 + \Big[\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} v(x)\sin xy\,dx\Big]^2 = f^2(y) \equiv |R(y)|^2 \tag{2}$$

для функции

$$v(x) = I(x)\cos\psi(x).$$

Решив уравнение (2) и положив в соответствии с [3]

$$I(x) = |v(x)|, \qquad \psi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\sigma, \sigma], \quad v(x) \geqslant 0 \\ \pi, & x \in]-\sigma, \sigma], \quad v(x) < 0 \end{cases}, \tag{3}$$

получим искомое амплитудное распределение поля в излучателе, отвечающее фазе ψ, определяемой из (3). Далее из уравнения (1) можно восстановить фазовую диаграмму $\varphi(y)$ и тем самым решить смешанную задачу «С». Поэтому обратимся к уравнению (2).

Обозначим через W_σ^e и W_σ^0 соответственно подпространства четных и нечетных функций из класса W_σ, вещественных на действительной оси. Аналогом теоремы Винера — Пэли для нелинейного уравнения (2) является следующая теорема, доказанная в [3].

Теорема 1. Для существования решения уравнения (2) необходимо и достаточно, чтобы правую часть уравнения (2) можно было представить в виде

$$f^2(y) = f_e^2(y) + f_0^2(y),$$

где $f_e \in W_\sigma^e$, $f_0 \in W_\sigma^0$. При этом существует по крайней мере четыре решения уравнения (2), имеющие вид

$$v_{1,2}(x) = \pm[v_e(x) + v_0(x)], \quad v_{3,4}(x) = \pm[v_e(x) - v_0(x)], \tag{4}$$

где функции v_e и v_0 определяются по функциям f_e и f_0 соответственно формулами

$$\begin{aligned} v_e(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f_e(y)\cos xy\,dy, \\ v_0(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f_0(y)\sin xy\,dy. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь знак «+» (—) перед квадратной скобкой отвечает решению с нечетным (четным) индексом. Рассмотрим в качестве примера применения теоремы 1 случай, когда

$$f^2(y) = \frac{\sin^2\sigma y}{y^2} + 4\,\frac{\sin^4\left(\frac{\sigma y}{2}\right)}{y^2}. \tag{6}$$

Поскольку $\sin\sigma y/y \in W_\sigma^e$, $2\sin^2(\sigma y/2)/y \in W_\sigma^0$, то, как следует из теоремы 1, уравнение (2) с правой частью (6) имеет четыре решения, определяемые формулами (4), где

$$v_e(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\sigma y}{y}\cos xy\,dy,$$

$$v_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2\left(\frac{\sigma y}{2}\right)}{y}\sin xy\,dy.$$

С другой стороны, легко проверить, что

$$\frac{\sin^2\sigma y}{y^2} + 4\,\frac{\sin^4\left(\frac{\sigma y}{2}\right)}{y^2} \equiv g_e^2(y)$$

при $g_e(y) \equiv 2\sin(\sigma y/2)/y$. Так как $g_e(y) \in W_\sigma^e$, то, согласно теореме 1, существуют еще два решения уравнения (2) вида $\pm w_e(x)$, где

$$w_e(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{\sigma y}{2}\right)}{y}\cos xy\,dy.$$

Последние два решения представляют собой пару симметричных функций, отличающихся друг от друга только знаком, которые мы условимся называть основными решениями уравнения (2) при правой части (6). Используя известное соотношение

$$\operatorname{sgn}\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda y}{y}\,dy,$$

нетрудно показать, что

$$w_e(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < \sigma/2) \\ 1/2 & (|x| = \sigma/2) \\ 0 & (|x| > \sigma/2) \end{cases}.$$

Наконец, учитывая, что при любом α

$$g_e^2(y) = q_e^2(y)\cos^2\alpha y + g_e^2(y)\sin^2\alpha y,$$

причем $g_e(y)\cos\alpha y \in W_\sigma^e$, $g_e(y)\sin\alpha y \in W_\sigma^0$ при $-\sigma/2 \leqslant \alpha \leqslant \sigma/2$, на основании теоремы 1 приходим к выводу, что уравнение (2) с правой частью (6) имеет континуум решений

$$\begin{aligned} v_{1,2}^\alpha(x) &= \pm\left[v_e^\alpha(x) + v_0^\alpha(x)\right], \\ v_{3,4}^\alpha(x) &= \pm\left[v_e^\alpha(x) - v_0^\alpha(x)\right], \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$v_e^\alpha(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{\sigma y}{2}\right)}{y}\cos\alpha y\cos xy\,dy; \tag{8}$$

$$v_0^\alpha(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{\sigma y}{2}\right)}{y}\sin\alpha y\sin xy\,dy. \tag{9}$$

Ометим, что построенная выше четверка решений, отвечающая представлению правой части в виде (6), получается из (7) при $\alpha = \sigma/2$. Заметим также, что поскольку $v_{1,2}^\alpha \equiv v_{3,4}^{-\alpha}$, то решения (7) удобно объединить в виде двух семейств v_1^α и v_2^α, зависящих от параметра $\alpha \in [-\sigma/2, \sigma/2]$.

Складывая (8) и (9), получаем

$$v_{1,2}^\alpha(x) = \pm\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{\sigma y}{2}\right)}{y}\cos(x-\alpha)y\,dy \equiv \pm w_e(x-\alpha); \tag{10}$$

(10) означает, что решения $v_{1,2}^\alpha(x)$ получаются из основных решений уравнения (2) путем их параллельного сдвига в направлении оси x на величину α. Таким образом, на основании полученных результатов можно сделать вывод о том, что уравнение (2) с правой частью (6), кроме двух симметричных решений $\pm w_e(x)$, имеет два однопараметрических семейства несимметричных решений $\pm w_e(x-\alpha)$, где $\alpha \in [-\sigma/2, \sigma/2]$.

Обобщая рассмотренный пример, приходим к теореме.

Теорема 2. Пусть $f \equiv f_e(y) \in W_{\sigma'}^e$ $(0 < \sigma' < \sigma)$ — произвольная функция. Тогда существует континуум решений уравнения (2), имеющих вид $\pm v_e(x-\alpha)$, где $|\alpha| \leqslant \sigma - \sigma'$, а функция $v_e(x)$ определяется по $f_e(y)$ формулой (5).

Используя (1) и (3), по решениям уравнения (2), указанным теоремой 2, нетрудно построить соответствующие им решения $\{I^\alpha, \varphi^\alpha\}$ смешанной задачи «С». Ограничимся рассмотрением только функции $v_e(x-\alpha)$, так как изменение ее знака эквивалентно изменению фазы поля ψ и фазовой диаграммы φ на π. Пусть $I(x) \equiv |v_e(x)|$ и $\varphi(y)$ — решение задачи «С», отвечающее основному решению $v_e(x)$ уравнения (2). Тогда, очевидно, $I^\alpha(x) = I(x-\alpha)$. Чтобы определить $\varphi^\alpha(y)$ через $\varphi(y)$, воспользуемся соотношениями

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} v_e(x-\alpha)\cos xy\,dx = |f_e|\cos\varphi^\alpha, \qquad \int_{-\sigma}^{\sigma} v_e(x-\alpha)\sin xy\,dx = |f_e|\sin\varphi^\alpha. \tag{11}$$

Делая замену переменных $x = \alpha + \xi$ и используя тот факт, что функция v_e сосредоточена внутри интервала $(-\sigma', \sigma')$, имеем

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} v_e(x-\alpha)\cos xy\,dx = \cos\alpha y\int_{-\sigma}^{\sigma} v_e(\xi)\cos\xi y\,d\xi \equiv |f_e|\cos\alpha y\cos\varphi,$$
$$\int_{-\sigma}^{\sigma} v_e(x-\alpha)\sin xy\,dx = \sin\alpha y\int_{-\sigma}^{\sigma} v_e(\xi)\cos\xi y\,d\xi \equiv |f_e|\sin\alpha y\cos\varphi. \tag{12}$$

Из (11) и (12) с учетом условия $\sin\varphi \equiv 0$ следует, что

$$\varphi^\alpha(y) = \varphi(y) + \alpha y.$$

Вернувшись к рассмотренному выше примеру, приходим к выводу, что амплитудной ДН $|R(y)| = 2|\sin(\sigma y/2)/y|$ и фазе $\psi(x) \equiv 0$ отвечает в качестве решений задачи «С» семейство амплитудных распределений тока $I^\alpha(x) = w_e(x-\alpha)$ и фазовых диаграмм $\varphi^\alpha(y) = \Phi(y) + \alpha y$ где $\Phi(y)$ — фазовая ДН, отвечающая решению $w_e(x)$. Характерной особенностью этих решений является то, что среди них только функции $I(x)$ и $\Phi(y)$ («основное» решение) обладают симметрией, являясь четными соответственно по x и y. Таким образом, указанным исходным

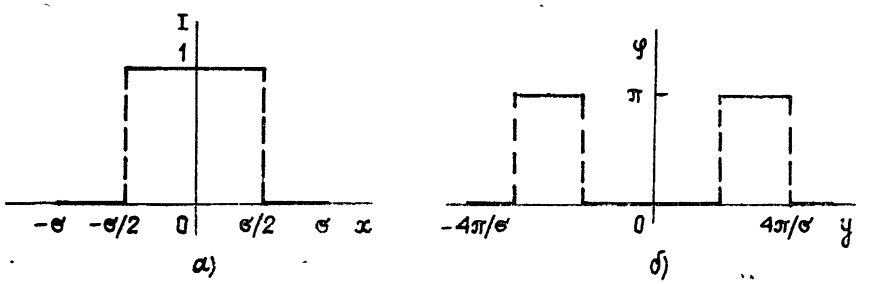

Рис. 1.

данным задачи «С» отвечает одно ее симметричное решение, представленное на рис. 1, и бесчисленное множество несимметричных решений, представленных при $\alpha = \sigma/2$ на рис. 2.

Известно, что для обратной задачи синтеза линейного излучателя, описываемой линейным интегральным уравнением (1), из условий существования решения вытекает его единственность [3]. Следовательно, неединственность решения задачи «С» проистекает вследствие ее нелинейности, приводящей, таким образом, к появлению кроме основного симметричного решения бесчисленного множества посторонних несимметричных решений. Однако если ограничиться отысканием только симметричных решений задачи «С», то такое решение определяется единственным образом.

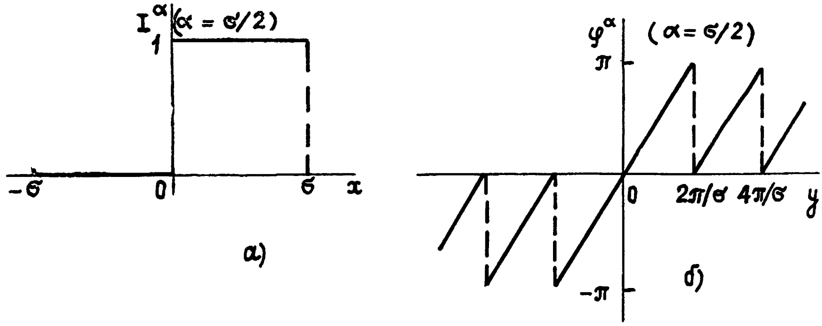

Рис. 2.

Авторы благодарят В. И. Короченцева за участие в обсуждениях при постановке задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зелкин Е. Г. Построение излучающей системы по заданной диаграмме направленности. — М.—Л.: Энергоиздат, 1963.
2. Бахрах Л. Д., Кременецкий С. Д. Синтез излучающих систем. — М.: Сов. радио, 1974.
3. Алексеев Г. В. — ЖВММФ, 1979, 19, № 6, с. 1590.

Дальневосточный политехнический институт

Поступила в редакцию 15 июня 1979 г., после переработки 21 февраля 1980 г.

NON-UNIQUENESS OF A SOLUTION FOR THE MIXED PROBLEM OF A LINEAR RADIATOR SYNTHESIS

G. V. Alekseev, V. N. Likhatskij

It is shown that a mixed problem of the synthesis of a linear radiator with the known amplitude directivity pattern and the given limitations for the phase field distribution in the radiator may have a continuum of solutions. Properties of these solutions are studied and additional conditions are specified when the solution of the problem considered is a unique one.