ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 10 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 621.372.8

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОД ПРИ ТРОЙНОМ ВЫРОЖДЕНИИ

Т. И. Бичуцкая, В. В. Новиков

Исследуется трансформация мод в плавном нерегулярном волноводе при трехкратном локальном вырождении собственного числа поперечного оператора. Изучается асимптотическое представление решения дифференциального уравнения третьего порядка с простой точкой поворота. Приводятся матрицы перехода от одной линии Стокса к другой

При распространении волн в нерегулярном волноводе отмечалось [1–3] явление трансформации мод в нулевом приближении по параметру нерегулярности при наличии в спектре поперечного оператора двукратно вырожденного собственного числа. В настоящей работе мы рассмотрим этот вопрос при наличии в спектре поперечного оператора трехкратно вырожденного собственного числа. Последнее обстоятельство имеет место в регулярном волноводе, обладающем потерями в обеих стенкам, при параметрах для импедансной модели $|\delta_1| \approx 0{,}336$, $\arg \delta_1 \approx -35°$, $|\delta_2| \approx 0{,}283$, $\arg \delta_2 \approx -41°$, $h = 80$ *км*, $f = 10$ *кГц*. Указанные условия реализуются в волноводном канале Земля — ионосфера высотой 80 *км* на частоте 10 *кГц*. Исследуемая модель нерегулярного волновода такова, что высота его не меняется вдоль всей его длины, но одна стенка имеет импеданс, постоянно равный значению δ_1, а другая — плавноменяющийся импеданс $\delta_2(x)$ вдоль продольной координаты x, так что условие вырождения одного из собственных чисел $(\mu_n = \mu_{n+1} = \mu_{n+2} = \mu_0)$ осуществляется лишь локально, при некотором $x = x_0$. При этом поведение собственных чисел в окрестности $t_0 (t(x) = - i\delta_2(x)\beta)$ представляется в виде разложения

$$\mu_i - \mu_0 = \alpha_i^{-1} l^{-1/3} (t - t_0)^{1/3} - \alpha_i^{-2} \frac{m}{3} l^{-5/3} (t - t_0)^{2/3} - \alpha_i^{-3} l^{-3} \left(\frac{m^2}{9} + \frac{nl}{3}\right)(t - t_0) + \ldots, \tag{1}$$

где

$$l = -\frac{t_0 + g_0}{f_0 + g_0} \frac{1}{6} f'''_\mu \Big|_{\mu=\mu_0}, \quad m = -\frac{t_0 + g_0}{f_0 + g_0} \frac{1}{24} f^{\mathrm{IV}}_\mu \Big|_{\mu=\mu_0},$$

$$n = -\frac{t_0 + g_0}{f_0 + g_0} \frac{1}{120} f^{\mathrm{V}}_\mu \Big|_{\mu=\mu_0}, \quad f(\mu) = \frac{\sqrt{\mu(x)}}{\operatorname{tg} \sqrt{\mu(x)}},$$

$$g \equiv - i\delta_1\beta, \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha_i = 1, \quad e^{i2\pi/3}, \quad e^{-i2\pi/3},$$

с помощью которого исследуется характер особенности поперечных собственных функций и коэффициентов связи в продольной системе уравнений.

1. Нумерацию собственных чисел в окрестности μ_0, т. е. идентификацию α_i, проведем согласно картине линий нулей, представленной на рис. 1, где на плоскости $\sqrt{\mu}$ изображены линии нулей первых трех мод при наличии трехкратного собственного числа. Пунктирными кривыми представлены линии нулей для $\arg t < \arg t_0$, сплошными — для $\arg t > \arg t_0$, жирные кривые являются отображением луча $\arg t = \arg t_0$ на плоскость $\sqrt{\mu}$. Нумерация линий нулей соответствует нумерации точек выхода. В окрестности $\sqrt{\mu_0}$ выделяются шесть различных секторов раствором $\pi/3$, в которые попадают собственные числа согласно приближенной формуле (1). Проведем на плоскости $t - t_0$ (рис. 1) разрез по лучу $\arg(t - t_0) = \arg t_0$ из точки $t = t_0$. Тогда этот луч и его продолжение разобьют плоскость $t - t_0$ на такие две части, что значениям $\arg(t - t_0) \in (\arg t_0, \arg t_0 + \pi)$ соответствуют собственные числа из сектора I на плоскости $\sqrt{\mu}$, а для $\arg(t - t_0) \in (\arg t_0 + \pi, \arg t_0 + 2\pi)$ — из сектора II, т. е. весь верхний лист римановой поверхности $t - t_0$ отобразится преобразованием (1) в собственные числа моды *2*, нижний — в собственные числа моды *3* и самый нижний — в собственные числа моды *1*. Коэффициенты α_i следует расположить поэтому в следующем порядке: $e^{i2\pi/3}$, 1, $e^{-i2\pi/3}$.

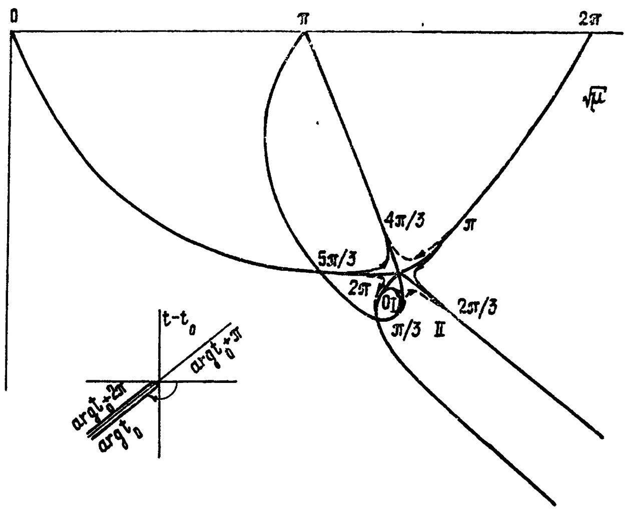

Рис. 1.

Будем осуществлять переход через точку вырождения на плоскости t так, чтобы нумерация мод при этом не менялась (не пересекался бы разрез). Тогда вектор $\alpha = (e^{i2\pi/3}, \ 1, \ e^{-i2\pi/3})$ сохранит свои компоненты в другой части волновода, но будут наложены ограничения на $\arg(x - x_0)$, согласно приближенной формуле $t - t_0 \approx t'_{x_0}(x - x_0)$. Для импедансных свойств стенок в точке вырождения таких, что переход через эту точку соответствует на плоскости $t - t_0$ переходу из левой (правой) полуплоскости относительно луча $\arg t_0$ в правую (левую), следует выбрать $\arg(x - x_0) = \begin{cases} \pi \, (-\pi) & (x < x_0) \\ 0 & (x > x_0) \end{cases}$.

2. Снимем особенность в поперечных собственных функциях с помощью следующего перехода к новому базису:

$$\widetilde{U} = SU, \tag{2}$$

где

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} b^{1/3}, & \alpha_2^{-1} b^{1/3}, & \alpha_3^{-1} b^{1/3} \\ 1, & 1, & 1 \\ \alpha_1 b^{-1/3}, & \alpha_2 b^{-1/3}, & \alpha_3 b^{-1/3} \end{pmatrix},$$

$$b^{1/3} = \frac{\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_3}{3},$$

$\tilde{U}$ — вектор-столбец из трех новых поперечных функций, U — вектор-столбец из трех прежних функций. Тогда продольную систему уравнений с помощью процедуры, аналогичной рассмотренной в [3], приведем к виду

$$\varepsilon \frac{df}{d\xi} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & \tilde{q} \\ \tilde{q}d, & 0, & 1 \\ d, & \tilde{q}d, & 0 \end{pmatrix} f + \varepsilon A_1^1 f, \qquad (3)$$

где выписана лишь та часть f, которая соответствует волнам, распространяющимся в одном направлении, причем соответствующая часть ψ выглядит следующим образом:

$$\psi = BTf \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\xi \lambda_+ \, d\xi\right),$$

$$d^{1/3} = \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3} \alpha_l \lambda_l, \quad \tilde{q}d^{2/3} = \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3} \alpha_l^{-1}\lambda_l,$$

$$\lambda_l^2 = -(1-\bar{\mu}_+) + \alpha_l^{-1} b^{1/3} + \alpha_l q b^{2/3}, \qquad (4)$$

$$qb^{2/3} = \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3} \alpha_l^{-1}\mu_l, \quad \bar{\mu}_+ = \frac{\mu_+}{\beta^2}, \quad \mu_+ = \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3}\mu_l,$$

$$\lambda_+ = \frac{1}{3}\sum_{l=1}^{3}\lambda_l, \quad \xi = \varepsilon x, \quad \varepsilon = (kL)^{-1},$$

L — масштаб изменения импеданса $\delta_2(x)$, A_1^1 — неособенная матрица, матрицы B и T строятся аналогично тому, как это было сделано в [3].

Поведение d и $\tilde{q}d$ в окрестности $\xi = \xi_0$ легко определяется из указанных обозначений и разложения (1). Система (3) в окрестности $\xi = \xi_0$, где $\mu \to \mu_0$, в главном приближении по ε имеет эталонной систему трех уравнений первого порядка, которую запишем в виде одного дифференциального уравнения третьего порядка

$$\frac{d^3 W}{dy^3} - yW = 0, \qquad (5)$$

где

$$W \equiv f_1, \quad y = \varepsilon^{-3/4} a^{1/4}(\xi - \xi_0), \quad a^{1/3} = -\frac{i}{2\sqrt{1-\bar{\mu}_+}} l^{-1/3} (t'_{x_0})^{1/3}.$$

Уравнение (5) достаточно подробно исследовано в Приложении, где приведены степенные и асимптотические разложения его решений. Обсудим вопрос выбора решений (5) на основании их асимптотических представлений.

3. На комплексной плоскости x нас будут интересовать два луча:

$$\arg(x - x_0) = \pm\pi \quad \text{и} \quad \arg(x - x_0) = 0, \qquad (6)$$

вдоль первого из которых распространяется поле до взаимодействия мод, вдоль второго — после взаимодействия. На плоскости y (5) при условии $\arg t'_{x_0} \in (\arg t_0, \arg t_0+\pi)$ лучи (6) соответствуют лучам y, расположенным в секторах $\arg y \in (\pi/2, 3\pi/4)$ и $\arg y \in (-\pi/2, -\pi/4)$ (рис. 2), содержащим линию анти-Стокса (линию, на которой скачком меняется асимптотика решений (5)). Поэтому следует область изменения $\arg t'_{x_0}$ разделить на две подобласти и рассмотреть каждую из них отдельно. Проведем рассмотрение для одной из этих подобластей:

$$\arg t'_{x_0} \in \left(\arg t_0,\ \arg t_0+\frac{\pi}{2}\right). \tag{7}$$

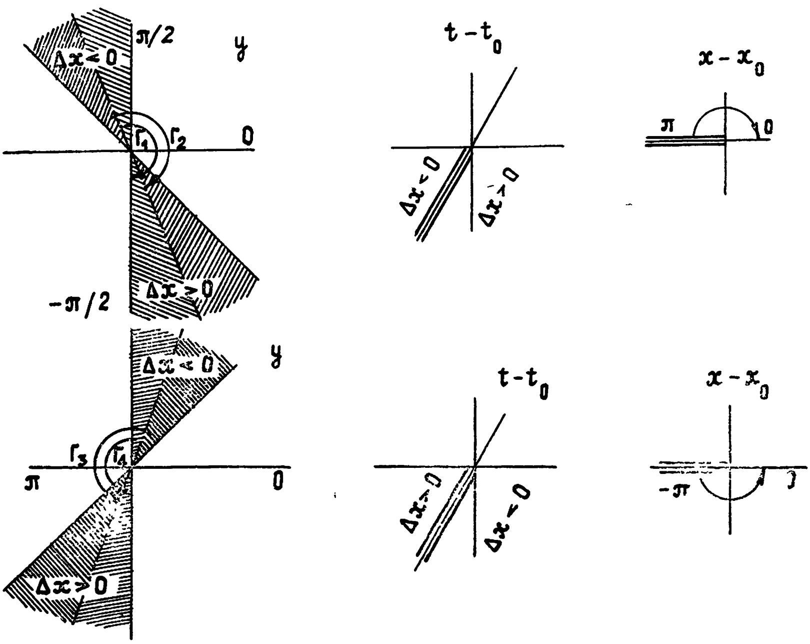

Рис. 2.

В секторе $\arg y \in (\pi/2, 5\pi/8)$ в качестве решений (5) следует взять те, которые в указанном секторе имеют асимптотики в виде одной экспоненты, т. е.

$$W = E_1(W_3+W_2)+E_2W_1+E_3W_2, \tag{8}$$

где W_i определены в Приложении. Асимптотика решения (8) при переходе к трехкомпонентному вектору f предстанет в виде

$$f = \begin{bmatrix} \varepsilon^{1/4}a^{-1/12}\alpha_1(\xi-\xi_0)^{-1/3}, & \varepsilon^{1/4}a^{-1/12}\alpha_2(\xi-\xi_0)^{-1/3}, & \varepsilon^{1/4}a^{-1/12}\alpha_3(\xi-\xi_0)^{-1/3} \\ \varepsilon^{1/4}a^{1/4}, & \varepsilon^{1/4}a^{1/4}, & \varepsilon^{1/4}a^{1/4} \\ \varepsilon^{1/4}a^{7/12}\alpha_1^{-1}(\xi-\xi_0)^{1/3}, & \varepsilon^{1/4}a^{7/12}\alpha_2^{-1}(\xi-\xi_0)^{1/3}, & \varepsilon^{1/4}a^{7/12}\alpha_3^{-1}(\xi-\xi_0)^{1/3} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} E_1 \exp\left[\frac{3}{4}\varepsilon^{-1}a^{1/3}\alpha_1^{-1}(\xi-\xi_0)^{4/3}\right] \\ E_2 \exp\left[\frac{3}{4}\varepsilon^{-1}a^{1/3}\alpha_2^{-1}(\xi-\xi_0)^{4/3}\right] \\ E_3 \exp\left[\frac{3}{4}\varepsilon^{-1}a^{1/3}\alpha_3^{-1}(\xi-\xi_0)^{4/3}\right] \end{bmatrix}. \tag{9}$$

для $(\xi-\xi_0)<0$ и $|\xi-\xi_0|<\mathrm{const}_1\,\varepsilon^{\varkappa}$. Для $|\xi-\xi_0|<\mathrm{const}_2\,\varepsilon^{3/4}$ решение (8) с учетом степенного разложения (П. 6) примет следующий вид при переходе к f:

$$f=\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\begin{bmatrix} I_1, & I_2, & I_3\\ I_1', & I_2', & I_3'\\ I_1'', & I_2'', & I_3''\end{bmatrix}\times \tag{10}$$

$$\times\begin{bmatrix} 4^{-3/4}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)[-2E_1+E_2(1-i)-E_3(1+i)]\\ 4^{-2/4}\,\Gamma\left(\frac{2}{4}\right)2[E_2-E_3]\\ 4^{-1/4}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)[2E_1+E_2(1-i)-E_3(1+i)]\end{bmatrix},$$

где $I_1=1+\frac{1}{4!}y^4+\frac{1\cdot 5}{8!}y^8+\ldots$, $I_2=\frac{y}{1!}+\frac{1\cdot 2}{5!}y^5+\frac{1\cdot 2\cdot 6}{9!}y^9+\ldots$, $I_3=\frac{y^2}{2!}+\frac{1\cdot 3}{6!}y^6+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{10!}y^{10}+\ldots$, I_i', I_i'' — продифференцированные по y ряды I_i; так что при $y\to 0$ $(\xi\to\xi_0)$ получим конечное значение решения f в точке связи:

$$f=\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4^{-3/4}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)[-2E_1+E_2(1-i)-E_3(1+i)]\\ 4^{-2/4}\,\Gamma\left(\frac{2}{4}\right)2[E_2-E_3]\\ 4^{-1/4}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)[2E_1+E_2(1-i)-E_3(1+i)]\end{bmatrix}. \tag{11}$$

Асимптотическое представление (9) может быть продолжено через точку поворота с помощью матриц перехода (П. 5). Так что для $\xi>\xi_0$ будем иметь

$$f=\begin{bmatrix} \varepsilon^{1/4}a^{-1/12}\alpha_1(\xi-\xi_0)^{-1/3}, & \varepsilon^{1/4}a^{-1/12}\alpha_2(\xi-\xi_0)^{-1/3}, & \varepsilon^{1/4}a^{-1/12}\alpha_3(\xi-\xi_0)^{-1/3}\\ \varepsilon^{1/4}a^{1/4}, & \varepsilon^{1/4}a^{1/4}, & \varepsilon^{1/4}a^{1/4}\\ \varepsilon^{1/4}a^{7/12}\alpha_1^{-1}(\xi-\xi_0)^{1/3}, & \varepsilon^{1/4}a^{7/12}\alpha_2^{-1}(\xi-\xi_0)^{1/3}, & \varepsilon^{1/4}a^{7/12}\alpha_3^{-1}(\xi-\xi_0)^{1/3}\end{bmatrix}\times \tag{12}$$

$$\times\begin{bmatrix} E_3e^{i\pi}\exp\left[\frac{3}{4}\varepsilon^{-1}a^{1/3}\alpha_1^{-1}(\xi-\xi_0)^{4/3}\right]\\ E_2\exp\left[\frac{3}{4}\varepsilon^{-1}a^{1/3}\alpha_2^{-1}(\xi-\xi_0)^{4/3}\right]\\ (E_2-E_3-E_1)\exp\left[\frac{3}{4}\varepsilon^{-1}a^{1/3}\alpha_3^{-1}(\xi-\xi_0)^{4/3}\right]\end{bmatrix}.$$

Кроме того, для системы (3) можно построить в приближении ВКБ решение в виде

$$f = \begin{bmatrix} \alpha_1 d^{-1/3}, & \alpha_2 d^{-1/3}, & \alpha_3 d^{-1/3} \\ 1, & 1, & 1 \\ \alpha_1^{-1} d^{1/3}, & \alpha_2^{-1} d^{1/3}, & \alpha_3^{-1} d^{1/3} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} D_1 \exp\left[\varepsilon^{-1} \int\limits_0^{\xi} (\alpha_1^{-1} d^{1/3} + \alpha_1 \tilde{q}\, d^{2/3})\, d\xi\right] \\ D_2 \exp\left[\varepsilon^{-1} \int\limits_0^{\xi} (\alpha_2^{-1} d^{1/3} + \alpha_2 \tilde{q}\, d^{2/3})\, d\xi\right] \\ D_3 \exp\left[\varepsilon^{-1} \int\limits_0^{\xi} (\alpha_3^{-1} d^{1/3} + \alpha_3 \tilde{q}\, d^{2/3})\, d\xi\right] \end{bmatrix}, \tag{13}$$

справедливое в области $|\xi - \xi_0| > \mathrm{const}_3\, \varepsilon^{3/4}$. Поэтому сшивая (13) в перекрывающихся областях с (9) слева и с (12) справа от точки связи, получим

$$E_1 = D_1^- A_1 (a\varepsilon)^{-1/4}, \quad E_2 = D_2^- A_2 (a\varepsilon)^{-1/4}, \quad E_3 e^{i\pi} = D_3^- A_3 (a\varepsilon)^{-1/4},$$

$$E_3 e^{i\pi} = D_1^+ A_1 (a\varepsilon)^{-1/4}, \quad E_2 = D_2^+ A_2 (a\varepsilon)^{-1/4}, \quad E_2 - E_1 - E_3 = D_3^+ A_3 (a\varepsilon)^{-1/4},$$

где $D_i^- (D_i^+)$ — коэффициенты D_i слева (справа) от точки связи и $A_i = \exp\left[\varepsilon^{-1} \int\limits_0^{\xi_0} (\lambda_i - \lambda_+)\, d\xi\right]$, $i = 1, 2, 3$. Таким образом, выразим D_i^+ через D_i^-, а затем, возвращаясь от f к исходному базису ψ, а также к поперечному базису U_i, получим для H_y выражение

$$H_y = \frac{U_1 D_1^{+(-)}}{\sqrt{\lambda_1}} \exp\left(\varepsilon^{-1} \int\limits_0^{\xi} \lambda_1 d\xi\right) + \frac{U_2 D_2^{+(-)}}{\sqrt{\lambda_2}} \exp\left(\varepsilon^{-1} \int\limits_0^{\xi} \lambda_2 d\xi\right) + \frac{U_3 D_3^{+(-)}}{\sqrt{\lambda_3}} \exp\left(\varepsilon^{-1} \int\limits_0^{\xi} \lambda_3 d\xi\right).$$

Связь D_i^+ с D_i^- для $\arg t'_{x_0} \in (\arg t_0, \arg t_0 + \pi)$ определяется с помощью матриц $D^+ = \Gamma D^-$,

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A_3 A_1^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -A_1 A_3^{-1} & A_2 A_3^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -A_2 A_1^{-1} & 0 \\ A_1 A_2^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & A_2 A_3^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

и матриц

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & A_2 A_1^{-1} & 0 \\ -A_1 A_2^{-1} & 1 & A_3 A_2^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A_3 A_1^{-1} \\ 0 & 1 & A_3 A_2^{-1} \\ A_1 A_3^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

для $\arg t'_{x_0} \in (\arg t_0 + \pi, \arg t_0 + 2\pi)$.

Для обратного направления распространения поля из правой части волновода в левую относительно точки связи следует матрицы $\Gamma_1 - \Gamma_4$ заменить на транспонированные (согласно теореме взаимности).

4. Таким образом, если в случае двукратно вырожденного собственного числа [3] прохождение через точку связи описывается с помощью матриц перехода

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & A_2 A_1^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & A_2 A_1^{-1} \\ -A_1 A_2^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_1 A_2^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & -A_2 A_1^{-1} \\ A_1 A_2^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

(что можно показать, если принять в [3] указанный в настоящей работе способ нумерации собственных чисел в окрестности точки вырождения), то для трехкратно вырожденного собственного значения матрицы перехода $\Gamma_1 - \Gamma_4$ имеют вид (14), (15). Недиагональный характер матриц (14), (15) обеспечивает существование за точкой связи мод других номеров, вырождающихся с падающей в этой точке.

Для интерпретации полученных результатов (14), (15) изобразим (рис. 3) на плоскости $\Delta\lambda_l = \left(-i/2\sqrt{1-\bar{\mu}_+}\right)\alpha_l^{-1}\Delta t^{1/3} l^{-1/3}$ секторы,

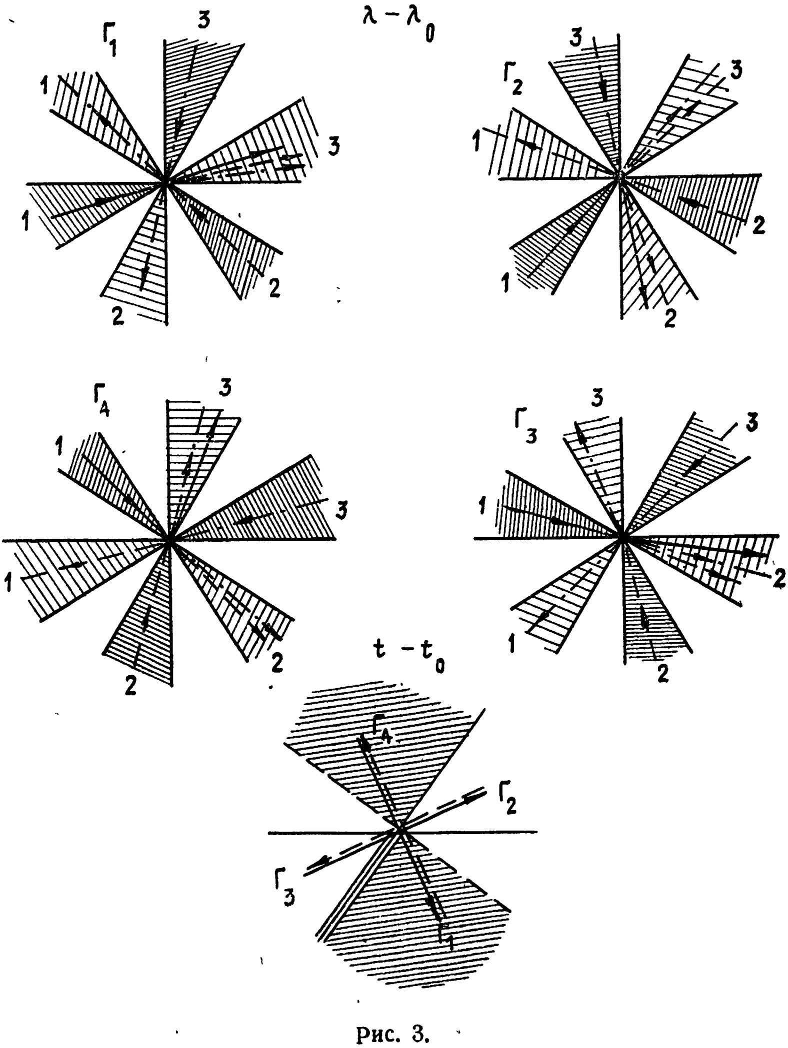

Рис. 3.

в которые попадают продольные собственные числа вырождающихся мод в окрестности точки связи для разных значений $\arg t'_{x_0}$ ($\arg \Delta t$), представленных на том же рисунке. На рисунке стрелками, входящими в точку $\Delta\lambda = 0$ ($\Delta t = 0$), обозначены собственные числа (значения импеданса) в левой части волновода, а стрелками, выходящими из нее,— собственные числа (значения импеданса) за точкой связи, цифрами в секторах обозначены номера мод. Каждая картинка схематически отображает трансформацию мод, описываемую соответствующей матрицей Г. Как следует из выражений (14), (15), трансформация мод в точке вырождения такова, что более быстро затухающие моды при прохождении точки связи становятся более медленно затухающими, а более медленно затухающие моды за точкой вырождения расщепляются на более быстро затухающие. В промежуточном случае возможны оба типа преобразования. Напомним, что матрицы Γ_1—Γ_4, полученные с точностью до членов $O(\varepsilon)$, описывают связь мод лишь для таких x, для которых справедливы асимптотические представления решений (8). В окрестности x_0 решение описывается формулой типа (10).

Таким образом, наличие точки вырождения мод в нерегулярном волноводе приводит к тому, что связь мод становится критической и коэффициенты трансформации значительно больше тех, которые характеризуют преобразование мод в отсутствие вырождения. При тройном вырождении все три моды в равной мере участвуют в перераспределении энергии падающего поля, что имеет место в оптических волноводах как в отдельных [6], так и в связанных параллельных [7, 8], а также в волноводном канале Земля—ионосфера при условии его переменной освещенности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^3 W}{dy^3} - yW = 0 \tag{П.1}$$

получим в виде контурных интегралов Лапласа

$$W_i(y) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int_{L_i} \exp\left(py - \frac{p^4}{4}\right) dp \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{П.2}$$

которые связаны соотношениями

$$\sum_{i=1}^{4} W_i(y) = 0, \tag{П.3}$$

$$W_1(y) = \omega W_2(\omega y) = \omega^2 W_3(\omega^2 y) = \omega^3 W_4(\omega^3 y),$$

где $\omega = e^{-i\pi/2}$ и контуры L_i изображены на рис. 4.

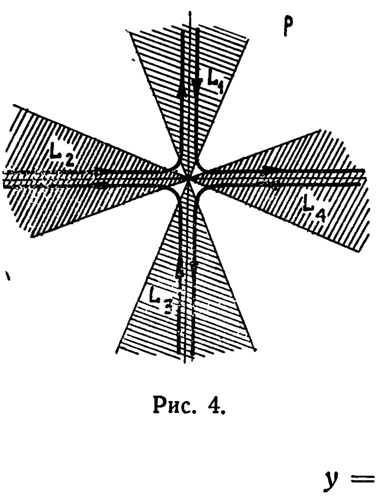

Рис. 4.

Асимптотики интегралов (П.2) будем искать методом перевала, в связи с чем перейдем к новым переменным

$$y = re^{i\theta}, \quad \zeta = pr^{-1/3},$$

тогда исследуемые интегралы предстанут в виде

$$W_i(y) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\, r^{1/3} \int_{L_i} \exp\left[r^{4/3}\left(\zeta e^{i\theta} - \frac{\zeta^4}{4}\right)\right] d\zeta. \tag{П.4}$$

Седловые точки равны $\zeta_l = \alpha_l e^{i\theta/3}$, где $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $\alpha_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Контуры наибыстрейшего убывания (возрастания) $\mathrm{Re}\left(\zeta e^{i\theta} - \frac{\zeta^4}{4}\right)$, проходящие через седловые точки ζ_l при изменении θ в области $0 \leqslant \theta < 2\pi$, имеют асимптоты $\arg\zeta = \frac{\pi}{2} n \left(\arg\zeta = \frac{2n+1}{4}\pi\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Перевальные контуры, проходящие через седловые точки, представляют собой кривые четвертого порядка. Анализ этих кривых показывает, что при $\theta = \pi n/4$ найдется одна седловая точка, через которую проходит распадающаяся кривая на прямую и кривую третьего порядка. Динамика перевальных контуров с ростом θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$ представлена на рис. 5, где сплошными (пунктирными) кривыми изображены контуры наибыстрейшего убывания (роста) подынтегральной функции. Из рис. 5 видно, что при $\theta = [(2n+1)/8]\pi$ происходит слияние двух перевальных контуров, проходящих через соседние седловые точки, и для $\theta > [(2n+1)/8]\pi$ меняется положение концов этих перевальных контуров.

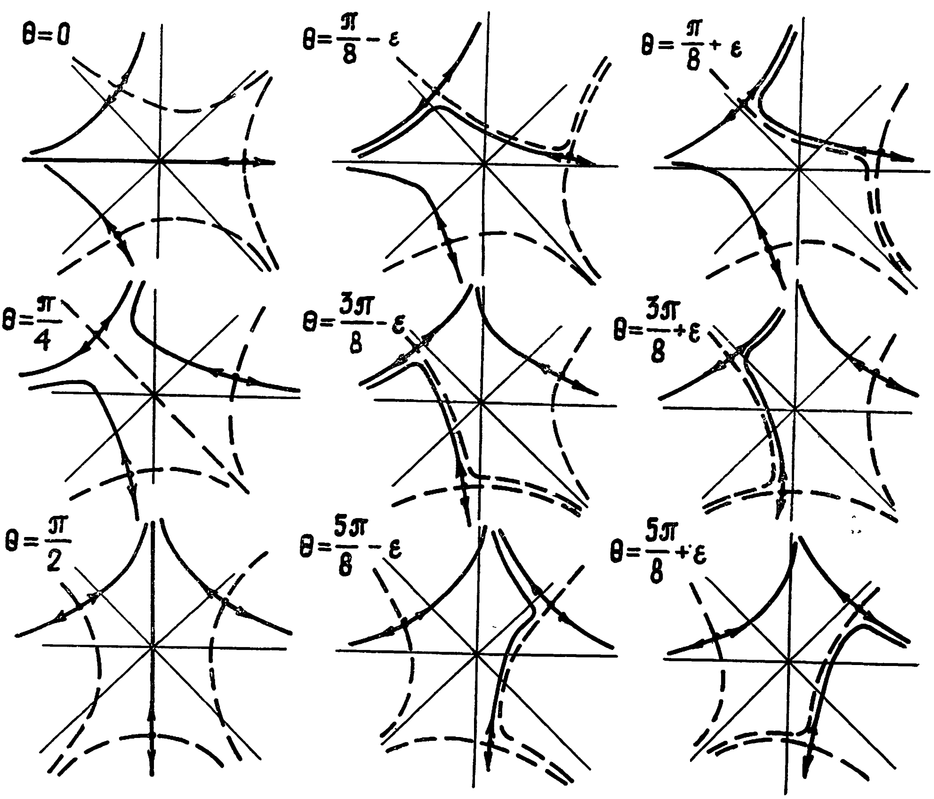

Рис. 5.

Используя динамику перевальных контуров и совмещая с ними последовательно исходные контуры интегрирования L_i, получим асимптотическое представление решений $W_i(y)$ в разных секторах комплексной плоскости y.

Однако можно ограничиться построением асимптотик в одном секторе $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, а во всех других секторах построить асимптотики с помощью матриц перехода Стокса, выведенных из асимптотик в указанном секторе. Мы поступим именно таким образом.

Получим, например, асимптотику $W_4(y)$ в секторе $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Согласно (П.4)

$$W_4(y) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int\limits_{\infty}^{\infty e^{-i\pi/2}} r^{1/3} \exp\left[r^{4/3}\left(\zeta e^{i\theta} - \frac{\zeta^4}{4}\right) d\zeta\right].$$

При изменении θ в секторе $0 \leqslant \theta < \pi/8$ контур интегрирования, как следует из рис. 5, можно совместить с двумя стационарными контурами, проходящими через седловые точки $\zeta_1 = e^{i\theta/3}$ и $\zeta_3 = \exp\left[i\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right]$.

Применяя метод перевала, получим

$$W_4(y) = \{e^{i\pi} y^{-1/3} \exp[(3/4)y^{4/3}] + e^{i\pi} \alpha_3^{-1} y^{-1/3} \exp[(3/4)\alpha_3 y^{4/3}]\}[1 + O(y^{-4/3})],$$

где $y^{1/3}$, $y^{4/3}$ — аналитическое продолжение в сектор $0 \leqslant \theta < \pi/8$ тех ветвей этих функций, которые имеют аргумент, равный нулю при $\theta = 0$. В следующем секторе $\pi/8 < \theta < 3\pi/8$ контур L_4 следует совмещать с тремя стационарными контурами (см. рис. 5), и применение метода перевала дает

$$W_4(y) = \{e^{i\pi} y^{-1/3} \exp[(3/4)y^{4/3}] + e^{i\pi} \alpha_3^{-1} y^{-1/3} \exp[(3/4)\alpha_3 y^{4/3}] + \\ + \alpha_2^{-1} y^{-1/3} \exp[(3/4)\alpha_2 y^{4/3}]\}\,[1 + O(y^{-4/3})].$$

В секторе $3\pi/8 < \theta < 5\pi/8$ будем иметь

$$W_4(y) = \{e^{i\pi} y^{-1/3} \exp[(3/4) y^{4/3}] + \\ + e^{i\pi} \alpha_3^{-1} y^{-1/3} \exp[(3/4)\alpha_3 y^{4/3}]\}\,[1 + O(y^{-4/3})].$$

Аналогично получается асимптотика всех остальных решений $W_i(y)$ $(i = 1, 2, 3)$ в секторе $\theta \in (0, \pi/2)$. Выпишем асимптотическое представление решений $W_i(y)$ $(i = 1, 2, 3)$, например, на луче $\theta = 0$:

$$W_1(y) = \{\alpha_2^{-1} y^{-1/3} \exp[(3/4)\alpha_2 y^{4/3}] + y^{-1/3} \exp[(3/4) y^{4/3}]\}\,[1 + O(y^{-4/3})],$$

$$W_2(y) = \{e^{i\pi} \alpha_2^{-1} y^{-1/3} \exp[(3/4)\alpha_2 y^{4/3}]\}\,[1 + O(y^{-4/3})],$$

$$W_3(y) = \{\alpha_3^{-1} y^{-1/3} \exp[(3/4)\alpha_3 y^{4/3}]\}\,[1 + O(y^{-4/3})],$$

Теперь перейдем к построению матриц перехода от одной линии Стокса к другой. Линиями Стокса [4] следует называть лучи, на которых любые два решения растут (или убывают) одинаковым образом. В нашем случае для уравнения (П.1) такими будут лучи $\theta = \pi n/4$. Рассматривая асимптотическое представление решения $W_i(y)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ на лучах $\theta = 0$, $\pi/4$, а затем на луче $\theta = \pi/2$ и выражая их через фундаментальные решения на этих лучах в виде

$$W_i = a_{i1}^{(1)} W_1^{(1)} + a_{i2}^{(1)} W_2^{(1)} + a_{i3}^{(1)} W_3^{(1)} \quad \text{для} \quad \theta = \frac{\pi}{4} 2n,$$

$$W_i = a_{i1}^{(2)} W_1^{(2)} + a_{i2}^{(2)} W_2^{(2)} + a_{i3}^{(2)} W_3^{(2)} \quad \text{для} \quad \theta = \frac{\pi}{4}(2n + 1),$$

где

$$W_1^{(1)} = y^{-1/3} \exp\left(\frac{3}{4} y^{4/3} e^{i2\pi/3}\right), \quad W_2^{(1)} = y^{-1/3} \exp\left(\frac{3}{4} y^{4/3} e^{-i2\pi/3}\right),$$

$$W_3^{(1)} = y^{-1/3}\exp\left(\frac{3}{4}y^{4/3}e^{i\pi}\right), \quad W_1^{(2)} = y^{-1/3}\exp\left(\frac{3}{4}y^{4/3}e^{i\pi/3}\right),$$

$$W_2^{(2)} = y^{-1/3}\exp\left(\frac{3}{4}y^{4/3}e^{-i\pi/3}\right), \quad W_3^{(2)} = y^{-1/3}\exp\left(\frac{3}{4}y^{4/3}\right)$$

и $y > 0$, можем ввести матрицу Ω, связывающую одно разложение с другим, $a_{ik}^{(2)} = \Omega_{kj} a_{ij}^{(1)}$, $k, j = 1, 2, 3$. Для перехода с линий Стокса $\theta = \frac{\pi}{4} 2n$ на линии Стокса $\theta = \frac{\pi}{4}(2n+1)$ и с последних на линии $\theta = \frac{\pi}{4}(2n+2)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ в направлении против часовой стрелки будем иметь матрицы

$$\Omega_1 = e^{-i\pi/12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & e^{i\pi/3} \end{pmatrix}, \quad \Omega_2 = e^{-i\pi/12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i2\pi/3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (\text{П.5})$$

Любой другой переход (не на ближайшую линию Стокса) против часовой стрелки описывается с помощью последовательного перемножения матриц Ω_1 и Ω_2, причем каждая последующая матрица при перемножении пишется слева от предыдущей. Для перехода на линии Стокса по часовой стрелке следует перемножать матрицы, обратные Ω_1 и Ω_2.

Таким образом, в отличие от уравнений второго порядка [5] мы получили не одну, а две матрицы коэффициентов Стокса, описывающих асимптотическое продолжение решений с любой линии Стокса на всю комплексную плоскость y. Очевидно следует полагать, что для уравнения порядка n число таких матриц перехода равно $n-1$.

Степенное разложение решений (П. 2) получим, разлагая в ряд Маклорена e^{py} и вычисляя интегралы, являющиеся коэффициентами при степенях y. Так, для $W_i(y)$ будем иметь

$$W_i(y) = W_i(0)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 5\ldots(4k-3)}{(4k)!}y^{4k} + W_i'(0)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 6\ldots(4k-2)}{(4k+1)!}\times$$

$$\times\, y^{4k+1} + W_i''(0)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7\ldots(4k-1)}{(4k+2)!}y^{4k+2}, \qquad (\text{П.6})$$

где

$$W_i(0) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,4^{-3/4}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)e_i(0),$$

$$W_i'(0) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,4^{-2/4}\,\Gamma\left(\frac{2}{4}\right)e_i'(0),$$

$$W_i''(0) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,4^{-1/4}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)e_i''(0),$$

$$e(0) = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -1+i \\ -1-i \end{pmatrix}, \quad e'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad e''(0) = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -1-i \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Budden K. G.—Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1975, **77**, p. 567.
2. Молотков И. А., Старков А. С. Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, 1978, **78**, с. 138.
3. Бичуцкая Т. И., Новиков В. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 7, с. 860.
4. Вазов В. Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — с. 462.
5. Евграфов М. А, Федорюк М. В. — УМН, 1966, **21**, № 1, с. 3.
6. Шатров А. Д. — Радиотехника и электроника, 1979, **24**, № 5, с. 1061.
7. Wilson L. O., Reinhart F. K.— Bell. Syst. Techn. J., 1974, **53**, p. 717.
8. Маркузе Д. Оптические волноводы. — М.: Мир, 1974 — с. 576.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 1 августа 1979 г.

MODE INTERACTION AT TRIPLE DEGENERATION

T. I. Bichutskaya, V. V. Novikov

Mode transformation is investigated in a smooth irregular waveguide at triple local degeneration of the natural number of a transverse operator. Asymptotic presentation of a solution for the differential equation of the third order with a simple rotation point is studied. Transition matrices from one Stokes line to the other are given