Том XXIII, № 10 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 538.56 : 519.25

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В. Е. Осташев

Поле E, являющееся решением волнового уравнения в неоднородной среде, представляется в виде некоторого нового ряда. Каждый член этого ряда, начиная со второго, выражается через поля $\mathscr{E}_0$ и G. При этом первый член этого ряда $\mathscr{E}_0$ представляет собой волну, прошедшую через неоднородный слой, а G является суммой отраженного от неоднородного слоя поля и поля источника. Для определения полей $\mathscr{E}_0$ и G выводятся интегродифференциальные уравнения, подчиняющиеся принципу причинности. Построенный ряд может быть использован в задачах о распространении волн в случайно-неоднородных средах, где применение причинных уравнений позволяет существенно упростить вычисление статистических характеристик поля.

Использование причинного уравнения Рикатти, которому подчиняется коэффициент отражения волны от слоистой случайно-неоднородной среды, позволяет существенно упростить вычисление статистических характеристик как самого коэффициента отражения, так и поля внутри среды (см., например, [1, 2]). Для обобщения этой процедуры на более важный случай трехмерной среды необходимо, прежде всего, записать соответствующие уравнения в форме, удовлетворяющей принципу причинности. Настоящая работа посвящена выводу одного из возможных видов этих уравнений. Отметим, что развиваемый ниже метод может быть применен и в других волновых задачах, например, при рассеянии волн на шероховатых поверхностях.

1. Пусть поле E подчиняется волновому уравнению

$$\Delta E(\boldsymbol{r}) + k^2(1 + \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}))\, E(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{1}$$

где k — волновое число поля E, а $\tilde{\varepsilon}$ описывает неоднородности среды. Для определенности будем рассматривать следующую постановку задачи: неоднородности среды заключены в трехмерном слое $x \in [0, L]$, слева (из области $x < 0$) на этот слой падает невозмущенная волна E^0 В этом случае (1) эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$E(\boldsymbol{r}) = E^0(\boldsymbol{r}) + k^2 \int_0^L dx_1 \int d^2\rho_1\, \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}_1) G^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\, E(\boldsymbol{r}_1), \tag{2}$$

где $G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) = e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}/4\pi\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|$ — функция Грина, $\boldsymbol{r} = (x, \boldsymbol{\rho})$, $\boldsymbol{\rho} = (y, z)$. Введем оператор однократного рассеяния в слое $[0, L]$:

$$\hat{K}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = k^2 \int_0^L dx' \int d^2\rho'\, \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}')\, G^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}').$$

Действие $\hat{K}$ на некоторую функцию $\Phi(\boldsymbol{r}')$, в зависимости от целесообразности, будем записывать одним из трех способов:

$$\hat{K}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, \Phi(\boldsymbol{r}') \equiv (\hat{K}\Phi)(\boldsymbol{r}) \equiv \hat{K}\Phi.$$

Используя $\hat{K}$, запишем (2) следующим образом: $E(\boldsymbol{r}) = E^0(\boldsymbol{r}) + (\hat{K}E)(\boldsymbol{r})$. Решая это уравнение последовательными итерациями, приходим к представлению поля E в виде ряда теории возмущений

$$E(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{K}^n E^0)(\boldsymbol{r}). \tag{3}$$

Пусть точка наблюдения $\boldsymbol{r}$ находится внутри неоднородного слоя. Через эту точку проведем плоскость, перпендикулярную оси x, которую будем называть плоскостью x. В результате будем иметь два слоя: $[0, x]$ и $[x, L]$. В этих слоях также введем операторы однократного рассеяния $\hat{X}$ и $\hat{L}$:

$$\hat{X}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_1) = k^2 \int_0^x dx_1 \int d^2\rho_1 \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}_1) G^0(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_1),$$

$$\hat{L}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}_1) = k^2 \int_x^L dx_1 \int d^2\rho_1 \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}_1) G^0(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_1).$$

Очевидно, что $\hat{X}\hat{L} \neq \hat{L}\hat{X}$ и $\hat{K} = \hat{L} + \hat{X}$. Подставляя последнее равенство в (3), получим $E = \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{X} + \hat{L})^n E^0$. Раскрывая скобки и перегруппировывая члены получающегося ряда, представим поле E в виде следующего ряда:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{E}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{X}^n E^0 + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{L}^m \sum_{n=0}^{\infty} \hat{X}^n E^0 + \sum_{l=1}^{\infty} \hat{X}^l \sum_{m=1}^{\infty} \hat{L}^m \sum_{n=0}^{\infty} \hat{X}^n E^0 + \ldots \tag{4}$$

Поле $\mathscr{E}_0$ определяется рядом

$$\mathscr{E}_0(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{X}^n E^0)(\boldsymbol{r}) = E^0(\boldsymbol{r}) + \hat{X}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1) E^0(\boldsymbol{r}_1) + \hat{X}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1) \hat{X}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) E^0(\boldsymbol{r}_2) + \ldots \tag{5}$$

В (5) входят только $\hat{X}$ — операторы рассеяния в слое $[0, x]$. Кроме того, поле $\mathscr{E}_0$ в (5) рассматривается в плоскости x. Поэтому $\mathscr{E}_0$ является полем прошедшей через слой $[0, x]$ волны E^0, падающей на этот слой слева.

Поле $\mathscr{E}_1$, используя (5), запишем следующим образом:

$$\mathscr{E}_1(\boldsymbol{r}) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{L}^m \sum_{n=0}^{\infty} \hat{X}^n E^0 = \sum_{m=1}^{\infty} (\hat{L}^m \mathscr{E}_0)(\boldsymbol{r}). \tag{6}$$

Так как $\hat{L}$ — операторы рассеяния в слое $[x, L]$ и $\mathscr{E}_1(\boldsymbol{r})$ рассматривается в плоскости x, то $\mathscr{E}_1$ является отраженным от слоя $[x, L]$ полем волны $\mathscr{E}_0$, падающей на этот слой слева.

Поле $\mathscr{E}_2$ можно записать следующим образом:

$$\mathscr{E}_2(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \hat{X}^l \sum_{m=1}^{\infty} \hat{L}^m \sum_{n=0}^{\infty} \hat{X}^n E^0 = \sum_{l=1}^{\infty} (\hat{X}^l \mathscr{E}_1)(\boldsymbol{r}). \tag{7}$$

Так как $\hat{X}$ — оператор рассеяния в слое $[0, x]$, а $\mathscr{E}_2(\boldsymbol{r})$ рассматривается в плоскости x, то $\mathscr{E}_2$ является отраженным от слоя $[0, x]$ полем, возникающим в результате падения на этот слой справа волны $\mathscr{E}_1$.

Аналогично (6) и (7) остальные поля $\mathscr{E}_n$ могут быть выражены через поля $\mathscr{E}_{n-1}$ по следующим формулам:

$$\mathscr{E}_{2n+1}(\boldsymbol{r}) = \sum_{m=1}^{\infty} (\hat{L}^m \mathscr{E}_{2n})(\boldsymbol{r}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{8}$$

$$\mathscr{E}_{2n}(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} (\hat{X}^l \mathscr{E}_{2n-1})(\boldsymbol{r}) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Из (8) и (9) виден физический смысл полей $\mathscr{E}_n$. Поле $\mathscr{E}_n$ является отраженным от слоя $[0, x]$ (при n — четном) или отраженным от слоя $[x, L]$ (при n — нечетном) полем, возникающим при падении на эти слои поля $\mathscr{E}_{2n-1}$.

2. Из (8), (9) следует, что определение поля E сводится к изучению операторов $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \hat{X}^l$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \hat{L}^m$ и поля $\mathscr{E}_0$, определяемого рядом (5). Сначала получим уравнение, которому подчиняется поле $\mathscr{E}_0$. Для этого заметим, что для поля $E^0(\boldsymbol{r})$ — первого члена ряда (5), а также для полей $G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)$, входящих посредством $\hat{X}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1)$ один раз в каждое слагаемое (5), начиная со второго, справедливы формулы

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} E^0(\boldsymbol{r}) \\ G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) \end{pmatrix} = i\sqrt{k^2+\Delta_\rho}\begin{pmatrix} E^0(\boldsymbol{r}) \\ G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1) \end{pmatrix}, \qquad \Delta_\rho = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{10}$$

которые легко получить из (1) при $\tilde{\varepsilon} = 0$. Дифференцируя обе части (5) по x и пользуясь (10), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathscr{E}_0(\boldsymbol{r}) = i\sqrt{k^2+\Delta_\rho}\,\mathscr{E}_0(\boldsymbol{r}) + \Omega(\boldsymbol{r}), \qquad \mathscr{E}_0\big|_{x=0} = E^0\big|_{x=0}. \tag{11}$$

В (11) $\Omega = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\hat{X}^n E^0$, где $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ действует только на верхний предел интегрирования по x_1 в операторе $\hat{X}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{X} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)k^2\int_0^x dx_1\int d^2\rho_1\, G^0(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_1)\,\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}_1) = k^2\int d^2\rho_1\,\tilde{\varepsilon}(x, \boldsymbol{\rho}_1)\,G^0(\boldsymbol{r}'; x, \boldsymbol{\rho}_1) = \hat{P}(\boldsymbol{\rho}_1)G^0(\boldsymbol{r}'; x, \boldsymbol{\rho}_1). \tag{12}$$

В соответствии с определением $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ формула (12) не изменится, если $x' = x$. В (12) мы ввели оператор $\hat{P}(\boldsymbol{\rho}_1) = k^2\int d^2\rho_1\,\tilde{\varepsilon}(x, \boldsymbol{\rho}_1)$. Используя (12), легко можно показать, что слагаемые, входящие в Ω, имеют вид $\hat{X}^l\hat{P}G^0\hat{X}^m E^0$, где $l, m = 0, 1, 2, \ldots$ Поэтому

$$\Omega = (\hat{P} G^0 + \hat{X}\hat{P} G^0 + \hat{X}^2 \hat{P} G^0 + \ldots)(E^0 + \hat{X} E^0 + \hat{X}^2 E^0 + \ldots). \tag{13}$$

Действительно, раскрывая в (13) скобки, получаем сумму, слагаемые которой имеют указанный выше вид. Сумма во второй скобке в правой части (13) равна $\mathscr{E}_0$. В первой же скобке $\hat{P}$ можно вынести слева за скобку. Образующуюся в этой скобке сумму обозначим через G:

$$G(\boldsymbol{r};\ x,\ \boldsymbol{\rho}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{X}^n G^0)(\boldsymbol{r};\ x,\ \boldsymbol{\rho}_0) = G^0(\boldsymbol{r};\ x,\ \boldsymbol{\rho}_0) + \\ + \hat{X}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}_1) G^0(\boldsymbol{r}_1;\ x,\ \boldsymbol{\rho}_0) + \hat{X}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}_1)\hat{X}(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2) G^0(\boldsymbol{r}_2;\ x,\ \boldsymbol{\rho}_0) + \ldots \tag{14}$$

Итак, из (13) следует, что $\Omega = \hat{P} G \mathscr{E}_0$. Подставляя эту формулу в (11), приходим к следующему уравнению для определения $\mathscr{E}_0$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathscr{E}_0(\boldsymbol{r}) = i\sqrt{k^2 + \Delta_\rho}\, \mathscr{E}_0(\boldsymbol{r}) + k^2 \int d^2\rho'\, \tilde{\varepsilon}(x,\ \boldsymbol{\rho}')\, \mathscr{E}_0(x,\ \boldsymbol{\rho}')\, G(\boldsymbol{r};\ x,\ \boldsymbol{\rho}'), \\ \mathscr{E}_0\big|_{x=0} = E^0\big|_{x=0}. \tag{15}$$

Рассмотрим подробнее функцию G, входящую в (15) и определяемую рядом (14). Первый член этого ряда $G^0(\boldsymbol{r};\ x,\ \boldsymbol{\rho}_0) \equiv G^0(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0)$, является полем в точке $\boldsymbol{r}$ точечного источника, расположенного в точке $(x,\ \boldsymbol{\rho}_0)$ в отсутствие неоднородностей. Сумма остальных членов ряда (14), которую обозначим через g:

$$g(\boldsymbol{r};\ x,\ \boldsymbol{\rho}_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{X}^n G^0)(\boldsymbol{r};\ x,\ \boldsymbol{\rho}_0), \tag{16}$$

является отраженным от слоя $[0,\ x]$ полем этого источника в точке $\boldsymbol{r}$ (сравни с (7)). Поле G равно сумме этих полей,

$$G(\boldsymbol{r};\ x,\ \boldsymbol{\rho}_0) = G^0(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) + g(\boldsymbol{r};\ x,\ \boldsymbol{\rho}_0), \tag{17}$$

и представляет собой поле в точке $\boldsymbol{r}$ точечного источника, расположенного в точке $(x,\ \boldsymbol{\rho}_0)$ на границе слоя $[0,\ x]$.

Уравнение для поля G можно получить аналогично выводу уравнения (15), т. е. дифференцируя обе части (14) по x. При этом следует учесть, что $G^0(\boldsymbol{r};\ x,\ \boldsymbol{\rho}_0)$ не зависит от x, а остальные члены ряда (14) содержат по две функции G^0, зависящие от x: $G^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)$ и $G^0(\boldsymbol{r}_j;\ x,\ \boldsymbol{\rho}_0)$. Поэтому при дифференцировании этих функций по x дополнительно к оператору $i\sqrt{k^2 + \Delta_\rho}$ появится оператор $i\sqrt{k^2 + \Delta_{\rho_0}}$. В результате для определения G получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x} G(\boldsymbol{r};\ x,\ \boldsymbol{\rho}_0) = \left(i\sqrt{k^2 + \Delta_\rho} + i\sqrt{k^2 + \Delta_{\rho_0}}\right) G(\boldsymbol{r};\ x,\ \boldsymbol{\rho}_0) - \\ - 2i\sqrt{k^2 + \Delta_{\rho_0}}\, G^0(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) + k^2 \int d^2\rho'\, \tilde{\varepsilon}(x,\ \boldsymbol{\rho}')\, G(x,\ \boldsymbol{\rho}';\ x,\ \boldsymbol{\rho}_0)\, G(\boldsymbol{r};\ x,\ \boldsymbol{\rho}'), \\ G\big|_{x=0} = G^0(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0). \tag{18}$$

Остановимся на уравнениях (15) и (18) подробнее. Уравнение (18) является замкнутым нелинейным интегродифференциальным уравнением для G. Если G, как решение (18), известно, то линейное интегродифференциальное уравнение (15) для $\mathscr{E}_0$ становится замкнутым. Уравнение (15) имеет наглядный физический смысл. Согласно этому уравнению изменение поля, прошедшего через слой $[0, x]$, обусловливается двумя слагаемыми в правой части (15). Первое из них описывает изменение $\mathscr{E}_0$, связанное с распространением поля в свободном пространстве. Интегральный же член описывает изменение $\mathscr{E}_0$, связанное с рассеянием поля на неоднородностях среды. Действительно, поле $\mathscr{E}_0$ при рассеянии в точке (x, ρ') возбуждает точечный источник с амплитудой $A(x, \rho')=k^2\tilde{\varepsilon}(x, \rho')\mathscr{E}_0(x, \rho')$. Поле такого источника (с учетом отражения от слоя $[0, x]$) в точке $\boldsymbol{r}$ равно $A(x, \rho')G(\boldsymbol{r}; x, \rho')$ и дает вклад в изменение $\mathscr{E}_0$. Учитывая все такие источники, т. е. интегрируя по ρ', получаем второе слагаемое в правой части (15). Уравнение (18) имеет аналогичный физический смысл. В данном случае $A = k^2\tilde{\varepsilon}(x, \rho')G(x, \rho'; x, \rho_0)$. Поэтому для G мы и получаем нелинейное уравнение.

Важным свойством уравнений (15), (18) является их причинность по x, т. е. зависимость $\mathscr{E}_0(\boldsymbol{r})$ и $G(\boldsymbol{r}; x, \rho_0)$ лишь от $\tilde{\varepsilon}(x', \rho')$ с $x'<x$. Это свойство в ряде случаев, например в статистических задачах, существенно упрощает вычисление полей $\mathscr{E}_0$ и G. Отметим, что уравнение (18) по своему виду совпадает с известным уравнением для коэффициента отражения в некотором сечении волновода [3]. Для рассматриваемой нами задачи уравнение (18), используя теорию инвариантного погружения, было получено в [4]. Отметим также, что если в (15) G аппроксимировать первым членом ряда (14) — полем $G^0(\rho-\rho_0)$, т. е. пренебречь в G всеми волнами, испытавшими обратное рассеяние, то поле $\mathscr{E}_0$ совпадает с полем E_0 — суммой всех волн, многократно рассеянных в положительном направлении оси x [5].

Рассмотрим теперь результат применения операторов $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\hat{L}^m$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\hat{X}^n$ к полю G^0, что потребуется нам в дальнейшем. Применение последнего оператора к полю G^0 дает согласно (16) отраженное от слоя $[0, x]$ поле. Напомним, что $\hat{L}$ и $\hat{X}$ по своему физическому смыслу подобны и отличаются лишь тем, что $\hat{X}$ описывает рассеяние в слое $[0, x]$, а $\hat{L}$ — в слое $[x, L]$. Поэтому поле

$$\tilde{g}(\boldsymbol{r}; x, \rho_0)=\sum_{m=1}^{\infty}(\hat{L}^m G^0)(\boldsymbol{r}; x, \rho_0) \tag{19}$$

является отраженным от слоя $[x, L]$ полем, источник которого совпадает с источником g и создает в плоскости x поле $G^0(\rho-\rho_0)$. Поле же

$$\tilde{G}(\boldsymbol{r}; x, \rho_0)=G^0(\rho-\rho_0)+\tilde{g}(\boldsymbol{r}; x, \rho_0) \tag{20}$$

представляет собой поле этого источника в точке $\boldsymbol{r}$. Вполне очевидно, что поле $\tilde{G}$ будет подчиняться уравнению (18), в котором только $\frac{\partial}{\partial x}$ надо заменить на $-\frac{\partial}{\partial x}$, а начальное условие поставить при $x=L$: $\tilde{G}|_{x=L}=G^0(\rho-\rho_0)$. Уравнение для $\tilde{G}$ также будет причинным по x уравнением. Причинность в данном случае означает, что $\tilde{G}(\boldsymbol{r}; x, \rho_0)$ зависит лишь от $\tilde{\varepsilon}(x', \rho')$ с $x'>x$. Если G и $\tilde{G}$ известны, то поля g

и $\tilde{g}$ легко определить по формулам (17) и (20). Итак, для определения полей G, $\tilde{G}$, g и $\tilde{g}$ необходимо знать решение лишь одного уравнения (18).

3. Перейдем к рассмотрению поля E. Для этого вернемся к рекуррентным формулам (8), (9). Операторы $\hat{X}$ в (9) описывают рассеяние поля $\mathscr{E}_{2n-1}$ в слое $[0, x]$. Поэтому это поле должно рассматриваться в точке $\boldsymbol{r}_1$ с $x_1 < x$. При этом распространение поля $\mathscr{E}_{2n-1}$ от плоскости x, где оно определяется, до плоскости x_1 происходит без рассеяния. Это позволяет выразить поле $\mathscr{E}_{2n-1}(\boldsymbol{r}_1)$ через поле $\mathscr{E}_{2n-1}(\boldsymbol{r})$:

$$\mathscr{E}_{2n-1}(\boldsymbol{r}_1) = -2i \int d^2\rho_0 \mathscr{E}_{2n-1}(x, \boldsymbol{\rho}_0) \sqrt{k^2 + \Delta_{\rho_0}}\, G^0(\boldsymbol{r}_1; x, \boldsymbol{\rho}_0) \quad (x_1 < x). \tag{21}$$

Подставляя (21) в (9) и меняя местами порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{2n}(\boldsymbol{r}) &= -2i \int d^2\rho_0 \mathscr{E}_{2n-1}(x, \boldsymbol{\rho}_0) \sqrt{k^2 + \Delta_{\rho_0}} \sum_{m=1}^{\infty} (\hat{X}^m G^0)(\boldsymbol{r}; x, \boldsymbol{\rho}_0) = \\ &= -2i \int d^2\rho_0 \mathscr{E}_{2n-1}(x, \boldsymbol{\rho}_0) \sqrt{k^2 + \Delta_{\rho_0}}\, g(\boldsymbol{r}; x, \boldsymbol{\rho}_0).\end{aligned} \tag{22}$$

В (22) мы воспользовались определением g (см. (16)). Аналогичным образом преобразовывается формула (8):

$$\mathscr{E}_{2n+1} = -2i \int d^2\rho_0 \mathscr{E}_{2n}(x, \boldsymbol{\rho}_0) \sqrt{k^2 + \Delta_{\rho_0}}\, \tilde{g}(\boldsymbol{r}; x, \boldsymbol{\rho}_0). \tag{23}$$

Введем функции

$$\begin{pmatrix} \varphi(x; \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) \\ \tilde{\varphi}(x; \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) \end{pmatrix} = -2i \sqrt{k^2 + \Delta_{\rho_0}} \begin{pmatrix} g(\boldsymbol{r}; x, \boldsymbol{\rho}_0) \\ \tilde{g}(\boldsymbol{r}; x, \boldsymbol{\rho}_0) \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Поле $\mathscr{E}_1$, используя формулы (23) и (24), выразим через $\mathscr{E}_0$ и $\tilde{\varphi}$. Поле $\mathscr{E}_2$, используя формулы (22) и (24), а также полученное выражение для $\mathscr{E}_1$, выразим через $\mathscr{E}_0$, $\tilde{\varphi}$, φ и т. д. В результате поле E запишется в виде следующего ряда:

$$\begin{aligned}E(\boldsymbol{r}) = \mathscr{E}_0(\boldsymbol{r}) &+ \int d^2\rho_1 \tilde{\varphi}(x; \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_1) \mathscr{E}_0(x, \boldsymbol{\rho}_1) + \int d^2\rho_1 \int d^2\rho_2 \times \\ &\times \varphi(x; \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_1) \tilde{\varphi}(x; \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \mathscr{E}_0(x, \boldsymbol{\rho}_2) + \ldots\end{aligned} \tag{25}$$

Ряд (25) можно записать в виде

$$E(\boldsymbol{r}) = \int d^2\rho_0 M(x; \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) \mathscr{E}_0(x, \boldsymbol{\rho}_0), \tag{26}$$

если подчинить функцию M следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned}M(x; \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) = \delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) &+ \tilde{\varphi}(x; \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_0) + \int d^2\rho_1 \int d^2\rho_2 \times \\ &\times M(x; \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_1) \varphi(x; \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \tilde{\varphi}(x; \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_0).\end{aligned} \tag{27}$$

Поле E, как видно из (25)—(27), не подчиняется принципу причинности. Однако этому принципу подчиняются $\mathscr{E}_0$, φ и $\tilde{\varphi}$, через которые выражаются как члены ряда (25), так и само поле E. В статистических задачах можно считать, что $\mathscr{E}_0$ и φ не коррелируют с $\tilde{\varphi}$ (марковское приближение). Поэтому определение статистических моментов поля E, исходя из (26), (27), в принципе, становится причинной задачей.

В заключение коротко остановимся на случае слоистой среды, когда $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(x)$. В этом случае, исходя из (14), можно показать, что $G(\boldsymbol{r};\, x,\, \boldsymbol{\rho}_0) = G(x;\, \boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0)$, т. е. что поле G однородно по поперечным координатам. Очевидно, что аналогичным свойством обладают и остальные рассмотренные выше поля. Переходя к спектральному представлению и используя это свойство однородности полей, удается решить уравнение (15) для $\mathscr{E}_0$ и уравнение (27) для M, а уравнение для спектрального аналога G свести к уравнению Рикатти. Например, если невозмущенная волна $E^0 = e^{ikx}$, то

$$E(x) = \frac{1 + \tilde{\varphi}(x)}{1 - \varphi(x)\tilde{\varphi}(x)}\,\mathscr{E}_0(x),$$
$$\mathscr{E}_0(x) = \exp\left\{ikx + \frac{ik}{2}\int\limits_0^x dx_1\,[1 + \varphi(x_1)]\,\tilde{\varepsilon}(x_1)\right\}. \qquad (28)$$

Функция $\varphi(x)$, входящая в (28), удовлетворяет уравнению Рикатти

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = 2ik\varphi(x) + \frac{ik}{2}\tilde{\varepsilon}(x)\,[1 + \varphi(x)]^2, \qquad \varphi|_{x=0} = 0.$$

Функция $\tilde{\varphi}(x)$, входящая в выражение для $E(x)$, удовлетворяет такому же уравнению, что и φ, в котором только $\frac{\partial}{\partial x}$ надо заменить на $-\frac{\partial}{\partial x}$, а граничное условие поставить при $x = L$: $\tilde{\varphi}\,|_{x=L} = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В. И., Татарский В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 7, с. 1040
2. Кляцкин В. И — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 2, с. 180.
3. Захар-Иткин М. Х. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 1, с 5.
4. Бабкин Г И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я. — ДАН СССР, 1980, **250**, № 5, с. 1112.
5 Осташев В. Е., Татарский В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 5, с. 714.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
28 декабря 1979 г.

ONE REPRESENTATION OF A WAVE EQUATION SOLUTION

V. E. Ostashev

A field E being the solution of the wave equation in an inhomogeneous medium is presented in the form of a certain new series. Each term of this series beginning from the second one is expressed by the fields $\mathscr{E}_0$ and G. The first term of this series $\mathscr{E}_0$ is a wave passing through an inhomogeneous layer and G is a sum of the field reflected from the inhomogeneous layer and the field of the source. To define the fields $\mathscr{E}_0$ and G integro-differential equations are derived which are subordinated to causality principle. The series built may be used in an analysis of a wave propagation in randomly inhomogeneous media where the utilization of causality equations permits to simplify essentially calculation of the field statistical characteristics.