ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 10 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 538.573

ФЛУКТУАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЛНЫ В ОДНОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ. IV. ИНВАРИАНТНОЕ ПОГРУЖЕНИЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ИНТЕНСИВНОСТИ

Г. И. Бабкин, В. И. Кляцкин

С помощью теории инвариантного погружения получено уравнение, описывающее плотность вероятностей для интенсивности волны с учетом затухания. Рассмотрен предельный случай, когда среда занимает полупространство. Найдены условия применимости линейной теории переноса излучения.

1. В предыдущих работах этой серии [1, 2] рассматривалась задача о распространении волн в одномерной случайно-неоднородной среде без затухания. Были исследованы флуктуации интенсивности волны внутри слоя и влияние на них граничных условий. В работе [3] изучалось влияние затухания на флуктуации интенсивности. Было получено уравнение, описывающее распределение вероятностей для интенсивности, которое содержало две дополнительные переменные, учитывающие влияние границ на флуктуации волны. С помощью этих результатов нетрудно получить уравнения для первых моментов интенсивностей встречных волн, которые показывают, что линейная феноменологическая теория переноса согласуется с точным решением задачи лишь в предельном случае сильного (по сравнению с диффузией) затухания. Полученное уравнение, однако, оказалось очень сложным. Как показано в [4], можно существенно упростить задачу, если использовать идеи теории инвариантного погружения [5]. Ниже с помощью этого метода будет получено более простое уравнение, описывающее плотности вероятностей для интенсивностей встречных мод.

2. Пусть, как и в работе [1], слой случайно-неоднородной среды занимает часть пространства $0 \leqslant x \leqslant L$ и справа на него падает плоская волна единичной интенсивности $\exp[-ik(x-L)]$, где $k = \varkappa + i\gamma$ ($\gamma \ll \varkappa$). Тогда решение задачи в области $L \leqslant x < \infty$ имеет вид

$$U(x) = \exp[-ik(x-L)] + R_L \exp[ik(x-L)], \tag{1}$$

где R_L — комплексный коэффициент отражения волны от слоя, определяемый равенством $R_L = R(L)$, где функция $R(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dR(x)}{dx} = 2i(\varkappa + i\gamma) R(x) + \frac{i\varkappa}{2} \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\bar{\varepsilon}|} (1+R)^2, \quad R(0) = 0 \tag{2}$$

и, следовательно,

$$\frac{dR_L}{dL} = 2i(\varkappa + i\gamma) R_L + \frac{i\varkappa}{2} \frac{\tilde{\varepsilon}(L)}{|\bar{\varepsilon}|} (1+R_L)^2, \quad R_0 = 0. \tag{3}$$

При выводе уравнения (2) отброшены члены $\sim \gamma\tilde{\varepsilon}$ и принято, что в случае $\tilde{\varepsilon} = 0$ среда во всем пространстве $-\infty < x < \infty$ однородна.

В области $x < 0$ решение имеет вид

$$U(x) = T \exp(-ikx), \tag{4}$$

где T — комплексный коэффициент прохождения волны. В области $0 \leqslant x \leqslant L$ волновое поле описывается уравнением

$$\frac{d^2U}{dx^2} + k^2\left[1 + \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\bar{\varepsilon}|}\right] U = 0, \tag{5}$$

в качестве краевых условий для которого можно использовать непрерывность поля и его производной на границах слоя.

Если ввести, следуя работе [1], функцию $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \frac{i}{k}\,\frac{U'(x)}{U(x)} \equiv \frac{1 - R(x)}{1 + R(x)}, \tag{6}$$

то волновое поле $U(x)$ будет полностью определяться решением уравнения (2):

$$U(x) = (1 + R_L)\exp\left[ik\int_x^L d\xi\,\psi(\xi)\right], \quad U(L) = 1 + R_L. \tag{7}$$

Следуя идеям теории инвариантного погружения, будем рассматривать волновое поле $U(x)$ как функцию двух переменных x и L, где $x \leqslant L$, т. е. $U = U(x, L)$. Тогда, дифференцируя формулу (7) по L и используя равенства (3), (6), получаем уравнение

$$\frac{\partial U(x, L)}{\partial L} = (i\varkappa - \gamma)U + \frac{i\varkappa}{2}\,\frac{\tilde{\varepsilon}(L)}{|\bar{\varepsilon}|}\,(1 + R_L)\,U(x, L) \tag{8}$$

с начальным условием

$$U(x, L)_{L\to x} = 1 + R_x, \tag{9}$$

где функция R_x описывается уравнением (3). Уравнения (3) и (8) являются уравнениями теории инвариантного погружения для данной задачи. Отметим, что в работе [4] они были получены другим способом, исходя из описания задачи с помощью интегрального уравнения. Принципиальным отличием системы (3), (8) от исходной задачи (5) является то, что уравнения теории инвариантного погружения удовлетворяют условию причинности; следовательно, для анализа статистических характеристик решения задачи можно воспользоваться стандартными методами (см., например, [6]).

Следуя работе [1], представим волновое поле $U(x, L)$ в виде

$$U(x, L) = A(x, L)\exp(-ikx) + B(x, L)\exp(ikx), \tag{10}$$

где $B(x, L)$ связана с функциями $A(x, L)$ и $R(x)$ равенством

$$B(x, L) = A(x, L)\,R(x)\exp(-2ikx) \tag{11}$$

и, следовательно,

$$U(x, L) = A(x, L)\,[1 + R(x)]\exp(-ikx). \tag{12}$$

Подчеркнем, что функция $R(x)$ в (11), (12) не зависит от параметра L. Дифференцируя выражения (11), (12) по L, получаем с помощью (8) следующие уравнения:

$$\frac{\partial A(x, L)}{\partial L} = ikA + \frac{i\varkappa}{2}\,\frac{\tilde{\varepsilon}(L)}{|\bar{\varepsilon}|}\,(1 + R_L)\,A(x, L), \quad A(x, x) = e^{ikx},$$

$$\frac{\partial B(x, L)}{\partial L} = ikB + \frac{i\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(L)}{|\bar{\varepsilon}|}(1 + R_L)B(x, L), \quad B(x, x) = R_x e^{-ikx}. \tag{13}$$

Уравнения для функций A, B, U отличаются только начальными значениями.

Введем теперь функции

$$a(x, L) = A(x, L)\exp(\gamma x), \quad b(x, L) = B(x, L)\exp(-\gamma x), \tag{14}$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial a}{\partial L} = ika + \frac{i\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(L)}{|\bar{\varepsilon}|}[1 + R(L)]a, \quad a(x, x) = e^{i\varkappa x},$$

$$\frac{\partial b}{\partial L} = ikb + \frac{i\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(L)}{|\bar{\varepsilon}|}[1 + R(L)]b, \quad b(x, x) = R_x e^{-i\varkappa x}. \tag{13'}$$

Функции $a(x, L)$ и $b(x, L)$ описывают амплитуды встречных волн. Введем их интенсивности

$$w_1(x, L) = |a|^2, \quad w_2(x, L) = |b|^2,$$

которые, очевидно, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial w_n(x, L)}{\partial L} = -2\gamma\, w_n(x, L) + \frac{i\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(L)}{|\bar{\varepsilon}|}[R_L - R_L^*]\, w_n(x, L) \tag{15}$$

с начальными условиями

$$w_1(x, x) = 1, \quad w_2(x, x) = |R_x|^2. \tag{16}$$

Используя (3), для функции $\rho_x = |R_x|^2$ получаем

$$\frac{d\rho_x}{dx} = -4\gamma\rho_x - \frac{i\varkappa}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{|\bar{\varepsilon}|}(1 - \rho_x)(R_x - R_x^*), \quad \rho_0 = 0. \tag{17}$$

3. Перейдем теперь к статистическому описанию. Будем считать, как обычно, что $\tilde{\varepsilon}(x)$ — гауссов случайный процесс с параметрами

$$\langle \tilde{\varepsilon}(x) \rangle = 0, \quad \langle \tilde{\varepsilon}(x)\tilde{\varepsilon}(x') \rangle = 2\sigma^2 l_0 \delta(x - x'). \tag{18}$$

Введем функцию

$$\Phi_L(w_1, w_2, \rho) = \delta[w_1(x, L) - w_1]\,\delta[w_2(x, L) - w_2]\,\delta(\rho_L - \rho), \tag{19}$$

удовлетворяющую уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial \Phi_L}{\partial L} = 2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial w_1}w_1 + \frac{\partial}{\partial w_2}w_2 + 2\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\Phi_L -$$

$$-\frac{i\varkappa}{2|\bar{\varepsilon}|}\left[\frac{\partial}{\partial w_1}w_1 + \frac{\partial}{\partial w_2}w_2 - \frac{\partial}{\partial\rho}(1 - \rho)\right]\tilde{\varepsilon}(L)(R_L - R_L^*)\Phi_L \tag{20}$$

с начальным условием при $L = x$

$$\Phi_{L=x} = \delta(w_1 - 1)\,\delta(w_2 - \rho)\,\delta(\rho_x - \rho). \tag{21}$$

Усредним уравнение (20) по ансамблю реализаций $\tilde{\varepsilon}(L)$. Используя стандартную методику [6], получаем для совместной плотности вероятностей w_n, ρ уравнение

$$\frac{\partial P_L(w_1, w_2, \rho)}{\partial L} = 2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial w_1} w_1 + \frac{\partial}{\partial w_2} w_2 + 2\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\right) P_L(w_1, w_2, \rho) +$$
$$+\frac{D}{2}\left[\frac{\partial}{\partial w_1} w_1 + \frac{\partial}{\partial w_2} w_2 - \frac{\partial}{\partial \rho}(1-\rho)\right]\langle[(1+R_L)^2 + (1+R_L^*)^2]\,\Phi_L\rangle - \tag{22}$$
$$-\frac{D}{2}\left[\frac{\partial}{\partial w_1} w_1 + \frac{\partial}{\partial w_2} w_2 - \frac{\partial}{\partial \rho}(1-\rho)\right]^2 \langle (R_L - R_L^*)^2\,\Phi_L\rangle$$

с начальным условием при $L = x$

$$P_x(w_1, w_2, \rho) = \delta(w_1 - 1)\,\delta(w_2 - \rho)\,P_x(\rho).$$

Здесь введен коэффициент диффузии $D = \varkappa^2\sigma^2 l_0/2\,|\bar{\varepsilon}|^2$.

Уравнение (22) не замкнуто относительно функции $P_L(w_n, \rho)$. Учитывая, что нас интересует медленное изменение статистических характеристик решения задачи, можно обычным способом [6] усреднить уравнение (22) по быстрым осцилляциям. В результате получаем уравнение Эйнштейна — Фоккера

$$\frac{\partial P_L(w_1, w_2, \rho)}{\partial L} = 2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial w_1} w_1 + \frac{\partial}{\partial w_2} w_2 + 2\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\right) P_L(w_1, w_2, \rho) +$$
$$+ D\left[\frac{\partial}{\partial w_1} w_1 + \frac{\partial}{\partial w_2} w_2 - \frac{\partial}{\partial \rho}(1-\rho)\right] P_L(w_1, w_2, \rho) + \tag{23}$$
$$+ D\left[\frac{\partial}{\partial w_1} w_1 + \frac{\partial}{\partial w_2} w_2 - \frac{\partial}{\partial \rho}(1-\rho)\right]^2 \rho\, P_L(w_1, w_2, \rho)$$

с начальным условием

$$P_x(w_1, w_2, \rho) = \delta(w_1 - 1)\,\delta(w_2 - \rho)\,P_x(\rho),$$

где функция $P_x(\rho)$ удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$\frac{\partial P_x(\rho)}{\partial x} = 4\gamma\frac{\partial}{\partial \rho}\rho P_x(\rho) - D\frac{\partial}{\partial \rho}(1-\rho)P_x(\rho) +$$
$$+ D\frac{\partial}{\partial \rho}(1-\rho)\frac{\partial}{\partial \rho}(1-\rho)\rho P_x(\rho), \quad P_0(\rho) = \delta(\rho). \tag{24}$$

Уравнения (23), (24) полностью описывают статистические характеристики интенсивности волны. Если же интересоваться интенсивностью отдельных встречных волн, то для них получается более простое уравнение

$$\frac{\partial P_L(w, \rho)}{\partial L} = 2\gamma\left(\frac{\partial}{\partial w} w + 2\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\right) P_L(w, \rho) +$$
$$+ D\left[\frac{\partial}{\partial w} w - \frac{\partial}{\partial \rho}(1-\rho)\right] P_L(w, \rho) + D\left[\frac{\partial}{\partial w} w - \right. \tag{23'}$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial \rho}(1-\rho)\right]^2 \rho P_L(w, \rho)$$

с начальными условиями

$$P_x(w_1, \rho) = \delta(w_1 - 1) P_x(\rho), \quad P_x(w_2, \rho) = \delta(w_2 - \rho) P_x(\rho).$$

Из уравнения (23′) следуют уравнения инвариантного погружения для пёрвых моментов

$$\frac{\partial}{\partial L} \langle w(x, L) \rangle = -2\gamma \langle w \rangle - D [\langle w \rangle - \langle \rho w \rangle] \tag{25}$$

с начальными условиями при $L = x$

$$\langle w_1(x, x) \rangle = 1, \quad \langle w_2(x, x) \rangle = \langle \rho_x \rangle .$$

Умножая уравнение (23) на $w_1^{\lambda_1}$, $w_2^{\lambda_2}$ и интегрируя по w_1, w_2, получаем для функции $Q_L(\lambda_1, \lambda_2, \rho) = \int dw_1\, dw_2\, w_1^{\lambda_1} w_2^{\lambda_2} P_L(w_1, w_2, \rho)$ более простое уравнение

$$\frac{\partial Q_L}{\partial L} = -2\gamma \left(\lambda_1 + \lambda_2 - 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \rho\right) Q_L - D \left[\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\partial}{\partial \rho} (1 - \rho)\right] Q_L + \\ + D \left[\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\partial}{\partial \rho} (1 - \rho)\right]^2 \rho Q_L(\lambda_1, \lambda_2, \rho) \tag{23''}$$

с начальным условием $Q_x(\lambda_1, \lambda_2, \rho) = \rho^{\lambda_2} P_x(\rho)$. Если решение уравнения (23″) известно, то соответствующие моменты интенсивностей для встречных волн можно получить, интегрируя его по ρ. В случае мнимых значений λ_1, λ_2 величина Q_L является характеристической функцией логарифмов интенсивностей w_1, w_2.

4. Рассмотрим теперь, следуя [3], предельный случай, когда случайная среда занимает полупространство $x < 0$. Этот случай соответствует предельному переходу $L \to \infty$, $x \to \infty$ при условии, что $L - x \to -x$ — фиксированная величина. В результате вместо (24) получаем стационарное уравнение

$$2[2\gamma - D(1 - \rho)] P_\infty(\rho) + D(1 - \rho)^2 \frac{d P_\infty(\rho)}{d\rho} = 0, \tag{24'}$$

решение которого хорошо известно:

$$P_\infty(\rho) = \frac{2\beta}{(1 - \rho)^2} \exp\left(-\frac{2\beta\rho}{1 - \rho}\right), \quad \beta = \frac{2\gamma}{D}. \tag{26}$$

Уравнение (23′) переходит в уравнение Эйнштейна — Фоккера

$$\frac{\partial P_x(w, \rho)}{\partial x} = -2\gamma \left(\frac{\partial}{\partial w} w + 2 \frac{\partial}{\partial \rho} \rho\right) P_x(w, \rho) - \\ - D \left[\frac{\partial}{\partial w} w - \frac{\partial}{\partial \rho} (1 - \rho)\right] P_x(w, \rho) - D \left[\frac{\partial}{\partial w} w - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial \rho} (1 - \rho)\right]^2 \rho P_x(w, \rho) \tag{27}$$

с начальными условиями

$$P_0(w_1, \rho) = \delta(w_1 - 1) P_\infty(\rho), \quad P_0(w_2, \rho) = \delta(w_2 - \rho) P_\infty(\rho).$$

Для величин $\langle w_1 \rangle$, $\langle w_2 \rangle$ вместо (25) находим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle w \rangle = 2\gamma \langle w \rangle + D [\langle w \rangle - \langle \rho w \rangle] \tag{28}$$

с начальными условиями

$$\langle w_1(0) \rangle = 1, \quad \langle w_2(0) \rangle = \langle \rho \rangle .$$

Уравнения (28) играют роль уравнений переноса. Отметим, что их внешний вид не соответствует линейной теории переноса. Исходя из (28), можно найти поведение функций $\langle w \rangle$ в окрестности точки $x = 0$:

$$\begin{gathered} \langle w_1(x) \rangle = 1 + x [2\gamma + D(1 - \langle \rho \rangle)], \\ \langle w_2(x) \rangle = \langle \rho \rangle + x [2\gamma \langle \rho \rangle + D(\langle \rho \rangle - \langle \rho^2 \rangle)]. \end{gathered} \tag{29}$$

С учетом соотношения $\langle \rho^2 \rangle = 2(\beta + 1) \langle \rho \rangle - 1$, являющегося следствием стационарного уравнения (24′), эти выражения совпадают с соответствующими формулами, полученными в [3].

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение решения уравнения (27) при $\beta \gg 1$. Учитывая, что в этом предельном случае стационарное распределение вероятностей имеет вид $P_\infty(\rho) = 2\beta \exp(-2\beta\rho)$, можно сделать в (27) замену переменных $\rho\beta \to \rho$. При этом ясно, что последний член в (27) будет иметь порядок β^{-2}, поэтому с точностью до членов $\sim \beta^{-1}$ имеем

$$\begin{gathered} \frac{\partial P_x(w_1, w_2)}{\partial x} = -(2\gamma + D) \left(\frac{\partial}{\partial w_1} w_1 + \frac{\partial}{\partial w_2} w_2 \right) P_x(w_1, w_2), \\ P_0(w_1, w_2) = \delta(w_1 - 1) 2\beta \exp(-2\beta w_2). \end{gathered} \tag{30}$$

Уравнение (30) легко решается, в результате для средних значений функций w получаем выражения

$$\langle w_1(x) \rangle = \exp [2\gamma x (1 + \beta^{-1})], \quad \langle w_2(x) \rangle = (2\beta)^{-1} \exp [2\gamma x (1 + \beta^{-1})],$$

что соответствует феноменологической линейной теории переноса. Отметим, что в этом предельном случае, как видно из уравнения (30), отсутствует связь между интенсивностями встречных волн.

Отметим, что интегральное уравнение, соответствующее рассматриваемой задаче, изучалось в работе [7] с помощью приближения Бурре и лестничного приближения для уравнения Бете — Солпитера. В этой работе было получено решение, согласующееся с линейной теорией переноса. Для минимального значения параметра β (оценка сверху по следующему члену разложения) было получено неравенство

$$\beta > (D/\varkappa)^2. \tag{31}$$

Однако приближение дельта-коррелированного случайного процесса $\varepsilon(x)$, как показано в [8], справедливо лишь при выполнении условий

$$\sigma^2 \ll |\bar{\varepsilon}|^2 (1 + \varkappa^{-2} l_0^{-2})^{1/2}, \quad \gamma l_0 \ll 1, \quad \gamma \ll \varkappa, \tag{32}$$

где l_0 — радиус корреляции процесса $\varepsilon(x)$. При этом в общем случае конечного значения параметра l_0 коэффициент диффузии D определяется равенством

$$D = \sigma^2 \varkappa^2 l_0 / 2 |\bar{\varepsilon}|^2 (1 + 4\varkappa^2 l_0^2). \tag{33}$$

Таким образом, при выполнении неравенств (32) параметр $(D/\varkappa) \ll 1$ и, следовательно, условие (31) допускает значения $\beta \lesssim 1$, что противоречит полученным выше результатам. Следовательно, использованные в [7] приближенные методы расчета справедливы, по-видимому, лишь при условии $\beta \gg 1$.

В случае $\gamma = 0$ $P_\infty(\rho) \to \delta(\rho - 1)$ и уравнение (27) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial P_x(w)}{\partial x} = -D\frac{\partial^2}{\partial w^2} w^2 P_x(w), \quad P_0(w) = \delta(w - 1), \tag{34}$$

что соответствует логарифмически-нормальному распределению для величин $w_n(x)$ в соответствии с результатами работ [2, 3].

При $\gamma \neq 0$ решить уравнение (27) не удается. Однако для описывающей моменты величин w_1, w_2 функции $Q_x(\lambda_1, \lambda_2, \rho)$ можно получить уравнение, аналогичное (23″):

$$\begin{gathered}\frac{\partial Q_x}{\partial x} = 2\gamma\left(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)Q_x + D\left[\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\partial}{\partial\rho}(1-\rho)\right]Q_x - \\ - D\left[\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\partial}{\partial\rho}(1-\rho)\right]^2 \rho Q_x,\end{gathered} \tag{35}$$

где $Q_x(\lambda_1, \lambda_2, \rho) = \int dw_1\, dw_2\, w_1^{\lambda_1} w_2^{\lambda_2} P_x(w_1, w_2, \rho)$ и $Q_0(\lambda_1, \lambda_2, \rho) = \rho^{\lambda_2} P_\infty(\rho)$. Решение уравнения (35) можно представить с помощью кулоновских сфероидальных функций. Кроме того, для уравнений подобного вида существуют хорошо разработанные численные методы (см., например, [9]).

5. Теория инвариантного погружения позволяет также связать задачу об излучении точечного источника в неоднородной среде с рассмотренной выше. В самом деле, пусть источник расположен в точке x_0 внутри слоя среды, занимающего часть пространства $0 \leqslant x \leqslant L$. Тогда функция Грина $G(x, x_0; L)$ для уравнения (5) удовлетворяет интегральному уравнению (см. также [4])

$$\begin{gathered}G(x, x_0; L) = \exp(ik\,|x - x_0|) + \frac{i\varkappa}{2|\bar{\varepsilon}|}\int_0^L dx' \exp(ik\,|x - x'|) \times \\ \times \tilde{\varepsilon}(x') G(x', x_0; L).\end{gathered} \tag{36}$$

В (36) пренебрегается членом порядка $\gamma\tilde{\varepsilon}$. Дифференцируя (36) по L и решая получившееся интегральное уравнение, находим

$$\frac{\partial}{\partial L} G(x, x_0; L) = \frac{i\varkappa}{2|\bar{\varepsilon}|}\tilde{\varepsilon}(L) U(x, L) U(x_0, L), \tag{37}$$

где функция $U(x, L)$ удовлетворяет уравнению (8) (при выводе (37) учтено, что в силу теоремы взаимности $G(x, L; L) = G(L, x; L) = U(x, L)$). Равенство (37) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для G, если дополнить его начальным условием (считаем, для определенности, что $x \leqslant x_0$)

$$G(x, x_0; x_0) = U(x, x_0). \tag{38}$$

Введем интенсивность волны $I(x, x_0; L) = G(x, x_0; L)G^*(x, x_0; L)$ и рассмотрим ее среднее значение. Используя уравнение (37), а также комплексно-сопряженное к нему, усредняя по ансамблю реализаций $\tilde{\varepsilon}(x)$ и быстрым осцилляциям, для средней интенсивности получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial L}\langle I(x, x_0; L)\rangle = D\langle J(x, L)J(x_0, L)\rangle,$$
$$\langle I(x, x_0; x_0)\rangle = \langle J(x, x_0)\rangle, \tag{39}$$

где через $J(x, L) = U(x, L)U^*(x, L)$ обозначена интенсивность волны в задаче о падении волны на слой среды. Следовательно,

$$\langle I(x, x_0; L)\rangle = \langle J(x, x_0)\rangle + D\int_{x_0}^{L} d\xi \langle J(x, \xi)J(x_0, \xi)\rangle, \tag{40}$$

и эта величина определяется корреляционной функцией интенсивности волны в задаче о падении волны на слой среды.

Введем функции

$$\psi(x, x_0, \rho; L) = \langle J(x, L)J(x_0, L)\,\delta(|R_L|^2 - \rho)\rangle,$$
$$\chi(x, \rho; L) = \langle J(x, L)\,\delta(|R_L|^2 - \rho)\rangle. \tag{41}$$

Тогда, согласно предыдущим разделам работы, очевидно, что они описываются уравнениями (23″) при $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ (для ψ) и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ (для χ) с начальными условиями (при $x \neq x_0$)

$$\psi(x, x_0, \rho; x_0) = (1+\rho)\chi(x, \rho; x_0),$$
$$\chi(x, \rho; x) = (1+\rho)P_x(\rho). \tag{42}$$

Отметим, что при $x = x_0$ функция $\psi(x, x, \rho; L)$ также описывается уравнением (23″) при $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$, но с начальным условием

$$\psi(x, x_0, \rho; x) = (1 + 4\rho + \rho^2)P_x(\rho). \tag{42'}$$

Для нахождения средней интенсивности волны, создаваемой источником в неограниченном пространстве, перейдем к пределу $\{x, x_0, L\} \to \infty$, $D(x - x_0) = \xi < 0$ — фиксированная величина. В результате (40) переходит в выражение

$$\langle I(x, x_0)\rangle = \langle J(\xi)\rangle + \psi(\xi),$$

где $\langle J(\xi)\rangle = \int_0^1 d\rho\,\tilde{\chi}(\xi, \rho)$, $\psi(\xi) = \int_0^1 d\rho \int_0^\infty d\eta\,\tilde{\psi}(\xi, \rho; \eta)$, а функции $\tilde{\psi}$, $\tilde{\chi}$ описываются уравнениями

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\eta} = -2\beta\left(1 - \frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\tilde{\psi} - \left[2 + \frac{\partial}{\partial\rho}(1-\rho)\right]\tilde{\psi} + $$
$$+\left[2 + \frac{\partial}{\partial\rho}(1-\rho)\right]^2\rho\tilde{\psi},$$

$$\tilde{\psi}(\xi, \rho; 0) = \begin{cases}(1+\rho)\tilde{\chi}(\xi, \rho) & (\xi \neq 0);\\ (1 + 4\rho + \rho^2)P_\infty(\rho) & (\xi = 0)\end{cases} \tag{43}$$

$$\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial\xi}=\beta\left(1-2\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\tilde{\chi}+\left[1+\frac{\partial}{\partial\rho}(1-\rho)\right]\tilde{\chi}-\left[1+\frac{\partial}{\partial\rho}(1-\rho)\right]^2\rho\tilde{\chi},\tag{44}$$

$$\tilde{\chi}(0,\ \rho)=(1+\rho)P_\infty(\rho).$$

Интегрируя уравнение (43) по η в пределах $(0,\ \infty)$, получаем простое уравнение для функции $\tilde{\psi}(\xi,\ \rho)=\int\limits_0^\infty d\eta\,\tilde{\psi}(\xi,\ \rho;\ \eta)$

$$-\tilde{\psi}(\xi,\ \rho;\ 0)=\left[2\beta\rho+2\rho(1-\rho)+\frac{\partial}{\partial\rho}(1-\rho)^2\rho\right]\frac{\partial}{\partial\rho}\tilde{\psi}(\xi,\ \rho),\tag{45}$$

решение которого имеет вид

$$\tilde{\psi}(\xi,\ \rho)=\int\limits_\rho^1\frac{d\rho_1}{\rho_1}\int\limits_0^{\rho_1}\frac{d\rho_2}{(1-\rho_2)^2}\tilde{\psi}(\xi,\ \rho_2;\ 0)\exp\left[-2\beta\left(\frac{1}{1-\rho_1}-\frac{1}{1-\rho_2}\right)\right].\tag{46}$$

Интегрируя далее (46) по ρ, для функции $\psi(\xi)$ получаем выражение

$$\psi(\xi)=\int\limits_0^1\frac{d\rho}{(1-\rho)^2}\tilde{\psi}(\xi,\ \rho;\ 0)\left[1-\rho+2\beta\exp\left[2\beta(1-\rho)^{-1}\right]\mathrm{Ei}\left(-\frac{2\beta}{1-\rho}\right)\right],\tag{47}$$

где $\mathrm{Ei}(-x)=-\int\limits_x^\infty dt t^{-1}e^{-t}$ — интегральная показательная функция.

Таким образом, средняя интенсивность волны от источника в безграничном пространстве описывается решением единственного уравнения (44). В частности, для средней интенсивности в точке расположения источника $(\xi=0)$ получаем

$$\langle I(0)\rangle=1+\beta^{-1}.$$

В случае же $\beta\gg1$ из (47) и (44) находим

$$\langle I(\xi)\rangle=(1+\beta^{-1})\exp\left[(1+\beta)\xi\right]\qquad(\xi\leqslant0),$$

в соответствии с линейной теорией переноса излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 2, с. 180.
2. Кляцкин В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 5, с. 591.
3. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 4, с. 432.
4. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 9, с. 1034.
5. Касти Дж., Калаба Р. Методы инвариантного погружения в прикладной математике. — М.: Мир, 1976.
6. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. — М.: Наука, 1975.
7. Белов В. Д., Рыбак С. А. — Акуст. ж., 1975, 21, с. 173.
8. Кляцкин В. И., Татарский В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 7, с. 1040.
9. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.

Тихоокеанский океанологический институт
ДВНЦ АН СССР

Поступила в редакцию
6 августа 1979 г.

INTENSITY FLUCTUATIONS OF A WAVE IN ONE-DIMENSIONAL RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIUM. IV. INVARIANT IMBENDING AND PROBABILITY DISTRIBUTION FOR THE INTENSITY

G. I. Babkin, V. I. Klyatskin

By the theory of invariant imbending an equation is derived describing the probability density for the wave intensity with allowance for the damping. A limiting case is considered when a medium occupies the half-space. Applicability conditions of the linear theory of the radiation transfer have been found.

Аннотации

депонированных статей

УДК 539.2 : 535.43

ОСОБЕННОСТИ МЕТОДОВ ЗОНДИРОВАНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ ОПТИЧЕСКИ ПРОЗРАЧНЫХ АМОРФНЫХ СРЕД

Ю. С. Середа

Показаны особенности методов зондирования в исследовании оптически прозрачных аморфных объектов конечных размеров. Обсуждается связь решения обратных задач по спектрам пропускания в приближении однократного рассеяния для аморфных объектов с аналогичными решениями для полидисперсных систем и взвесей. Предложенный вариант решения обратной задачи обнаруживает сходство с исследованиями аморфных объектов методом пространственной фильтрации.

Статья депонирована в ВИНИТИ,
рег. № 2389-80. Деп. от 16 июня 1980 г.