ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXIII, № 10 РАДИОФИЗИКА 1980

УДК 538.56 : 519 25

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СПОСОБОМ СВЕДЕНИЯ К ЗАДАЧАМ КОШИ

А. И. Саичев

Обсуждаются принципы статистического анализа линейных краевых задач как с одномерными, так и с неодномерными случайными неоднородностями способом сведения к вспомогательным задачам Коши. В качестве примеров рассмотрены средняя интенсивность поля в одномерном случайно-неоднородном слое, на который с обеих сторон падают плоские волны, а также статистические свойства поля в случайно-неоднородном резонаторе.

1. Возрастающий интерес к статистическому анализу стохастических краевых задач вызван тем, что распространение волн в случайно-неоднородных средах с учетом обратного рассеяния и взаимодействия встречных волн математически описывается стохастическими краевыми задачами. Хотя статистический анализ нелинейных краевых задач сложнее анализа линейных, недавно появились работы [1–3], где обсуждены общие принципы статистического анализа нелинейных стохастических краевых задач. В теории же линейных стохастических краевых задач к данному времени сложилась иная ситуация. Статистическому анализу разных конкретных линейных краевых задач посвящено много работ (см., например, [4–20]), но в каждой из них используются методы, приспособленные к конкретной физической задаче, что затрудняет применение этих методов к анализу иных линейных краевых задач. Поэтому важно обсудить общие принципы анализа любых линейных стохастических краевых задач. В этой работе на основе единого подхода обсуждаются общие принципы статистического анализа линейных стохастических краевых задач.

2. Главная идея статистического анализа стохастических краевых задач с учетом многократного рассеяния на случайных неоднородностях состоит в постановке вспомогательной задачи Коши, определяющей статистику исходной краевой задачи. Дело в том, что математически наиболее корректно развит статистический анализ именно задач Коши: их решения удовлетворяют принципу причинности, и при их анализе можно применять аппарат марковских процессов и полей.

Для линейных стохастических краевых задач, описывающих одномерные волны, стохастические уравнения краевой задачи — линейные обыкновенные дифференциальные уравнения, и принципиальная возможность постановки вспомогательной задачи Коши обусловлена тем, что фундаментальные решения таких уравнений, удовлетворяющие условиям Коши, определяют любое решение данной системы, а значит, и решение исходной краевой задачи. Если же последняя содержит уравнения в частных производных, как в случае обратного рассеяния в неодномерной случайно-неоднородной среде, постановка задачи Коши осложняется тем, что для уравнений эллиптического типа задача Коши некорректна. Все же и здесь удается записать рассеянные волны в виде ряда решений задачи Коши [21–25].

1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ОДНОМЕРНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

1. Рассеяние и взаимодействие волн в одномерных случайно-неоднородных средах описывается системой стохастических уравнений

$$\frac{dX_i}{dt} = a_{ik}(t) X_k \tag{1}$$

и набором краевых условий

$$b_{ip} X_i(0) + c_{ip} X_i(T) = \gamma_p \qquad (i,\ k,\ p = 1,\ 2, \dots\ n). \tag{2}$$

Здесь $a_{ik}(t)$ — случайные функции с известной статистикой, b_{ip}, c_{ip}, γ_p заданы. Хотя в большинстве физических задач t — пространственная координата, для определенности припишем t смысл времени.

Поставим вначале вспомогательную задачу Коши, определяющую статистику решений краевой задачи (1), (2) в момент T. Пусть $u^p(t)$ — решения сопряженной к (1) системы уравнений с условиями Коши:

$$\frac{du_i^p}{dt} = -a_{ki}(t)\, u_k^p, \qquad u_i^p(0) = b_{ip}. \tag{3}$$

Решения уравнений (1), (3) связаны, как известно, инвариантом

$$X_i(t) u_i^p(t) = d_p. \tag{4}$$

Если X_i — искомые решения краевой задачи (1), (2), то, как видно из (2), инвариант (4) принимает вид

$$u_i^p(t) X_i(t) + c_{ip} X_i(T) = \gamma_p.$$

При $t = T$ эти равенства образуют систему алгебраических уравнений для искомых $X(T)$, решения которой выражают $X(T)$ через решения вспомогательных задач Коши $u^p(t)$:

$$[u_i^p(T) + c_{ip}] X_i(T) = \gamma_p. \tag{5}$$

Отметим принципиальную при анализе стохастических краевых задач особенность равенств (4). Они означают, что изображающие точки решений линейных уравнений, находившиеся однажды на одной гиперплоскости в фазовом гиперпространстве (что справедливо для изображающих точек решений линейной краевой задачи (1), (2) при $t = 0$ и $t = T$), всегда остаются на общей гиперплоскости. Так как ее движение в конечном гиперпространстве имеет конечное число степеней свободы, то и вспомогательную к линейной краевой задаче задачу Коши можно поставить как задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений конечного порядка. Если же в краевой задаче нелинейны уравнения или краевые условия, то эволюция краевых гиперповерхностей имеет континуум степеней свободы и задачу Коши надо формулировать в виде уравнений в частных производных [1]. Заметим еще, что уравнения (5) имеют единственное решение только при $\det [u_i^p(T) + c_{ip}] \neq 0$. Альтернативное равенство

$$\det [u_i^p(T) + c_{ip}] = 0 \tag{6}$$

представляет самостоятельный интерес, так как позволяет с помощью задач Коши описать резонансные свойства линейных систем [13–15, 26].

2. Поставим вспомогательную задачу Коши, определяющую статистику решений краевой задачи (1), (2) при любом $t \subset [0, T]$. Введем еще один набор $v^p(t)$ решений уравнений (3) с условиями Коши

$$\frac{dv_l^p}{dt} = -a_{kl}(t)v_k^p, \qquad v_l^p(T) = c_{lp}. \tag{7}$$

Функции $v^p(t)$ и искомые $X(t)$ при любом t связаны равенствами

$$u_l^p(t_0)X_i(t_0) + v_l^p(t)X_i(t) = \gamma_p,$$

которые при $t_0 = t$ образуют систему алгебраических уравнений для $X(t)$:

$$[u_l^p(t) + v_l^p(t)]X_i(t) = \gamma_p. \tag{8}$$

Разрешив их, выразим $X(t)$ через решения задач Коши $u^p(t)$, $v^p(t)$. Поэтому, чтобы найти статистику $X(t)$, надо знать совместную статистику $u^p(t)$, $v^p(t)$. Однако если $a_{ik}(t)$ — совокупность дельта-коррелированных процессов, то $u^p(t)$ и $v^p(t)$ — статистически независимые марковские совокупности, и статистика $X(t)$ полностью определена их статистическими свойствами, найденными по отдельности. Если же a_{ik} не дельта-коррелированы, то надо аппроксимировать a_{ik} марковскими процессами и расширить краевую задачу, включив в нее уравнения для a_{ik}. При этом вспомогательные задачи Коши расширенной краевой задачи снова будут статистически независимы и аппарат марковских процессов при анализе $X(t)$ снова окажется применим.

Заметим, что постановка задач Коши, определяющих совместную статистику $X(t)$ в разных точках $t_1, t_2, \ldots, t_m$, более громоздка, но отличается от введенных выше задач Коши лишь несущественными деталями.

Отметим еще, что решения линейной краевой задачи нелинейно связаны с решениями линейных вспомогательных задач Коши. В результате линейные стохастические краевые задачи ближе к нелинейным стохастическим задачам Коши. Именно поэтому обречены на неудачу попытки вывода замкнутых уравнений переноса для интенсивностей взаимодействующих в случайно-неоднородной одномерной среде встречных волн, правильно учитывающие многократное рассеяние (см. в связи с этим, например, [6, 7]).

3. Выше разобраны принципы сведения к вспомогательной задаче Коши линейной краевой задачи с однородными уравнениями (1). Физически интересны также краевые задачи с неоднородными уравнениями типа

$$\frac{dX_l}{dt} = a_{ik}(t)X_k + \eta_l(t), \tag{9}$$

возникающие, например, когда в случайно-неоднородной среде есть источники [20]. Статистика неоднородной краевой задачи также определяется решениями задач Коши $u^p(t)$, $v^p(t)$. Действительно, справедливо равенство, обобщающее (8) на случай неоднородных уравнений (9) с краевыми условиями (2):

$$[u_l^p(t) + v_l^p(t)]\,X_l(t) = \gamma_p + \int_0^t \eta_l(t')\,u_l^p(t')\,dt' - \int_t^T \eta_l(t'')\,v_l^p(t'')\,dt''.$$

Если $a_{ik}(t)$ — дельта-коррелированы, то статистика решений этих уравнений $X(t)$ определена статистикой независимых марковских совокупностей $u^p(t)$, $u^p(t')$ $(t' < t)$ и $v^p(t)$, $v^p(t'')$ $(t'' > t)$.

2. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С НЕОДНОМЕРНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

1. Обсудим трудности и возможности статистического анализа неодномерных краевых задач на примере стохастического уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \Delta_\perp E + k^2 E = k^2 \varepsilon(x, \rho) E, \tag{10}$$

где x — продольная, ρ — поперечные координаты, $\varepsilon(x, \rho) \neq 0$ в слое $x \subset [0, L]$.

Перейдем от (10) к системе уравнений для $T(x, \rho)$, $R(x, \rho)$:

$$E = T + R, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \hat{M}T - \hat{M}R,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \hat{M}T + \frac{k^2}{2}\hat{N}\varepsilon(T + R), \tag{11}$$

$$-\frac{\partial R}{\partial x} = \hat{M}R + \frac{k^2}{2}\hat{N}\varepsilon(T + R).$$

Здесь введены операторы

$$\hat{M} = i\sqrt{k^2 + \Delta_\perp} = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}(\dots)(\Delta_\perp + k^2)\frac{e^{ikr}}{r}\,dq,$$

$$\hat{N} = \frac{1}{i\sqrt{k^2 + \Delta_\perp}} = -\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}(\dots)\frac{e^{ikr}}{r}\,dq,$$

$$r = \sqrt{(q - \rho)^2}, \qquad \hat{M}\hat{N} = 1.$$

Вне случайно-неоднородного слоя T и R имеют ясный физический смысл: $T(x, \rho)$ — волна, распространяющаяся по оси x, $R(x, \rho)$ — волна в обратном направлении [25]. Ограничимся анализом полуоднородной краевой задачи, считая, что справа на слой падает волна, при $x = L$ равная $E(\rho)$. Тогда граничные условия уравнений (11) примут вид

$$T(0, \rho) = 0, \qquad R(L, \rho) = E(\rho). \tag{12}$$

По аналогии с краевой задачей (1), (2) уравнения (11) можно рассматривать как континуум уравнений вида (1), где роль индекса i играют координаты ρ, а (12) — как континуум краевых условий вида (2). Продолжая аналогию, введем вспомогательную задачу Коши для $T_1(\rho_0, x, \rho)$, $R_1(\rho_0, x, \rho)$, удовлетворяющих сопряженным к (11) уравнениям

$$\begin{aligned} -\frac{\partial T_1}{\partial x} &= \hat{M}T_1 + \frac{k^2}{2}\varepsilon\hat{N}(T_1 - R_1), \qquad T_1(\rho_0, 0, \rho) = \delta(\rho - \rho_0), \\ \frac{\partial R_1}{\partial x} &= \hat{M}R_1 + \frac{k^2}{2}\varepsilon\hat{N}(R_1 - T_1), \qquad R_1(\rho_0, 0, \rho) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

При этом роль инварианта (4) играет равенство

$$\iint_{-\infty}^{\infty}[T_1(\rho, x, \rho')T(x, \rho') + R_1(\rho, x, \rho')R(x, \rho')]\,d\rho' = 0. \tag{14}$$

Принципиальная трудность на этом пути состоит в том, что задача Коши (13) некорректна. Физически это связано с тем, что задача Коши игнорирует условия излучения, автоматически учтенные краевой задачей (11), (12). Математически некорректность задачи Коши для эллиптических уравнений сказывается в том, что малое изменение условий Коши ведет к катастрофическим изменениям решения. Подробное обсуждение этого см. в [27]. Там же дан знаменитый пример Адамара, иллюстрирующий неустойчивость решений эллиптических уравнений с условиями Коши. Обсудим причины некорректности задачи Коши (13), полагая для простоты $\varepsilon \equiv 0$ и $T_1(0, \rho) = T_0(\rho)$. Запишем решение для фурье-образа $T_1(x, \rho)$:

$$T_1(x, \varkappa) = T_0(\varkappa) \exp\left(-i\sqrt{k^2 - \varkappa^2}\, x\right),$$

$$\left\{ \begin{matrix} T_1(x, \varkappa) \\ T_0(\varkappa) \end{matrix} \right\} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} T_1(x, \rho) \\ T_0(\rho) \end{matrix} \right\} \exp\left[i(\varkappa\rho)\right] d\rho.$$

Здесь видно, что мелкомасштабные компоненты условия Коши $\varkappa > k$ экспоненциально растут с x и, если $T_0(\varkappa)$ не очень быстро спадает при $\varkappa \to \infty$, $T_1(x, \rho)$ на конечных x перестает существовать. Так если при $\varkappa \to \infty$ $T_0 \sim \exp(-A\varkappa)$, то $T_1(x, \rho)$ не существует уже при $x > 1/A$. Поэтому задача Коши (13) будет корректной, лишь если $T_0(\varkappa)$ достаточно быстро спадает при $\varkappa \to \infty$, а неоднородности среды одномерны: $\varepsilon \equiv \varepsilon(x)$, так что не происходит уширения спектра $T_1(x, \varkappa)$ из-за взаимодействия со случайно-неоднородной средой. При этом анализ краевой задачи (11), (12) сводится к приведенному в предыдущем разделе. В общем же случае можно записать T и R в виде рядов по кратности обратного рассеяния, каждое из слагаемых которых выражается через решение корректной вспомогательной задачи Коши [25].

2. Если неоднородности среды и падающая волна крупномасштабны по ρ, можно игнорировать указанную некорректность задачи Коши, переходя в уравнениях (13) к френелевскому приближению. Положив в (13)

$$\hat{M} = ik + \frac{i}{2k}\Delta_\perp, \qquad \hat{N} = -\frac{i}{k},$$

$$T_1(\rho_0, x, \rho) = u_1(\rho_0, x, \rho)\, e^{-ikx}, \qquad R_1(\rho_0, x, \rho) = u_2(\rho_0, x, \rho)\, e^{ikx},$$

перейдем от (13) к уравнениям

$$2ik\frac{\partial u_1}{\partial x} - \Delta_\perp u_1 + k^2 \varepsilon u_1 - k^2 \varepsilon u_2 e^{2ikx} = 0,$$

$$2ik\frac{\partial u_2}{\partial x} + \Delta_\perp u_2 - k^2 \varepsilon u_2 + k^2 \varepsilon u_1 e^{-2ikx} = 0, \tag{15}$$

$$u_1(\rho_0, 0, \rho) = \delta(\rho_0 - \rho), \qquad u_2(\rho_0, 0, \rho) = 0.$$

Эта задача Коши уже корректна. Равенство (14) при $x = L$ переходит в

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left[u_1(\rho, L, \rho')\, T(L, \rho') + e^{2ikL} u_2(\rho, L, \rho')\, E(\rho')\right] d\rho' = 0. \tag{16}$$

Это интегральное уравнение относительно $T(L, \rho)$ — континуальный аналог равенств типа (5). Необходимость решения интегрального уравнения (16) — вторая, техническая трудность анализа краевой задачи с неодномерными случайными неоднородностями. Это уравнение точно решается лишь при одномерных неоднородностях. В противном случае нужно применять те или иные приближения. Найдем приближенное решение (16), считая обратное рассеяние малым ($u_2 \ll u_1$). Пренебрегая в первом уравнении (15) малым последним членом, заменив в (16) и втором уравнении (15) $u_1(\rho_0, x, \rho) = g^*(0, \rho_0; x, \rho)$, где $g(y, \rho_0; x, \rho)$ удовлетворяет уравнению

$$2ik\frac{\partial g}{\partial x} + \Delta_\perp g = k^2 \varepsilon g, \quad g(y, \rho_0; y, \rho) = \delta(\rho - \rho_0), \tag{17}$$

и учтя равенство

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} g(y, \rho; L, \rho')\, g^*(y, \rho; x, \rho'')\, d\rho = g(x, \rho''; L, \rho'), \tag{18}$$

разрешим уравнение (16) относительно $T(L, \rho)$:

$$T(L, \rho) = \frac{ik}{2}\int\limits_0^L dx \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} E(\rho')\, g(x, \rho''; L, \rho') \times \\ \times g(x, \rho''; L, \rho)\, \varepsilon(x, \rho'')\, e^{2ik(L-x)}\, d\rho'\, d\rho''. \tag{19}$$

Это выражение аналогично найденному в [21, 22] гибридным методом и описывает однократное обратное рассеяние с учетом многократного рассеяния по направлению распространения волны. Поэтому пределы применимости (19) в крупномасштабной среде шире условий применимости борновского приближения. Формула (19) выражает $T(L, \rho)$ через $g(y, \rho_0; x, \rho)$, удовлетворяющую задаче Коши (17). Поэтому при анализе $T(L, \rho)$ применимо марковское приближение. Так, функцию когерентности обратного рассеяния можно записать в виде

$$\Gamma(s) = \langle T(L, \rho)\, T^*(L, \rho + s)\rangle = \frac{k^2}{4}\int\limits_0^L dx \iint\limits_{-\infty}^{\infty} a(\rho)\, M(x, \rho, 0, 0, s)\, d\rho \tag{20}$$

где

$$a(\rho) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \varepsilon(x, \rho')\, \varepsilon(x + \tau, \rho' + \rho)\rangle\, e^{-2ik\tau}\, d\tau,$$

а $M(x, \rho, \rho_1, \rho_2, s)$ в марковском приближении подчиняется уравнению

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{i}{k}(\nabla_{\rho_1}\nabla_{\rho_2}) M - \frac{k^2}{4} F(\rho, \rho_1, \rho_2) M, \\ M(0, \rho, \rho_1, \rho_2, s) = \delta(\rho + s - \rho_2). \tag{21}$$

Здесь использованы обычные обозначения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle \varepsilon(x, \rho')\, \varepsilon(x + \tau, \rho' + \rho)\rangle\, d\tau = A(\rho),$$

$$D(\rho) = A(0) - A(\rho),$$

$$F(\rho, \rho_1, \rho_2) = D(\rho + \rho_1) + D(\rho - \rho_1) + D(\rho + \rho_2) +$$

$$+D(\rho-\rho_2)-D(\rho_1+\rho_2)-D(\rho_1-\rho_2)$$

и принято для простоты, что падающая волна плоская: $E(\rho)\equiv 1$.

Укажем два следствия выражения (20). При $s=0$ уравнение (21) решается точно и интенсивность обратного рассеяния равна $\Gamma(0)=\doteq k^2 a(0)L/4$ — интенсивности обратного рассеяния в борновском приближении. Последнее почти очевидно: при обратном рассеянии плоской волны отмеченные в [21] эффекты усиления рассеяния строго назад смазываются ослаблением обратного рассеяния под соседними углами. Все же эффекты усиления обратного рассеяния влияют на вид $\Gamma(s)$ при $s\neq 0$. Покажем это, вычислив $J=\iint_{-\infty}^{\infty}\Gamma(s)ds$ — лучевую интенсивность рассеяния строго назад. Считая, что ширина $a(\rho)$ — l так мала, что радиус когерентности плоской волны, прошедшей слой неоднородной среды толщины x — $\rho_к(x)$, сравним с l лишь в области насыщенных флуктуаций интенсивности, из (20), (21) получим

$$J=\frac{k^2}{4}\int_0^L dx\langle I^2(x,\rho)\rangle\iint_{-\infty}^{\infty}a(\rho)\exp\left[-\frac{k^2}{2}D(\rho)x\right]d\rho. \tag{22}$$

Здесь $\langle I^2(x,\rho)\rangle$ — средний квадрат интенсивности плоской волны, прошедшей в случайно-неоднородной среде трассу длиной x. Из (22) видно, что, пока $\rho_к(L)>l$, лучевая интенсивность строго назад равна

$$J=\frac{k^2}{4}\tilde{a}\int_0^L\langle I^2(x,\rho)\rangle dx,\qquad \tilde{a}=\iint_{-\infty}^{\infty}a(\rho)d\rho$$

и может в два раза превышать J, вычисленную в борновском приближении: $J_1=k^2\tilde{a}L/4$. Если же $\rho_к(L)<l$, то J замедляет рост с увеличением L и может оказаться меньше J_1.

Заметим, что уже при анализе обратного рассеяния в приближении однократного обратного рассеяния необходим учет корреляции двух волн — падающей и рассеянной назад. Расчет же сильного обратного рассеяния требует учета корреляции $2n$-волн в каждом n-кратном рассеянии, и вычисление даже функции когерентности сильного обратного рассеяния требует знания бесконечного числа моментных функций.

3. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ КОШИ. ПРИМЕРЫ

1. Выше обсуждались принципы сведения линейных стохастических краевых задач к вспомогательным задачам Коши. Перейдем теперь к примерам. Обсудим вначале статистику поля в слое длиной L с неоднородностями $\varepsilon\equiv\varepsilon(x)$, на который с обеих сторон нормально падают плоские волны. Поле при этом описывается уравнениями (11) с $\hat{M}=ik$, $\hat{N}=-i/k$. Перейдем от уравнений (11) к уравнениям для Q и P, положив

$$T=Qe^{ikx},\quad R=Pe^{-ikx},$$

$$\frac{dP}{dx}=\frac{ik}{2}\varepsilon(x)(P+Qe^{2ikx}),\qquad P(L)=E_1, \tag{23}$$

$$\frac{dQ}{dx}=-\frac{ik}{2}\varepsilon(x)(Q+Pe^{-2ikx}),\qquad Q(0)=E_2.$$

Вспомогательные задачи Коши для $\boldsymbol{u}(x)$, $\boldsymbol{v}(x)$ зададим в виде

$$\frac{d}{dx}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \frac{ik}{2}\varepsilon(x)\left[\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} e^{2ikx}\right],$$

$$\frac{d}{dx}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = -\frac{ik}{2}\varepsilon(x)\left[\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} e^{-2ikx}\right], \tag{24}$$

$$u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 0, \quad v_1(L) = 0, \quad v_2(L) = 1.$$

Решения краевой задачи (23) удовлетворяют при этом уравнениям

$$u_1(x)Q(x) - u_2(x)P(x) = E_2,$$

$$v_1(x)Q(x) - v_2(x)P(x) = -E_1,$$

разрешив которые, получим

$$Q(x) = \frac{E_1 u_2(x) + E_2 v_2(x)}{u_1(x)v_2(x) - v_1(x)u_2(x)},$$

$$P(x) = \frac{E_1 u_1(x) + E_2 v_1(x)}{u_1(x)v_2(x) - v_1(x)u_2(x)}. \tag{25}$$

Заметим еще, что стоящий в знаменателе вронскиан равен

$$u_1(x)v_2(x) - v_1(x)u_2(x) = v_2(0) = u_1(L). \tag{26}$$

Если $\varepsilon(x)$ — гауссов дельта-коррелированный процесс с корреляционной функцией $\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x+\tau)\rangle = 2\sigma^2 l\,\delta(\tau)$, то $\boldsymbol{u}(x)$ и $\boldsymbol{v}(x)$ — независимые марковские совокупности. Их статистический анализ идентичен. Поэтому найдем пока лишь статистику $\boldsymbol{u}(x)$. Учтя сохранение потока энергии $|u_1|^2 - |u_2|^2 \equiv 1$, перейдем от $\boldsymbol{u}(x)$ к действительным функциям $u(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, связанным с $\boldsymbol{u}$ равенствами $u_1 = \sqrt{\frac{u+1}{2}}\,e^{i\alpha_1}$, $u_2 = \sqrt{\frac{u-1}{2}}\,e^{i\alpha_2}$. Уравнения для них, вытекающие из (24),

$$\frac{du}{dx} = -k\varepsilon\sqrt{u^2-1}\,\sin\varphi,$$

$$\frac{d\alpha_1}{dx} = \frac{k}{2}\varepsilon\left(1 + \sqrt{\frac{u-1}{u+1}}\cos\varphi\right),$$

$$\frac{d\alpha_2}{dx} = -\frac{k}{2}\varepsilon\left(1 + \sqrt{\frac{u+1}{u-1}}\cos\varphi\right),$$

$$u(0) = 1, \quad \alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 0, \quad \varphi = \psi + 2kx, \quad \psi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Полагая $\sigma^2 kl \ll 1$, так что u, α_1, α_2 мало меняются на длине волны, перейдем от стохастических уравнений к уравнению для плотности вероятности $W_3(u, \alpha_1, \alpha_2; x)$ и усредним его по быстрым (с периодом π/k) осцилляциям:

$$\frac{\partial W_3}{\partial x} = D\frac{\partial}{\partial u}(u^2-1)\frac{\partial W_3}{\partial u} + \frac{D}{4}\left(2 + \frac{u-1}{u+1}\right)\frac{\partial^2 W_3}{\partial \alpha_1^2} +$$

$$+\frac{D}{4}\left(2+\frac{u+1}{u-1}\right)\frac{\partial^2 W_3}{\partial \alpha_2^2}-\frac{3}{2}D\frac{\partial^2 W_3}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \tag{27}$$

$$W_3(u,\ \alpha_1,\ \alpha_2;\ 0)=\delta(u-1)\,\delta(\alpha_1)\,\delta(\alpha_2), \qquad D=\frac{1}{2}\sigma^2 k^2 l.$$

В дальнейшем нам понадобится лишь двумерная плотность вероятности $u(x)$, $\alpha_2(x)$ — $W_2(u,\ \alpha_2;\ x)$. Из (27) видно, что α_2 практически мгновенно становится равномерно распределенной в интервале $[-\pi,\ \pi]$, поэтому $W_2=W(u\,;x)/2\pi$, где $W(u;\ x)$ — плотность вероятности $u(x)$, удовлетворяет следующему из (27) уравнению:

$$\frac{\partial W}{\partial x}=D\frac{\partial}{\partial u}(u^2-1)\frac{\partial W}{\partial u}, \qquad W(u;\ 0)=\delta(u-1). \tag{28}$$

Из симметрии уравнений (24) видно, что статистика $v(x)$ аналогична статистике $u(x)$. Представим $v(x)$ в виде $v_1=\sqrt{\frac{v-1}{2}}\,e^{i\beta_2}$, $v_2=\sqrt{\frac{v+1}{2}}\,e^{i\beta_1}$. Легко показать, что плотность вероятности $v(x)$, $\beta_2(x)$ равна $W(v;\ L-x)/2\pi$.

Рассмотрим интенсивность поля в случайно-неоднородном слое:

$$I(x)=|P(x)e^{-ikx}+Q(x)e^{ikx}|^2.$$

Подставив сюда (25) и оставив только медленные на масштабах длины волны члены, получим

$$\begin{gathered}\tilde I(x)=\tilde I_1(x)+\tilde I_2(x)+\tilde I_{12}(x)=(2|E_1|^2 u+2|E_2|^2 v)\times\\ \times[uv-1-\sqrt{(u^2-1)(v^2-1)}\cos(\alpha_1-\alpha_2+\beta_1-\beta_2)]^{-1}+\\ +(2|E_1E_2|)\left[\sqrt{(u+1)(v-1)}\cos(\alpha_1-\beta_2+\gamma)+\sqrt{(u-1)(v+1)}\times\right.\\ \times\cos(\alpha_2-\beta_1+\gamma)\big]\left[uv-1-\sqrt{(u^2-1)(v^2-1)}\cos(\alpha_1-\alpha_2+\right.\\ \left.+\beta_1-\beta_2)\right]^{-1}, \qquad \gamma=\arg E_1\cdot E_2^*.\end{gathered} \tag{29}$$

Здесь тильда означает усреднение по периоду π/k. Усредним (29) еще по равномерно распределенным в интервале $[-\pi,\ \pi]$ $\alpha_2(x)$, $\beta_2(x)$:

$$\langle\tilde I_1(x)\rangle_{uv}=2\,|E_1|^2\frac{u}{u+v}, \qquad \langle\tilde I_2(x)\rangle_{uv}=2\,|E_2|^2\frac{v}{u+v},$$

$$\langle\tilde I_{12}(x)\rangle=0.$$

Усреднив затем $\langle\tilde I(x)\rangle_{uv}$ по u, v, получим окончательно

$$\langle\tilde I(x)\rangle=2|E_2|^2+(|E_1|^2-|E_2|^2)J(x), \quad J(x)=\left\langle\frac{2u(x)}{u(x)+v(x)}\right\rangle, \tag{30}$$

где $J(x)$ — средняя интенсивность поля в слое, на который справа падает волна единичной интенсивности. Заметим, что

$$J(x)-1=\left\langle\frac{u(x)-v(x)}{u(x)+v(x)}\right\rangle=\int_1^\infty du\int_1^\infty dv\,\frac{u-v}{u+v}\,W(u;\ x)\,W(v;\ L-x).$$

Переобозначив $u \longleftrightarrow v$, получим равенство $J(x) - 1 = 1 - J(L - x)$. Не определяя $W(u;\ x)$, мы нашли, таким образом, ценную информацию о средней интенсивности $J(x)$: разность между ней и интенсивностью падающей волны — нечетная функция относительно середины слоя $x = L/2$. Именно поэтому, как видно и из (30), при $|E_1|^2 = |E_2|^2 = |E|^2$ $\langle \tilde{I}(x) \rangle = 2|E|^2 = \text{const}$.

Выражение $J(x)$ получено в [8, 17, 18]. Найдем его другим способом, опираясь на формулу

$$J(x) = 2 \int_1^\infty du \int_1^\infty dv \frac{u}{u+v} W(u;\ x) W(v;\ L-x), \tag{31}$$

где [17, 18]

$$W(u;\ x) = \int_0^\infty d\mu\mu \operatorname{th} \mu\pi \exp\left[-D\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)x\right] P_{-(1/2)+i\mu}(u).$$

Вычислим вначале входящий в (31) интеграл

$$\begin{aligned} \int_1^\infty W(v;\ L-x) \frac{dv}{u+v} = \int_0^\infty d\mu\mu \operatorname{th} \mu\pi \exp\left[-D\left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right)(L-x)\right] \times \\ \times \int_1^\infty P_{-(1/2)+i\mu}(v) \frac{dv}{u+v}. \end{aligned} \tag{32}$$

Используя равенство [28]

$$\int_1^\infty P_{-(1/2)+i\mu}(v) \frac{dv}{u+v} = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \mu\pi} P_{-(1/2)+i\mu}(u)$$

и подставив правую часть (32) в (31), получим

$$\begin{aligned} J(x) = 2\pi \exp\left[-\frac{1}{4} D(L-x)\right] \int_0^\infty d\mu\mu \frac{\operatorname{sh} \mu\pi}{\operatorname{ch}^2 \mu\pi} \times \\ \times \exp[-\mu^2 D(L-x)] \int_1^\infty u P_{-(1/2)+i\mu}(u) W(u;\ x) du. \end{aligned} \tag{33}$$

В [18] показано, что

$$\begin{aligned} \int_1^\infty u P_{-(1/2)+i\mu}(u) W(u;\ x) du = \exp\left[-\left(\mu^2 - \frac{3}{4}\right) Dx\right] \times \\ \times \left(\cos 2\mu Dx + \frac{\sin 2\mu Dx}{2\mu}\right). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (33), получим окончательно

$$\begin{aligned} J(x) = 2\pi \exp\left[D\left(x - \frac{1}{4}L\right)\right] \int_0^\infty d\mu \frac{\mu \operatorname{sh} \mu\pi}{\operatorname{ch}^2 \mu\pi} \exp(-\mu^2 DL) \times \\ \times \left(\cos 2\mu Dx + \frac{\sin 2\mu Dx}{2\mu}\right). \end{aligned} \tag{34}$$

Свойства $J(x)$ в виде (34) достаточно подробно обсуждены в работах [8, 17, 18].

2. Пусть теперь неоднородный слой со средним показателем преломления $n=1$ ограничен слева средой с $n \to \infty$, а справа — с $n \neq 1$. Тогда граничные условия уравнений (23) примут вид

$$
\begin{gathered}
Q(0)+P(0)=0, \quad P(L)+\lambda e^{2ikL} Q(L)=E(1+\lambda), \\
\lambda=\frac{n-1}{n+1} .
\end{gathered} \tag{35}
$$

Соответствующая задача Коши удовлетворяет уравнениям (24) и следующим из (35) условиям:

$$
\begin{gathered}
u_1(0)=1, \quad u_2(0)=-1, \quad v_1(L)=-\lambda e^{2ikL}, \\
v_2(L)=1.
\end{gathered} \tag{36}
$$

По аналогии с (25) будем иметь

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \frac{(1+\lambda) E u_1(x)}{u_1(L)+\lambda e^{2ikL} u_2(L)}, \\
Q(x) &= \frac{(1+\lambda) E u_2(x)}{u_1(L)+\lambda e^{2ikL} u_2(L)} .
\end{aligned} \tag{37}
$$

Здесь мы воспользовались равенством, аналогичным (26):

$$
v_1(x) u_2(x)-u_1(x) v_2(x)=-u_1(L)-\lambda e^{2ikL} u_2(L) .
$$

Учтя, что $|u_1|^2=|u_2|^2$, запишем $u(x)$ в виде $u_1=\sqrt{u}\, e^{i\alpha_1}$, $u_2=\sqrt{u}\, e^{i\alpha_2}$. Интенсивность поля внутри такого слоя равна

$$
I(x)=2|E|^2(1+\lambda)^2 u(x, L) \frac{1+\cos[\psi(x)+2kx]}{1+\lambda^2+2\lambda \cos[\psi(L)+2kL]}, \tag{38}
$$

где функции $\psi(x)=\alpha_2(x)-\alpha_1(x)$, $u(x_0, x)=u(x_0)/u(x)$ подчинены уравнениям

$$
\begin{gathered}
\frac{du}{dx}=k\varepsilon u \sin[\psi(x)+2kx], \quad \frac{d\psi}{dx}=-k\varepsilon\{1+\cos[\psi(x)+2kx]\}, \\
u(x_0, x_0)=1, \quad \psi(0)=\pi .
\end{gathered} \tag{39}
$$

Из (38), (39) видно, что статистика $I(x)$ определена плотностью вероятности марковской совокупности $u(x_0, x)$, $\psi(x)$ — $w(u, \psi; x \mid \psi_0; x_0)$. Уравнение для нее, усредненное по периоду π/k, таково:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial w}{\partial x}=D \frac{\partial^2}{\partial u^2} u^2 w+3D \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}, \\
w(u, \psi; x_0 \mid \psi_0; x_0)=\delta(u-1)\,\delta(\psi-\psi_0) .
\end{gathered} \tag{40}
$$

Отсюда видно, что $u(x_0, x)$ и $\psi(x)$ независимы и имеют соответственно логарифмически нормальное и нормальное распределения.

Статистика $I(x)$ при $\lambda=0$ обсуждалась в [17, 19]. При $\lambda \neq 0$ слой образует случайно-неоднородный резонатор. Обсудим его резонансные свойства. Найдем вначале

$$\langle \tilde{I}(x) \rangle = \frac{|E|^2(1+\lambda)^2}{\sqrt{3\pi DL}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-\frac{(\psi-\pi)^2}{12DL}\right]}{1+\lambda^2+2\lambda\cos(\psi+2kL)}\, d\psi =$$

$$= 2|E|^2 \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp(-3n^2DL - \gamma|n| - 2ikLn) =$$

$$= \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \frac{\gamma|E|^2}{2\pi^2\sqrt{3\pi DL}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\psi^2}{12DL}\right) \times \tag{41}$$

$$\times \frac{d\psi}{\gamma^2+[\psi+2kL-\pi(2n+1)]^2}, \qquad \gamma = -\ln\lambda \quad (\lambda > 0).$$

Здесь учтено, что $\langle u(x, L)\rangle = 1$. Таким образом, $\langle \tilde{I} \rangle$ как функция kL равна сумме пиков, являющихся сверткой лоренцовых пиков однородного резонатора с гауссовой плотностью вероятности $\psi(L)$.

При $\lambda = 0$ $\tilde{I}(L)$ не случайная функция [17, 19]. При $\lambda \neq 0$ из-за резонансных эффектов $\tilde{I}(L)$ становится случайной. Ее плотность вероятности при $DL \gg 1$

$$W(\tilde{I}) = \begin{cases} \dfrac{2|E|^2}{\pi\tilde{I}} \dfrac{1+\lambda}{1-\lambda} \dfrac{1}{\sqrt{\left[2|E|^2\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 - \tilde{I}\right][\tilde{I} - 2|E|^2]}} \\ \left(\tilde{I} \subset \left[2|E|^2,\ 2|E|^2\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2\right]\right), \\ 0, \\ \left(\tilde{I} \notin \left[2|E|^2,\ 2|E|^2\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2\right]\right) \end{cases}$$

и не равна нулю между $2|E|^2$ и $2|E|^2\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2$ — минимумом и максимумом $\tilde{I}(L)$ в однородном резонаторе. Следовательно, даже оптически толстый ($DL \gg 1$) резонатор сохраняет резонансные свойства однородного резонатора с той разницей, что условие резонанса $\psi(L) + 2kL = (2n+1)\pi$ теперь случайно.

Легко определить и статистику $I(x)$. Так, положив для простоты $DL \gg 1$, из (38) получим, что в окрестности $x = L$

$$\langle I(x) \rangle = 2|E|^2 \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \{1 - \lambda\exp[-3D(L-x)]\cos 2k(L-x)\}$$

и содержит интерференционный член, обусловленный жесткой связью при $x = L$ фаз падающей и отраженной волн (см. также [17, 19]).

Приведем в заключение корреляционную функцию $I(x)$ внутри оптически толстого резонатора ($Dx_{1,2} \gg 1$, $D(L - x_{1,2}) \gg 1$):

$$\langle I(x_1) I(x_2) \rangle = \frac{(1+\lambda)^2(1+\lambda)}{(1-\lambda)^3} |E|^4 [4 + 2\exp(-3D|x_1 - x_2|) \times$$

$$\times \cos 2k(x_1 - x_2)]\exp\{D[L - \max(x_1, x_2)]\}.$$

3. Приведем, наконец, пример стохастической краевой задачи с неодномерными случайными неоднородностями. Пусть рассмотренный выше резонатор заполнен неодномерной крупномасштабной случайно-неоднородной средой. Перейдя в уравнениях (11) к приближению Френеля, пренебрегая обратным рассеянием от неоднородностей среды и положив $T = Qe^{ikx}$, $R = Pe^{-ikx}$, придем к краевой задаче

$$-2ik\frac{\partial P}{\partial x} + \Delta_\perp P = k^2\varepsilon(x, \rho)P,$$

$$2ik\frac{\partial Q}{\partial x} + \Delta_\perp Q = k^2\varepsilon(x, \rho)Q,$$

$$Q(0, \rho) + P(0, \rho) = 0,$$

$$P(L, \rho) + \lambda e^{2ikL}Q(L, \rho) = E(\rho)(1 + \lambda).$$

Вспомогательная задача Коши имеет для этого случая вид (17).

Равенства, аналогичные (5), (16), здесь можно записать так:

$$P(0, \rho) + \lambda e^{2ikL}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} Q(L, q)\, g(0, \rho; L, q)\, dq =$$

$$= (1 + \lambda)\iint\limits_{-\infty}^{\infty} E(q)\, g(0, \rho; L, q)\, dq,$$

$$P(0, \rho) + \iint\limits_{-\infty}^{\infty} Q(L, q)\, g^*(0, \rho; L, q)\, dq = 0.$$

Исключая отсюда $P(0, \rho)$ и воспользовавшись равенством (18), придем к интегральному уравнению для $Q(L, \rho)$:

$$Q(L, \rho) = \iint\limits_{-\infty} G(q; L, \rho)[\lambda e^{2ikL}Q(L, q) - (1 + \lambda)E(q)]\, dq,$$

$$G(q; L, \rho) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} g(0, s; L, q)\, g(0, s; L, \rho)\, ds.$$

Домножая его на комплексно-сопряженное, интегрируя по ρ и учтя (18), получим

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} |Q(L, \rho)|^2 d\rho = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} |E(\rho)|^2 d\rho - \frac{2\lambda}{1 - \lambda}\times$$

$$\times \operatorname{Re} e^{2ikL}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} E^*(\rho)\, Q(L, \rho)\, d\rho. \tag{42}$$

Рассмотрим случай сильных фазовых флуктуаций $k^2AL \gg 1$. Усреднив (42) и учтя очевидное равенство $\langle Q(L, \rho)\rangle = 0$, будем иметь

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \langle |Q(L, \rho)|^2\rangle d\rho = \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} |E(\rho)|^2 d\rho.$$

Эта формула описывает средний поток энергии волны в направлении оси x при $x = L$.

Автор благодарен Б. С. Абрамовичу, С. Н. Гурбатову, А. Н. Малахову, Ю. А. Рыжову, В. В. Тамойкину за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кляцкин В. И — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 8, с. 1165.
2. Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 7, с. 996.
3. Малахов А. Н., Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 5, с. 577.
4. Герценштейн М. Е., Васильев В. Б. — Теория вероятности и ее применение, 1959, **4**, № 4, с. 424.
5. Альбер С. И., Беспалов В. И. — Радиотехника и электроника, 1961, **6**, с. 448.
6. Marcuse D.— IEEE Trans., 1972, **MTT-20**, p. 541.
7. Morrison J. A. — IEEE Trans., 1974, **MTT-22**, p. 126.
8. Газарян Ю. Л. — ЖЭТФ, 1969, **56**, с. 1856.
9. Morrison J. A., Papanicolaou G. C., Keller J. B.— Comm. Pure and Appl. Math., 1971, **24**, p. 473.
10. Рыжов Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1973, **16**, № 8, с. 1240.
11. Абрамович Б. С, Дятлов А. А — Изв. вузов — Радиофизика, 1975, **18**, № 8, с. 1122.
12. Кляцкин В. И., Татарский В. И — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 7, с. 1040.
13. Frish H. L., Lloyd S. P. — Phys. Rev., 1960, **120**, p. 1175.
14. Halperin B. I.— Phys. Rev., 1965, **139**, p. 104.
15. Williams E. A., Albritton J. R., Rosenblut M. N. — Phys. Fluids, 1979, **22**, p. 139.
16. Lang R. H. — J. Math. Phys., 1973, **14**, p. 1921.
17. Абрамович Б. С., Гурбатов С. Н., Рыжов Ю. А. — Изв вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 5, с. 566.
18. Кляцкин В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 2, с. 180.
19. Кляцкин В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 5, с. 591.
20. Kohler W. — J. Math. Phys., 1974, **15**, № 12, p. 186.
21. Виноградов А. Г., Кравцов Ю. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1973, **16**, № 7, с. 1055.
22. Виноградов А. Г., Кравцов Ю. А, Татарский В. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1973, **16**, № 7, с. 1064.
23. Гельфгат В. И. — Акуст. журн., 1976, **22**, с. 123.
24. Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 9, с. 1290.
25. Малахов А. Н., Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, **22**, № 11, с. 1324.
26. Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, **23**, № 2, с. 183.
27. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. — М.: Наука, 1978.
28. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1973. — Т. 1.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 4 октября 1979 г.

STATISTICAL ANALYSIS OF LINEAR BOUNDARY STOCHASTIC PROBLEMS BY THE METHOD OF REDUCTION TO CAUCHY PROBLEM

A. I. Saichev

Principles of statistical analysis of linear boundary problems are discussed both with one-dimentional and nondimentional random inhomogeneities by reduction to accessory Cauchy problems. As examples the average field intensity is considered in an one-dimentional randomly inhomogeneous layer on which plane waves fall from both sides as well as statistical properties of a field in a randomly inhomogeneous resonator.